LANDOLINO GIULIANO

**Sulle trasformazioni assolutamente continue**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 12, nº 3-4 (1947), p. 161-172

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1947_2_12_3-4_161_0>

# SULLE TRASFORMAZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE (*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

È noto (¹) che se $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, è una funzione continua a variazione limitata, condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia assolutamente continua è che ogni insieme di punti di $(a, b)$ di misura nulla sia trasformato dalla $f(x)$ in un insieme di punti di $(c, d)$ (dove $c=\min f(x)$, $d=\max f(x)$) pure di misura nulla.

S. BANACH (²) e G. VITALI (³), quasi contemporaneamente e indipendentemente hanno introdotto i concetti di trasformazione continua $\Phi$: $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $(u, v)\ \varepsilon\ \overline{Q}$, essendo $\overline{Q}$ il quadrato chiuso (0, 0; 1, 1), « a variazione limitata » e « assolutamente continua ». Si dimostra facilmente che, considerata la trasformazione continua $\Phi$: $x=x(u. v)$, $y=y(u, v)$, $(u, v)\ \varepsilon\ \overline{Q}$, che sia a variazione limitata secondo BANACH e VITALI, condizione necessaria e sufficiente affinchè essa risulti assolutamente continua secondo questi AA., è che trasformi ogni insieme di punti di misura nulla di $\overline{Q}$ in un insieme di punti di misura nulla.

A proposito delle sue fondamentali ricerche sulla quadratura delle superficie in forma parametrica, L. CESARI ha introdotto (⁴) i concetti di trasformazione continua « a variazione limitata » e « assolutamente continua », più generali di quelli corrispondenti di BANACH e VITALI. Dietro suggerimento del prof. CESARI — al quale rivolgo qui il mio ringraziamento — mi sono proposto di ricercare se la proprietà sopra notata relativamente alle trasformazioni assolutamente continue secondo BANACH e VITALI continui a sussistere per le trasformazioni assolutamente continue nel senso del CESARI. Ho trovato che la proprietà in

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) B. LEVI: *Ricerche sulle funzioni derivate.* Rend. Acc. Lincei, vol. XV (1906) pp. 674-684, p. 679.

(²) S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fundamenta Mathematicae. Tomo VII (1925) pp. 225-236.

(³) G. VITALI: *Sulle funzioni continue.* Ibidem Tomo VIII (1926) pp. 175-188.

(⁴) L. CESARI: *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica.* Bollettino dell'Un. Mat. It., Serie II (1942) pp. 109-117.

questione non sussiste in generale per tali trasformazioni [5]. Più precisamente, servendomi di un esempio costruito dal CESARI per altro scopo, mostro che esiste una trasformazione assolutamente continua definita in un cerchio $\overline{C}$ e non biunivoca che trasforma un insieme di punti interni a $\overline{C}$ di misura nulla in un insieme di punti di misura positiva. Inoltre un altro semplice esempio fa vedere che esiste una trasformazione assolutamente continua e biunivoca definita in un cerchio $\overline{C}$ che trasforma la circonferenza $C^*$ del cerchio in un insieme di misura positiva.

Passo quindi a dimostrare i due seguenti teoremi :

TEOREMA I. - *Siano $A$ una regione di* JORDAN *del piano $(u, v)$, $A^*$ la frontiera di $A$ e $\overline{A}=A+A^*$. Perchè la trasformazione continua a variazione limitata*

$$\Phi : x=x(u, v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}$$

*sia assolutamente continua, è sufficiente che essa trasformi ogni insieme di punti (interni) di $A$ di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.*

TEOREMA II. - *Siano $A$ una regione di* JORDAN *del piano $(u, v)$, $A^*$ la frontiera di $A$ e $\overline{A}=A+A^*$. Ogni trasformazione continua*

$$\Phi : x=x(u. v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}$$

*che sia biunivoca e assolutamente continua trasforma ogni insieme di punti (interni) di $A$ di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.*

Da questi teoremi si deduce in particolare che condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione continua e biunivoca

$$\Phi : x=x(u, v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}$$

(che quindi è a variazione limitata (v. n. 5)) sia assolutamente continua è che trasformi ogni insieme di punti (interni) di $A$ di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.

## Generalità - Definizioni.

1. - Detta $A$ una regione di JORDAN del piano $(u, v)$, $A^*$ la sua frontiera (curva continua semplice e chiusa) e posto $\overline{A}=A+A^*$, siano $x(u, v)$, $y(u, v)$ funzioni continue (ad un valore) in $\overline{A}$ e sia $\Phi$ la trasformazione continua (univoca)

(1) $$\Phi : x=x(u, v),\ y=y(u, v), \qquad (u, v)\ \varepsilon\ \overline{A}.$$

---

[5] D'ora in poi intenderò parlare di trasformazioni a variazione limitata e assolutamente continue secondo CESARI.

Ad ogni punto $P$ di $\bar{A}$ corrisponde nel piano $(x, y)$ un punto $Q \equiv \Phi(P)$ che diremo *immagine* del punto $P$. Diciamo $\bar{B} = \Phi(\bar{A})$ l'insieme dei punti del piano $(x, y)$ che sono immagini di qualche punto di $\bar{A}$. L'insieme $\bar{B}$ è limitato e chiuso. Sia $K$ un quadrato del piano $(x, y)$ a lati paralleli agli assi contenente nel suo interno tutti i punti di $\bar{B}$.

Se $Q$ è un punto di $\bar{B}$, esiste in $\bar{A}$ un insieme non vuoto di punti $P$, che diremo i *modelli* del punto $Q$, la cui immagine coincide con $Q$.

Indicheremo tale insieme, che risulta chiuso, con $\Phi^{-1}(Q)$.

Se $E$ è un insieme di punti di $\bar{A}$, diremo $\Phi(E)$ l'insieme dei punti di $\bar{B}$ che sono immagini di punti di $E$. Se $\mathcal{E}$ è un insieme di punti di $\bar{B}$, diremo $\Phi^{-1}(\mathcal{E})$ l'insieme dei punti di $\bar{A}$ la cui immagine cade in $\mathcal{E}$. Se $E$ è chiuso, anche $\Phi(E)$ è chiuso; se $\mathcal{E}$ è chiuso, anche $\Phi^{-1}(\mathcal{E})$ è chiuso. Se, per ogni punto di $\bar{B}$, $\Phi^{-1}(Q)$ è formato da un solo punto, diremo che la trasformazione $\Phi$ è *biunivoca*.

Sia $r$ una regione di JORDAN (aperta) contenuta in $A$ e sia $r^*$ la curva continua semplice e chiusa costituente la frontiera di $r$. La trasformazione $\Phi$ fa corrispondere alla curva $r^*$ una curva continua e chiusa $c$ (non necessariamente semplice) che diremo l'immagine di $r^*$. Indicheremo sempre con $c$ anche l'insieme $c = \Phi(r^*)$ occupato dai punti di $c$ sul piano $(x, y)$. Fissato sul piano $(u, v)$ un verso positivo per le rotazioni, la curva $r^*$ risulterà orientata. Fissiamo ora anche sul piano $(x, y)$ un verso positivo per le rotazioni (indipendente dal precedente). Sia $O(x, y; c)$ l'indice topologico (di KRONECKER) relativo alla curva $c$ (e che risulta nullo fuori di $K$). Si dimostra facilmente che la funzione $O(x, y; c)$ è di BAIRE e quindi quasi continua. Esiste perciò (finito o infinito) l'integrale di LEBESGUE

$$g(r) = \iint_K | O(x, y; c) | \, dx \, dy .$$

Sia ora $\{ r_i, i = 1, \dots, n \}$ una suddivisione di $\bar{A}$ in regioni di JORDAN. Sia $c_i$ l'immagine della frontiera $r_i^*$ di $r_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Poniamo:

$$G(A) = G(\Phi) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^{n} g(r_i)$$

per tutte le possibili suddivisioni $\{ r_i, i = 1, \dots, n \}$ di $\bar{A}$ in regioni di JORDAN. In ogni punto $Q \equiv (x, y)$ di $K$ si ponga:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, y; \Phi) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^{n} | O(x, y; c_i) |$$

per tutte le possibili suddivisioni $\{ r_i, i = 1, \dots, n \}$ di $\bar{A}$ in regioni di JORDAN.

La funzione $\Psi(x, y)$ (che assume solo valori interi $\geqslant 0$, non escluso $+\infty$) si dirà la funzione caratteristica della trasformazione $\Phi$.

Si prova che la funzione $\Psi(x, y)$ è semicontinua inferiormente in $K$ e perciò è una funzione di classe 1 di BAIRE, dunque è quasi continua. E poichè $\Psi(x, y)$ è una funzione non negativa, ne viene che esiste (finito o infinito) l'integrale di LEBESGUE

$$W = W(\Phi) = \iint_K \Psi(x, y; \Phi)\, dx\, dy .$$

*Se è* $W(\Phi) < +\infty$, *si dirà che la trasformazione* $\Phi$ *è a variazione limitata* (secondo CESARI).

Si dice che *la trasformazione continua* $\Phi$ *è assolutamente continua* (secondo CESARI) *se*:

$\alpha$) *ad ogni numero* $\varepsilon > 0$ *arbitrario può farsi corrispondere un numero* $\sigma > 0$ *tale che, per ogni gruppo* $\{\pi_i, i = 1, \ldots, n\}$ *di poligoni semplici aperti di* $A$, *a due a due senza punti a comune e tali che* $\sum_{i=1}^{n} |\pi_i| < \sigma$, (6) *si ha*:

$$\sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) < \varepsilon ,$$

$\beta$) *per ogni poligono* $\pi$ *di* $A$ *e per ogni suddivisione* $\{\pi_i, i = 1, \ldots, n\}$ *di* $\pi$ *in poligoni aperti semplici, a due a due senza punti a comune si ha*:

$$G(\pi) = \sum_{i=1}^{n} G(\pi_i) \quad (7).$$

**2. - Esempio di una trasformazione assolutamente continua che trasforma un insieme di punti interni di $A$ di misura nulla in un insieme di punti di misura positiva.**

Per altro scopo il CESARI aveva costruito (8) una trasformazione continua (*non* biunivoca)

$$\Phi : x = x(u, v), \ y = y(u, v), \qquad (\bar{c} : u^2 + v^2 \leqslant 1)$$

rappresentata da funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$ assolutamente continue secondo TONELLI dotate di derivate parziali prime integrabili $L^2$ che trasforma un insieme di punti interni al cerchio $\bar{c}$ di misura nulla in un insieme di misura positiva.

---

(6) Dato un insieme $E$, indicheremo con $|E|$ la sua misura esterna. Se $E$ è misurabile, $|E|$ indicherà la misura di $E$.

(7) Il CESARI ha dimostrato che le condizioni $\alpha$) e $\beta$) sono indipendenti (v. CESARI: *Sul concetto di trasformazione assolutamente continua.* Bollettino dell' Un. Mat. It. (1943) pp. 5-10.

(8) L. CESARI: *Sulle trasformazioni continue.* Annali di Matematica pura e applicata. Serie IV, Tomo XXI (1942) pp. 157-188, n. 19.

Ora, secondo un risultato dovuto a MORREY ([9]), ogni trasformazione $\Phi$ siffatta rappresenta una superficie (piatta) di area finita secondo LEBESGUE la cui area $L(S)$ è data dall'integrale classico. Per un teorema di CESARI ([10]) si deduce che la trasformazione $\Phi$ è assolutamente continua. Dunque esiste una trasformazione continua e assolutamente continua che trasforma un insieme di punti interni a $\bar{c}$ di misura nulla in un insieme di misura positiva.

### 3. - Esempio di una trasformazione assolutamente continua e biunivoca definita in un cerchio $\bar{C}$ che trasforma la circonferenza $C^*$ del cerchio in un insieme di misura positiva.

Sia $r^*$ una curva continua semplice e chiusa del piano $(x, y)$ di misura positiva. Sia $r$ la regione aperta di JORDAN definita da $r^*$ e sia $\bar{r}=r+r^*$. È noto che la regione $\bar{r}$ si può rappresentare con funzioni continue biunivocamente e conformemente in un cerchio in modo che la curva $r^*$ sia rappresentata biunivocamente sulla circonferenza del cerchio. Poichè ogni rappresentazione conforme è assolutamente continua, ne viene che esiste una trasformazione continua, biunivoca e assolutamente continua che trasforma il contorno di un cerchio nel contorno di una regione di JORDAN di misura superficiale positiva.

### 4. - Dimostrazione del teorema I.

*a*) Supponiamo che il teorema sia falso; supponiamo cioè che la trasformazione $\Phi$ che è a variazione limitata, non sia assolutamente continua, pur trasformando ogni insieme di punti di $A$ di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla.

Si supponga che esista, se possibile, un numero $\varepsilon>0$ e una successione di gruppi di poligoni semplici aperti, ciascun gruppo essendo costituito di un numero finito di poligoni interamente appartenenti ad $A$ e a due a due senza punti a comune $\{\pi_1'^{(n)}, \pi_2'^{(n)}, \dots, \pi_{\nu_n'}'^{(n)}\}$ $(n=1, 2, \dots)$ tali che:

$$\sum_{i=1}^{\nu_n'} |\pi_i'^{(n)}| < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{i=1}^{\nu_n'} g(\pi_i'^{(n)}) > \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Poichè la trasformazione $\Phi$ è a variazione limitata, detta $\Psi(x, y; \Phi)$ la sua funzione caratteristica, questa risulta integrabile, secondo LEBESGUE, e si potrà

([9]) C. B. MORREY: *A class of representations of manifolds.* Part I, American Journal of Mathematics, vol. LV (1933) pp. 683-707.

([10]) L. CESARI: *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* Memorie Acc. d'Italia (1943) pp. 1323-1481, p. 1480.

perciò determinare un numero $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme $E$ di punti di $K$ di misura $\leqslant \sigma$ si ha:

$$\iint_E \Psi(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy < \varepsilon\,.$$

Si dica $N$ l'insieme, di misura nulla, dei punti $(x, y)$ di $K$ nei quali è $\Psi(x, y\,;\, \Phi) = +\infty$.

*b*) Si osservi che se una poligonale $\lambda$ divide un poligono semplice $\pi$ in due poligoni semplici $\pi'$ e $\pi''$, allora l'immagine di $\lambda$ è, per l'ipotesi in cui ci siamo posti, una curva continua di misura superficiale nulla e si ha:

$$g(\pi) \leqslant g(\pi') + g(\pi'').$$

Suddividendo dunque i poligoni $\pi_i'^{(n)}$ in due, e quindi anche in più poligoni semplici, la prima delle somme (1) rimane invariata e la seconda non diminuisce. Si può perciò fare in modo che i poligoni $\pi_i'^{(n)}$ (e le loro immagini $\Phi(\pi_i'^{(n)})$) abbiano tutti diametro $< \frac{1}{2^n}$.

*c*) Dalla successione dei gruppi di poligoni $\pi_i'^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n')$ si può dedurre una nuova successione di gruppi di poligoni $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n)$, ogni gruppo $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n)$ essendo formato di un numero finito di poligoni, ognuno di diametro $< \frac{1}{2^n}$, semplici, aperti, a due a due senza punti a comune, in modo che per la nuova successione siano soddisfatte le (1), e in modo che ogni poligono $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, \nu_n)$ sia completamente contenuto in uno dei poligoni $\pi_j^{(n')}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_{n'})$ con $n' < n$, oppure sia completamente esterno a tutti i poligoni $\pi_j^{(n')}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_{n'})$, $n' = 1, 2, \ldots, n-1$.

Infatti, se la successione dei gruppi di poligoni $\pi_i'^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_n')$ ha essa stessa la proprietà enunciata, l'assumeremo come successione $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, \nu_n)$ richiesta. In caso contrario, si consideri il gruppo dei poligoni $\pi_j'^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1')$ e si ponga:

$$\pi_1'^{(1)} \equiv \pi_1^{(1)},\ \pi_2'^{(1)} \equiv \pi_2^{(1)}, \ldots\ldots,\ \pi_{\nu_1'}'^{(1)} \equiv \pi_{\nu_1}^{(1)}\,.$$

Consideriamo ora il gruppo dei poligoni $\pi_i'^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_2')$. Se nessuno di essi ha punti a comune con qualche poligono del gruppo $\pi_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$, si ponga:

$$\pi_1'^{(2)} \equiv \pi_1^{(2)},\ \pi_2'^{(2)} \equiv \pi_2^{(2)}, \ldots\ldots,\ \pi_{\nu_2'}'^{(2)} \equiv \pi_{\nu_2}^{(2)}\,;$$

altrimenti, sia $\pi_{\bar{\nu}}'^{(2)}$ uno dei poligoni del gruppo $\pi_i'^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu_2')$ che ha punti a comune con qualche poligono del gruppo $\pi_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$. Siano, precisamente, $\pi_{j_1}^{(1)}, \pi_{j_2}^{(1)}, \ldots, \pi_{j_\nu}^{(1)}$ $(\nu \leqslant \nu_1)$ quei poligoni del gruppo $\pi_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$ che si sovrappongono a $\pi_{\bar{\nu}}'^{(2)}$.

L'insieme $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}\ \pi^{(1)}_{j_1}$ è la somma di un numero finito di poligoni ognuno dei quali è completamente contenuto in $\pi^{(1)}_{j_1}$. L'insieme ([11])

$$H \equiv \pi'^{(2)}_{\overline{\nu}} - \pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}\ \pi^{(1)}_{j_1} - \pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}\ \pi^{(1)*}_{j_1}$$

è la somma di un numero finito di poligoni ognuno dei quali è completamente esterno a $\pi^{(1)}_{j_1}$. Ne segue che gli elementi di queste due somme ci danno complessivameute un gruppo di un numero finito di poligoni (semplici, aperti, e due a due senza punti a comune) ciascuno dei quali o è completamente contenuto in $\pi^{(1)}_{j_1}$ oppure è completamente esterno a $\pi^{(1)}_{j_1}$. Ragioniamo ora su ciascuno dei poligoni dell'insieme $H$ rispetto a $\pi^{(1)}_{j_2}$ come prima si è ragionato su $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}$ rispetto a $\pi^{(1)}_{j_1}$. Otterremo così per ciascun poligono di $H$ due gruppi di un numero finito di poligoni di cui il primo è formato di poligoni ognuno dei quali è completamente contenuto in $\pi^{(1)}_{j_2}$ e il secondo è formato di poligoni ognuno dei quali è completamente esterno a $\pi^{(1)}_{j_2}$. Così continuando fino a considerare il poligono $\pi^{(1)}_{j_\nu}$ si otterrà un numero finito $a_0$ di poligoni (semplici, aperti e due a due senza punti a comune) ciascuno dei quali o è completamente contenuto in qualche poligono del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,..., \nu_1)$ o è completamente esterno a tutti i poligoni di tale gruppo. Si noti ancora che l'insieme somma di tutti questi $a_0$ poligoni differisce da $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}$ per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla.

Il ragionamento si può ripetere per ognuno dei poligoni del gruppo $\pi_i'^{(2)}$ che hanno la stessa proprietà di $\pi'^{(2)}_{\overline{\nu}}$ vale a dire che hanno punti a comune con qualche poligono del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,..., \nu_1)$. Otterremo così complessivamente un numero finito di poligoni che insieme a quei poligoni del gruppo $\pi_i'^{(2)}$ che non abbiamo considerato perchè completamente esterni a tutti i poligoni del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,..., \nu_1)$ ci daranno un gruppo di $\nu_2 \geqslant \nu_2'$ poligoni $\pi_i^{(2)}$ $(i=1, 2,..., \nu_2)$ ognuno dei quali o è completamente contenuto in qualche poligono del gruppo $\pi^{(1)}_{j}$ $(j=1, 2,..., \nu_1)$ oppure è completamente esterno a tutti i poligoni di tale gruppo. Notiamo ancora che l'insieme $\sum_{i=1}^{\nu_2} \pi_i^{(2)}$ differisce dall'insieme $\sum_{i=1}^{\nu_2'} \pi_i'^{(2)}$ per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla.

Passando poi al gruppo $\pi'^{(3)}_{h}$ $(h=1, 2,..., \nu_3')$ e confrontandolo con i gruppi $\pi_j^{(1)}$ $(j=1, 2,..., \nu_1)$ e $\pi_i^{(2)}$ $(i=1, 2,..., \nu_2)$ e poi al gruppo $\pi'^{(4)}_{k}$ $(k=1, 2,..., \nu_4')$ e così via otterremo la successione di gruppi di poligoni $\pi^{(n)}_{r}$ $(r=1, 2,..., \nu_n)$,

---

([11]) Se $p$ è un poligono aperto tutto appartenente ad $A$, insieme alla sua frontiera, indicheremo sempre con $p^*$ la sua frontiera.

$n=1, 2,...$ (ogni gruppo essendo costituito di poligoni semplici, aperti e due a due senza punti a comune). Se si osserva infine che :

1°) i poligoni del gruppo $\pi_r^{(n)}$ $(r=1, 2,..., \nu_n)$ hanno tutti diametro $< \frac{1}{2^n}$ perchè questa proprietà possedevano i poligoni del gruppo $\pi_s'^{(n)}$ $(s=1, 2,..., \nu_n')$ della successione di partenza.

2°) l'insieme $\sum_{r=1}^{\nu_n} \pi_r^{(n)}$ differisce dall'insieme $\sum_{s=1}^{\nu_n'} \pi_s'^{(n)}$ per un numero finito di segmenti che costituiscono perciò un insieme di punti di misura superficiale nulla e quindi, tenendo presente l'osservazione fatta in *b*) si deduce, per le (1) :

$$\sum_{r=1}^{\nu_n} |\pi_r^{(n)}| = \sum_{s=1}^{\nu_n'} |\pi_s'^{(n)}| < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{r=1}^{\nu_n} g(\pi_r^{(n)}) \geqslant \sum_{s=1}^{\nu_n'} g(\pi_s'^{(n)}) > \varepsilon > 0 \tag{2}$$

si conclude che la successione ottenuta gode di tutte le proprietà enunciate.

*d*) Poniamo ora :

$$E_n = \sum_{r=1}^{\nu_n} \pi_r^{(n)}, \quad F_n = \sum_{j=n}^{\infty} E_j .$$

È $F_1 \supset F_2 \supset ...... \supset F_n \supset ......$ Si ponga poi $F = \lim_{n\to\infty} F_n$. Gli insiemi $E_n$, $F_n$, $F$ sono misurabili.

Abbiamo $|F_n| < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}$ e perciò $|F| = \lim_{n\to\infty} |F_n| = 0$.

Si dica $H_n$ l'insieme misurabile di tutti i punti $(x, y)$ di $K$ nei quali è :

$$\sum_{r=1}^{\nu_n} |O(x, y; c_r^{(n)})| \neq 0$$

dove $c_r^{(n)}$ è la curva continua e chiusa immagine della poligonale $\pi_r^{(n)*}$ costituente la frontiera di $\pi_r^{(n)}$. L'insieme $H_n$ ha misura $> \sigma$. Infatti, se fosse $|H_n| \leqslant \sigma$, si avrebbe :

$$\varepsilon < \sum_{r=1}^{\nu_n} g(\pi_r^{(n)}) = \sum_{r=1}^{\nu_n} \iint_K |O(x, y; c_r^{(n)})| \, dx\, dy = \iint_K \sum_{r=1}^{\nu_n} |O(x, y; c_r^{(n)})| \, dx\, dy =$$

$$= \iint_{H_n} \sum_{r=1}^{\nu_n} |O(x, y; c_r^{(n)})| \, dx\, dy \leqslant \iint_{H_n} \Psi(x, y; \Phi) \, dx\, dy < \varepsilon .$$

Si ponga :

$$J_n = \sum_{j=n}^{\infty} H_j .$$

È $J_1 \supset J_2 \supset \dots\dots \supset J_n \supset \dots$. Sia $J = \lim_{n\to\infty} J_n$. Gli insiemi $J_n$, $J$ sono misurabili.

Da $|H_n| > \sigma$ si ricava: $|J_n| > \sigma$ e $|J| \geqslant \sigma$.

Dimostriamo ora che:

(3) $$\Phi(F) \supset J - N.$$

Sia infatti $Q(x_0, y_0)$ un punto di $J-N$. Allora $Q(x_0, y_0)$ appartiene a $J$ e perciò a tutti gli $J_n$ e quindi a infiniti $H_n$. Esistono perciò infiniti poligoni $p_j \equiv \pi_r^{(n)}$ di indice $n$ comunque elevato per i quali $O(x_0, y_0; c_r^{(n)}) \neq 0$.

Poniamo:

$$m_0 = \Psi(x_0, y_0; \Phi).$$

È: $0 < m_0 < +\infty$. Pensiamo ordinati tali poligoni $p_j \equiv \pi_r^{(n)}$ in una successione $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ in modo che la successione dei corrispondenti indici sia monotona non decrescente. Ciascun poligono $p_j$ è completamente esterno a tutti i poligoni precedenti, oppure è completamente contenuto in un poligono $p_{j'}$, con $j' < j$.

Diciamo $c_j$ la curva continua e chiusa immagine della poligonale $p_j^*$ costituente la frontiera di $p_j$. Non possono esistere $m > m_0$ poligoni $p_j$ a due a due esterni l'uno all'altro, altrimenti si avrebbe:

$$m_0 = \Psi(x_0, y_0; \Phi) \geqslant \sum_{j=1}^{m} | O(x_0, y_0; p_j) | > m_0.$$

I poligoni $p_j$ debbono perciò distribuirsi in $m_0' \leqslant m_0$ successioni di poligoni:

$$p_1^{(s)} \supset p_2^{(s)} \supset \dots \supset p_j^{(s)} \supset \dots\dots \quad (s = 1, 2, \dots, m_0' \leqslant m_0)$$

ognuno contenente il successivo.

Per ognuna di queste $m_0'$ successioni esiste perciò almeno un punto $P^{(s)}$ $(s = 1, \dots, m_0')$ contenuto in ogni poligono della successione, oppure, se ciò fosse possibile, sulla frontiera di ogni poligono, a partire da un certo indice $j_0$ in poi. Ma proveremo subito che quest'ultima eventualità non si verifica. Infatti, si noti che $O(x_0, y_0; c_j^{(s)}) \neq 0$ (dove si è indicata con $c_j^{(s)}$ la curva continua e chiusa immagine della frontiera $p_j^{(s)*}$ di $p_j^{(s)}$) per ogni $j$ e perciò per un lemma di RADÒ ([12]), in ogni poligono $p_j^{(s)}$ esiste un modello $P_j^{(s)}$ di $Q$, cioè un punto $P_j^{(s)}$ tale che $\Phi(P_j^{(s)}) = Q$.

Ne segue che $P^{(s)}$ è punto di accumulazione di infiniti punti $P_j^{(s)}$ e perciò, essendo la $\Phi$ una trasformazione continua, $\Phi(P^{(s)}) = Q$. Inoltre, essendo $O(x_0, y_0; c_j^{(s)}) \neq 0$, $P^{(s)}$ non può appartenere a $p_j^{(s)*}$ e perciò esso è punto *interno* di tutti i poligoni $p_j^{(s)}$ a cui appartiene. Ciò prova che $P^{(s)}$ appartiene a infiniti poligoni $\pi_r^{(n)}$ con indice $n$ comunque elevato, cioè ad infiniti insiemi $E_n$ e quindi a tutti gli insiemi $F_n$ ed infine a $F$. Perciò $F$ è un insieme di punti

---

([12]) T. RADÒ: *On continuous transformations in the plane.* Fundamenta Mathematicae, Tomo XXVII. (1936) pp. 201-211.

di $A$ non vuoto, di misura nulla, per cui l'insieme corrispondente $\Phi(F)$ è tale che:

$$\Phi(F) \supset J-N, \quad |\Phi(F)| \geqslant |J-N| = |J| \geqslant \sigma > 0.$$

Ciò contraddice l'ipotesi ammessa ed è perciò soddisfatta la condizione $\alpha$) di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua.

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle svolte da CESARI in un suo lavoro ([13]), dall'ipotesi che la $\Phi$ trasforma ogni insieme di punti di $A$ di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla, segue che per ogni poligono $\pi$ di $A$ e per ogni suddivisione $\{\pi_i, \ i=1, 2,..., n\}$ di $\pi$ in poligoni aperti semplici, a due a due senza punti a comune, si ha:

$$G(\pi) = \sum_{i=1}^{n} G(\pi_i).$$

La condizione $\beta$) di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua è perciò anch'essa soddisfatta e il teorema resta pertanto provato.

5. - Prima di dimostrare il teorema II, proviamo il seguente:

TEOREMA. - *Ogni trasformazione $\Phi$ biunivoca e continua è a variazione limitata insieme alla sua inversa $\Phi^{-1}$.*

Si noti intanto che la $\Phi^{-1}$ è, come la $\Phi$, biunivoca e continua. Ciò segue subito se si osserva che, essendo $\Phi$ continua e biunivoca, ad ogni $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un numero $\sigma > 0$ tale che se $Q$ e $Q'$ sono due punti di $\overline{B}$ tali che $\overline{QQ'} < \sigma$, allora la distanza dei punti $P$ e $P'$ di $\overline{A}$ corrispondenti a $Q$ e $Q'$ risulta $< \varepsilon$. Si potrà perciò limitarsi a dimostrare la proprietà enunciata per la trasformazione $\Phi$.

Sia $\{r_1, r_2,..., r_n\}$ una suddivisione di $A$ in regioni di JORDAN e siano $\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_n$ le regioni di JORDAN immagini delle precedenti per la trasformazione $\Phi$. La $\{\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_n\}$ costituisce una suddivisione di $B$ in regioni di JORDAN e se $c_1, c_2,..., c_n$ sono le curve continue e chiuse costituenti la frontiera di $\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_n$, si ha

$$O(x, y; c_i) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } (x, y) \ \varepsilon \ \gamma_i \\ = 0 & \text{se } (x, y) \text{ non } \varepsilon \ \gamma_i . \end{cases}$$

Poichè la $\Phi$ è una trasformazione biunivoca si ha $\Psi(x, y; \Phi) \leqslant 1$ se $(x, y)$ $\varepsilon$ $B$, $\Psi(x, y; \Phi) = 0$ se $(x, y)$ non $\varepsilon$ $B$. D'altra parte, essendo per $n=1$, $r_1 \equiv A$ e perciò $\Psi(x, y; \Phi) \geqslant 1$ se $(x, y) \ \varepsilon \ B$, $\Psi(x, y; \Phi) = 0$ se $(x, y)$ non $\varepsilon$ $B$ risulta $\Psi(x, y; \Phi) = 1$ se $(x, y)$ $\varepsilon$ $B$, $\Psi(x, y; \Phi) = 0$ se $(x, y)$ non $\varepsilon$ $B$. In altre parole è $W(\Phi) = \iint_K \Psi(x. y; \Phi) \, dx \, dy = |B| < +\infty$ e perciò la $\Phi$ risulta a variazione limitata.

---

([13]) L. CESARI: *Sulle trasformazioni continue e sull'area delle superficie.* Memorie Acc d'Italia (1941) pp. 1305-1395, p. 1314.

### 6. - Dimostrazione del teorema II.

Supponiamo il teorema falso; supponiamo cioè che la trasformazione $\Phi$ biunivoca e continua e perciò a variazione limitata, per quanto abbiamo provato nel n. 5, sia anche assolutamente continua ed esista un insieme $E$ di punti (interni) di $A$ di misura nulla che sia trasformato dalla $\Phi$ in un insieme $\Phi(E)$ di misura esterna ([14]) positiva. Si abbia cioè:

$$|\,\Phi(E)\,| = \sigma > 0.$$

Si dica $A_\tau$ l'insieme (chiuso) dei punti di $A$ la cui distanza da $A^*$ è $\geqslant \tau$ e, analogamente, si dica $B_\lambda$ l'insieme (chiuso) dei punti di $B$ la cui distanza da $B^*$ ([15]) è $\geqslant \lambda$. È, evidentemente,

$$\lim_{\lambda\to 0} B_\lambda = B, \quad \lim_{\lambda\to 0} B_\lambda\,\Phi(E) = \Phi(E), \quad \lim_{\lambda\to 0} |\,B_\lambda\,\Phi(E)\,| = |\,\Phi(E)\,|$$

ed esiste perciò un $\bar\lambda > 0$ tale che:

$$|\,B_{\bar\lambda}\,\Phi(E)\,| > \frac{\sigma}{2}.$$

Si ponga $\mathcal{E}_0 = B_{\bar\lambda}\,\Phi(E)$, $E_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{E}_0)$.

È:
$$E_0 \subset E, \quad |\,E_0\,| = 0, \quad |\,\mathcal{E}_0\,| > \frac{\sigma}{2}.$$

Poichè $E_0$ corrisponde (biunivocamente) all'insieme $\mathcal{E}_0 \subset B_{\bar\lambda}$, esisterà un $\bar\tau > 0$ tale che $E_0 \subset A_{\bar\tau}$. Si osservi ancora che $A_{\bar\tau}$ è tutto costituito di punti interni di $A_{\bar\tau/2}$ e che l'insieme chiuso $\Phi(A_{\bar\tau/2})$ ha una distanza $\lambda' > 0$, $0 < \lambda' < \bar\lambda$ da $B^*$ ed è perciò interamente contenuto nell'insieme chiuso $B_{\lambda'}$. Per ogni intero $n$ esiste una successione di rettangoli aperti a lati paralleli agli assi, non sovrapponentisi, $\delta_1^{(n)}$, $\delta_2^{(n)}, \ldots$, appartenenti interamente all'insieme $A_{\bar\tau/2}$, tali che il plurirettangolo $\Delta_n$ che essi costituiscono ricopre una parte $E_0'$ di $E_0$ per cui $|\,\Phi(E_0 - E_0')\,| = 0$ e soddisfa alla condizione ([16])

$$|\,\Delta_n\,| = \sum_{r=1}^{\infty} |\,\delta_r^{(n)}\,| < \frac{1}{2^n}.$$

---

([14]) Si tenga presente che non è detto che a un insieme $E$ di $A$ misurabile corrisponda per la $\Phi$ un insieme misurabile.

([15]) Si osservi che la trasformazione $\Phi$ induce una corrispondenza biunivoca e continua fra le frontiere $A^*$ e $B^*$ di $A$ e di $B$.

([16]) Basta tener presente che, *nelle nostre ipotesi, ogni poligonale semplice $l$ tutta costituita di punti di $A$ è trasformata da $\Phi$ in una curva continua (semplice) di misura superficiale nulla.* Infatti, supposto, ciò che è possibile, $l$ completamente interna ad $A$, estremi inclusi, siano $l_1$ e $l_2$ due poligonali, aventi gli estremi in comune tra loro e con $l$ e tali che il poligono semplice aperto $\pi$ il cui contorno è $l_1 + l_2$ è completamente contenuto in $A$ e