Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Anna Maria Romano

Sul teorema di Jordan per le serie doppie di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 1-2 (1943), p. 85-97

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1943_2_12_1-2_85_0>

SUL TEOREMA DI JORDAN PER LE SERIE DOPPIE DI FOURIER

di ANNA MARIA ROMANO (Pisa) [1].

Recentemente L. TONELLI [2] e L. CESARI [3] hanno dimostrato il seguente teorema: « Se $f(x, y)$ è funzione periodica di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y, quasi continua e generalmente a variazione limitata nel quadrato $Q \equiv (0, 0, 2\pi, 2\pi)$ la sua serie doppia di FOURIER converge quasi ovunque in Q verso la funzione generatrice $f(x, y)$ ».

Questo teorema si può considerare come la estensione alle serie doppie di FOURIER del noto teorema di JORDAN relativo alle serie di FOURIER delle funzioni di una sola variabile.

Osserviamo ora che il concetto di funzione generalmente a variazione limitata, che per le funzioni soltanto quasi continue è lievemente più generale del concetto di funzione a variazione limitata secondo TONELLI, si identifica completamente con questo ultimo per le funzioni continue [4]. Osserviamo d'altra parte che il teorema di JORDAN assicura che la serie di FOURIER di una funzione di una variabile, continua, periodica di periodo 2π e a variazione limitata, converge uniformemente in tutti i punti di $(0, 2\pi)$ verso la funzione generatrice. Si potrebbe perciò ritenere che, per le funzioni di due variabili, continue, periodiche di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y e a variazione limitata secondo TONELLI in Q, il teorema enunciato avanti, possa essere completato così da assicurare la uniforme convergenza della serie doppia di FOURIER della fun-

---

(1) Lavoro eseguito al Seminario matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) L. TONELLI: *Sulle serie doppie di Fourier.* Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. II, Vol. VI (1937), pp. 315-326.

(3) L. CESARI: *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Tonelli e sulla convergenza delle relative serie di Fourier.* Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma.

(4) Per il concetto di funzione a variazione limitata secondo TONELLI si veda L. TONELLI: *Serie Trigonometriche.* Bologna, Zanichelli, 1928. Cap. IX, n. 164, pag. 443. Per il concetto di funzione generalmente a variazione limitata, si veda L. CESARI: *Sulle funzioni a variazione limitata.* Annali R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. II, vol. V (1936), pp. 299-313 e L. TONELLI: *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata.* id. id pp. 315-320.

zione $f(x, y)$ in tutti i punti di Q verso la funzione generatrice. Ma ciò non è. Dimostrerò infatti nella presente nota che:

a) Esiste una funzione $\Psi(x, y)$, periodica di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y, continua in tutto il piano, a variazione limitata secondo TONELLI *in Q e tale che la sua serie doppia di* FOURIER *non converge in un insieme di punti aventi la potenza del continuo* (di misura nulla).

b) Esiste una funzione $\chi(x, y)$ periodica di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y, continua in tutto il piano, a variazione limitata secondo TONELLI *in Q e tale che la sua serie doppia di* FOURIER, *pur convergendo ovunque, non converge uniformemente in nessun quadrato.*

Si può dunque concludere che il teorema di L. TONELLI e di L. CESARI enunciato avanti non può essere migliorato. Di più i risultafi a) e b) mostrano che per le funzioni continue e a variazione limitata secondo TONELLI sono possibili in sostanza, le stesse singolarità fino ad oggi accertate per le funzioni soltanto continue in una variabile [5].

Per la dimostrazione dei risultati a) e b) mi servirò di un procedimento simile a quello adoperato da FEJÉR per lo studio delle singolarità delle serie semplici di FOURIER [6].

1. - Poniamo:

$$\varphi(x, n) = 2\left(\text{sen } x + \frac{\text{sen } 2x}{2} + \dots + \frac{\text{sen } nx}{n}\right) = 2\sum_{r=1}^{n} \frac{\text{sen } rx}{r}$$

e consideriamo una qualsiasi serie convergente, a termini costanti positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Consideriamo inoltre le successioni di numeri interi, crescenti, positivi:

$$b_1, \quad b_2, \dots, \quad b_n, \dots; \qquad c_1, \quad c_2, \dots, \quad c_n, \dots; \qquad d_1, \quad d_2, \dots, \quad d_n, \dots$$

tali che sia sempre $b_n < c_n \leqslant \sqrt{d_n}$ e che assoggetteremo ad ulteriori condizioni. Costruiamo, infine, le funzioni:

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \varphi(x, b_n) \text{ sen } (c_n x) \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n}, \tag{1}$$

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \varphi(x, b_n) \cos (c_n x) \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n}. \tag{1'}$$

---

[5] Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche.* Bologna, Zanichelli, 1928, Cap. VII, § 1, pag. 359.

[6] Loc. cit. in [5].

Siccome per ogni x di $(0, 2\pi)$ ed ogni n si può determinare un numero L tale che sia $|\varphi(x, b_n)| < L$ [7] e, poichè è, in tutto $(0, 2\pi)$, $0 \leqslant \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} \leqslant 1$, le serie (1) e (1′) sono entrambe maggiorate da $L \sum_{=1}^{\infty} a_n$, e quindi dette serie convergono uniformemente in tutto Q ed anche in tutto il piano per la doppia periodicità dei termini delle due serie. Pertanto la $F(x, y)$ e la $G(x, y)$ risultano funzioni continue in tutto il piano e periodiche di periodo 2π rispetto ad x e rispetto ad y.

Diciamo $v_y^{(n)}(x, 2\pi)$ e $v_x^{(n)}(2\pi, y)$ le variazioni totali in $(0, 2\pi)$ del termine generale della (1) considerato come funzione, rispettivamente, della sola y e della sola x. Poichè la variazione totale di $\left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n}$ in $(0, 2\pi)$ è uguale a 2, si ha:

$$v_y^{(n)}(x, 2\pi) \leqslant 2a_n L;$$

con facile calcolo si trova anche [8]:

$$v_x^{(n)}(2\pi, y) \leqslant 2\pi\, a_n\, c_n\, \overline{L}\left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n},$$

dove è $\overline{L} = L + 2$. Inoltre:

$$v_{1,n} = \int_0^{2\pi} v_y^{(n)}(x, 2\pi)\, dx \leqslant 4\pi L a_n,$$

$$v_{2,n} = \int_0^{2\pi} v_x^{(n)}(2\pi, y)\, dy \leqslant 2\pi\, \overline{L}\; a_n\; c_n \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} dy,$$

---

(7) Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. Cap. III, n. 52, pag. 151. Zanichelli, Bologna (1928).

(8) Infatti, sia (d_i, d_{i+1}) un intervallo generico parziale, relativo ad una qualunque divisione in parti di $(0, 2\pi)$; avremo:

$$\sum_i \left| (a_n \varphi(d_{i+1}, b_n) \operatorname{sen}(c_n d_{i+1}) \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} - a_n \varphi(d_i, b_n) \operatorname{sen}(c_n d_i) \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} \right| =$$

$$= \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} a_n \sum_i |\varphi(d_{i+1}, b_n) \operatorname{sen}(c_n d_{i+1}) - \varphi(d_i, b_n) \operatorname{sen}(c_n d_i)| =$$

applicando il teorema del valor medio e successivamente maggiorando:

$$= \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} a_n \sum_i |d_{i+1} - d_i| \left| \left(2 \sum_{r=1}^{b_n} \cos r\bar{x}_i \cdot \operatorname{sen} c_n \bar{x}_i\right) + c_n\, \varphi(\bar{x}_i, b_n) \cos c_n \bar{x}_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} a_n \sum_i |d_{i+1} - d_i| \cdot (2b_n + Lc_n) \leqslant 2\pi a_n c_n \overline{L} \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n},$$

avendo indicato con $\bar{x}_i$ un opportuno punto interno all'intervallo (d_i, d_{i+1}) ed essendo $\overline{L} = L + 2$. Si ha quindi $v_x^{(n)}(2\pi, y) \leqslant 2\pi\, a_n\, c_n\, \overline{L}\left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n}$.

e poichè (9)

$$\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{y}{2}\right)^{2d_n} dy \leqslant 2\sqrt{\frac{\pi}{d_n}},$$

si ha:

$$v_{2,n}=\int_0^{2\pi} v_x^{(n)}(2\pi, y)\, dy \leqslant 4\pi\sqrt{\pi}\,\overline{L}\, a_n \frac{c_n}{\sqrt{d_n}}.$$

Da qui risulta, essendo $\frac{c_n}{\sqrt{d_n}} \leqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{1,n}=4\pi L\sum_{n=1}^{\infty} a_n< +\infty\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_{2,n}\leqslant 4\pi\sqrt{\pi}\,\overline{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{c_n}{\sqrt{d_n}}<4\pi\sqrt{\pi}\,\overline{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_n< +\infty.$$

Da queste osservazioni segue che la $F(x, y)$ è a variazione limitata secondo TONELLI in Q (10). Analogamente per la $G(x, y)$.

---

(9) Per giungere a questa disuguaglianza vedi loc. cit. in (7), Cap. IX, n. 189, nota in calce alla pag. 503.

(10) Ci serviamo del criterio seguente: « *Sia* $F(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$, *una serie ovunque convergente di funzioni quasi continue e a variazione limitata secondo* TONELLI *in Q. Siano* $V_y^{(n)}(x, 2\pi)$ e $V_x^{(n)}(2\pi, y)$ *le variazioni totali in* $(0, 2\pi)$ *della* $f_n(x, y)$, *considerata rispettivamente come funzione della sola y e della sola x, e sia* $v_{1,n}=\int_0^{2\pi} V_y^{(n)}(x, 2\pi)\, dx$, $v_{2,n}=\int^{2\pi} V_x^{(n)}(2\pi, y)\, dy$, $n=1, 2,\ldots.$. *Se le serie numeriche* $\sum_{n=1}^{\infty} v_{1,n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_{2,n}$ *convergono, allora la funzione* $F(x, y)$ *è generalmente a variazione limitata in* Q ».

Per la dimostrazione, ricordiamo anzitutto il teorema: « Se $u_n(x)\geqslant 0$, $a\leqslant x\leqslant b$, $n=1, 2\ldots.$, è una successione di funzioni quasi continue, non negative e integrabili, se $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$ converge, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ è quasi - ovunque convergente in (a, b), la funzione $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ è quasi continua e integrabile in (a, b) e $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(x)\, dx$ converge uniformemente verso $\int_a^x S(x)\, dx$ in (a, b) » [Cfr. E. W. HOBSON: *The theory of functions of a real variable, and the theory of Fourier's series.* Vol. II, Cap. V, § 214, pag. 305]. In forza di questo teorema e dalla convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_{1,n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_{2,n}$, si deduce la convergenza in

È poi:

$$\varphi(x, b_n) \operatorname{sen} c_n x = \left[\sum_{r=b_n}^{1} \frac{\cos (c_n - r)x}{r} - \sum_{r=1}^{b_n} \frac{\cos (c_n + r)x}{r} \right], \tag{2}$$

$$\varphi(x, b_n) \cos c_n x = \left[- \sum_{r=b_n}^{1} \frac{\operatorname{sen} (c_n - r)x}{r} + \sum_{r=1}^{b_n} \frac{\operatorname{sen} (c_n + r)x}{r}, \right. \tag{2'}$$

$$\left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_n} = \frac{1}{2^{d_n}} \left[\binom{2d_n}{d_n} + 2 \sum_{r=1}^{d_n} \binom{2d_n}{d_n - r} \cos ry \right]. \tag{3}$$

Moltiplicando membro a membro la (2) e la (2′) con la (3), si ottengono, a meno del fattore a_n, gli sviluppi in serie doppia di FOURIER dei termini

---

quasi-tutto $(0, 2\pi)$ di $\sum_{n=1}^{\infty} V_y^{(n)}(x, 2\pi)$ e di $\sum_{n=1}^{\infty} V_x^{(n)}(2\pi, y)$. Inoltre le due funzioni somma di queste serie risultano funzioni quasi continue e integrabili in $(0, 2\pi)$.

Se ora (a_r, a_{r+1}) è un intervallo generico di una qualunque divisione in parti di $(0, 2\pi)$, avremo che la variazione di $F(\bar{x}, y)$, considerata come funzione della sola y, relativa a un tale intervallo, è data da:

$$F(\bar{x}, a_{r+1}) - F(\bar{x}, a_r) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\bar{x}, a_{r+1}) - f_n(\bar{x}, a_r)].$$

Si ha poi:

$$| F(\bar{x}, a_{r+1} - F(\bar{x}, a_r) | \leq \sum_{n=1}^{\infty} | f_n(\bar{x}, a_{r+1}) - f_n(\bar{x}, a_r) |,$$

la quale scrittura ha significato per quasi-tutti gli $\bar{x}$, perchè la serie a secondo membro è convergente, essendo maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} V_y^{(n)}(\bar{x}, 2\pi)$, che, per l'osservazione fatta è convergente per quasi-tutti gli $\bar{x}$. Si ha successivamente:

$$\sum_r | F(\bar{x}, a_{r+1}) - F(\bar{x}, a_r) | \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_r | f_n(\bar{x}, a_{r+1}) - f_n(\bar{x}, a_r) | \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_y^{(n)}(\bar{x}, 2\pi).$$

Dunque, per quasi-tutti gli $\bar{x}$, la $F(\bar{x}, y)$ risulta a variazione limitata come funzione di y in $(0, 2\pi)$, e la sua variazione totale $V_y(\bar{x}, 2\pi)$ in $(0, 2\pi)$ verifica la disuguaglianza:

$$V_y(\bar{x}, 2\pi) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_y^{(n)}(\bar{x}, 2\pi).$$

Analogamente per la $V_x(2\pi, y)$. Risulta così dimostrato che le funzioni $V_y(x, 2\pi)$ e $V_x(2\pi, y)$ sono non maggiori di funzioni quasi continue e integrabili. Da un teorema di L. CESARI [*Sulle funzioni a variazione limitata.* Annali R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. II, Vol. V (1936), pp. 229-313, in part. n. 4, pag. 302] segue che $F(x, y)$ è una funzione generalmente a variazione limitata. Si osservi che se la funzione $F(x, y)$ è continua, allora il teorema ora ricordato assicura insieme che $F(x, y)$ è a variazione limitata secondo TONELLI.

generali rispettivamente della (1) e della (1′). Ricordiamo poi che, per la uniforme convergenza della serie (1) e (1′) i coefficienti di FOURIER delle funzioni $F(x, y)$, $G(x, y)$ sono dati dalle serie dei coefficienti corrispondenti dei termini delle serie (1) e (1′) ([11]). Ora se imponiamo alle costanti b_n, c_n l'ulteriore condizione di verificare la disuguaglianza.

$$c_{n+1} - b_{n+1} > c_n + b_n,$$

si ha che lo sviluppo di due diversi elementi di ciascuna delle serie (1) e (1′) non hanno termini simili, quindi ciascuna porzione dello sviluppo di un termine delle serie in questione, è anche una porzione dello sviluppo della corrispondente funzione. Possiamo scrivere:

$$F(x, y) \sim \sum_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n} \cos mx \cos ny, \qquad G(x, y) \sim \sum_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} B_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny.$$

La serie doppia di FOURIER di $F(x, y)$ non converge nel punto (0, 0).

Siano $S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{ik} \cos ix \cos ky \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots.,$ le somme parziali della serie doppia di FOURIER della $F(x, y)$. Per qualunque n, si ha:

$$(4) \qquad |S_{c_n-1,\, d_n}(0, 0) - S_{c_{n-1}+b_{n-1},\, d_{n-1}}(0, 0)| = a_n \sum_{r=b_n}^{1} \frac{1}{r} > a_n \log b_n, \quad ([12])$$

e se si scelgono gli a_n e b_n in modo che $a_n \log b_n$ non tenda a zero per $n \to \infty$, la serie doppia di $F(x, y)$ non converge in (0, 0). Infatti dalla (4) segue che si possono sempre determinare coppie di somme parziali, entrambe con indici grandi quanto si vuole, la cui differenza è, in valore assoluto, maggiore di un numero fisso. I numeri a_n, b_n, c_n, soddisfano a tutte le condizioni sopra indicate se, ad esempio, si scelgono come segue:

$$(5) \qquad a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = 2^{n^3}, \qquad c_n = 2^{n^3+1}, \qquad d_n = 2^{2(n^3+1)}.$$

Dimostriamo che la serie doppia di FOURIER della $G(x, y)$ converge ovunque ma non converge uniformemente nell'intorno del punto (0, 0). Consideriamo infatti la somma parziale $S'_{m,k}(x, y)$ della serie di FOURIER della (1′) e diciamo r

---

([11]) Cfr., per le serie semplici di FOURIER, L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. Bologna, Zanichelli (1928), n. 124, *b*), pag. 331.

([12]) Infatti vale la disuguaglianza: $\sum_{r=b_n}^{1} \frac{1}{r} > \log b_n$. Vedi loc. cit. in ([11]), Cap. VII, pag. 361.

il più grande intero ($\geqslant 0$) tale che lo sviluppo di $a_r \varphi(x, b_r) \cos c_r x \left(\cos \frac{y}{2}\right)^{2d_r}$ sia completamente contenuto in $S'_{m,\,k}(x, y)$. Avremo:

$$S'_{m,\,k}(x, y) = \mathfrak{S}_r(x, y) + Q(x, y),$$

dove $\mathfrak{S}_r(x, y)$ indica la somma parziale r^{sima} della serie (1′) e $Q(x, y)$ la parte rimanente di $S'_{m,\,k}(x, y)$. Ora, per $m, k \to \infty$, il che importa $r \to \infty$, $\mathfrak{S}_r(x, y)$ tende uniformemente verso la $G(x, y)$ in tutto Q. D'altra parte, ricordando che ogni porzione dei polinomi trigonometrici (3) è, in valore assoluto, minore di

$$\frac{1}{2^{2d_n}}\left[\binom{2d_n}{d_n} + 2\sum_{r=1}^{d_n}\binom{2d_n}{d_n - r}\right] = \left(\cos \frac{0}{2}\right)^{2d_n} = 1,$$

si ha:

$$\begin{aligned}|Q(x, y)| \leqslant a_{r+1} |\varphi(x, b_{r+1}) \cos (c_{r+1} x)| \cdot 1 + \\ + \dots + a_{n(m)-1} |\varphi(x, b_{n(m)-1}) \cos (c_{n(m)-1}\, x)| \cdot 1 + a_{n(m)} \cdot 1 \cdot |R(x)|,\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $n(m)$ il più piccolo intero per cui $m \leqslant c_n + b_n$ e con $R(x)$ quella porzione del polinomio trigonometrico (2′) in cui $c_n \pm r$ non supera m; poichè, fissato un $\varepsilon > 0$, arbitrario, minore di π, si può determinare un numero positivo $L(\varepsilon)$, tale che, qualunque siano i numeri interi positivi b_n, c_n, tutte le porzioni dei polinomi trigonometrici (2) e (2′) risultano, in valore assoluto, sempre minori di $L(\varepsilon)$, in tutto $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ ([13]), si ha, in ogni rettangolo $(\varepsilon, 0;\ 2\pi - \varepsilon, 2\pi)$:

$$|Q(x, y)| \leqslant 2a_{r+1} L(\varepsilon) + 2a_{r+2} L(\varepsilon) + \dots + 2a_{n-1} L(\varepsilon) + 2a_n L(\varepsilon) = 2L(\varepsilon)\, \mathfrak{R}_{(n-r),\, r}$$

dove $\mathfrak{R}_{(n-r),\,r}$ rappresenta la somma di $n-r$ termini dopo l'r^{simo} della serie $\sum_{n=}^{\infty} a_n$. Poichè per $m, k \to \infty$ è $r \to \infty$, e per $r \to \infty$ è $\mathfrak{R}_{(n-r),\,r} \to 0$, si ha, per $m, k \to \infty$, che $|Q(x, y)| \to 0$ in $(\varepsilon, 0, 2\pi - \varepsilon, 2\pi)$; ossia in detto rettangolo è uniformemente:

$$\lim_{m,\,k \to \infty} S'_{m,\,k}(x, y) = G(x, y).$$

Ciò significa che la serie doppia di FOURIER della $G(x, y)$ converge uniformemente in ogni rettangolo che escluda i punti di ascissa congrua a zero secondo il modulo 2π; ma in tali punti la serie converge, poichè si annullano tutti i suoi termini, per cui possiamo concludere che la serie doppia di FOURIER della $G(x, y)$ converge ovunque.

([13]) Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche*, Bologna, Zanichelli (1928). Cap. VII, pag. 359.

Ricordiamo che la quantità $\sum_{r=1}^{b_n} \frac{\operatorname{sen}(c_n+r)x}{r}$ è per $x=\frac{\pi}{4c_n}$, maggiore di $\frac{1}{2}(\log b_n - 1)$ [14]. Ne segue

$$(6) \qquad \left| S'_{c_n+b_n,\, d_n}\left(\frac{\pi}{4c_n}, 0\right) - S'_{c_n,\, d_n}\left(\frac{\pi}{4c_n}, 0\right)\right| = a_n \sum_{r=1}^{b_n} \frac{\operatorname{sen}(c_n+r)\frac{\pi}{4c_n}}{r} > \frac{a_n}{2}\left(\log b_n - 1\right)$$

e osserviamo che per $n \to \infty$ è $\left(\frac{\pi}{4c_n}, 0\right) \to (0, 0)$. Se con una opportuna scelta delle costanti, facciamo in modo che $a_n \log b_n$ non tenda a zero quando $n \to \infty$, la serie doppia di FOURIER di $G(x, y)$ non converge uniformemente nell'intorno di $(0, 0)$. Infatti dalla (6) segue che in ogni intorno di $(0, 0)$ cadono punti in cui la serie doppia di $G(x, y)$ presenta coppie di somme parziali, entrambe con indici grandi quanto si vuole, la cui differenza è, in valore assoluto, maggiore di un numero fisso.

Prima di procedere oltre, proviamo che, con una opportuna scelta delle costanti a_n, b_n, si può fare in modo che $a_n \log b_n$ non tenda a zero quando $n \to \infty$ e che le somme parziali $S'_{m,k}(x, y)$ della serie doppia della $G(x, y)$ verifichino la limitazione:

$$(7) \qquad |S'_{m,k}(x, y)| < H$$

dove H è una costante che non dipende nè da m e k, nè da (x, y).

Infatti, tenuto conto che ogni porzione dei polinomi trigonometrici (3) è, in valore assoluto, minore di 1, si ha:

$$|S'_{m,k}(x, y)| \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} a_s |\varphi(x, b_s) \cos c_s x| \cdot 1 + a_{n(m)} |R(x)| \leqslant L \sum_{s=1}^{n-1} a_s + 2a_{n(m)} \sum_{s=1}^{b_n} \frac{1}{s} \leqslant$$
$$\leqslant LM + 2a_{n(m)}(1 + \log b_n) \leqslant LM + 2N + 2a_n \log b_n,$$

dove $M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e N è il massimo valore di a_n. Ora se si scelgono a_n e b_n in modo che $a_n \log b_n$ rimanga limitato per qualunque n, senza che tenda a zero, segue l'asserto. Basta, ad esempio, porre:

$$(8) \qquad a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = 2^{n^2}, \qquad c_n = 2^{n^2+1}, \qquad d_n = 2^{2(n^2+1)}.$$

Il risultato precedente si può mettere sotto altra forma. Precisamente, posto:

$$(9) \qquad S'_{m,n,p,q}(x, y) = \sum_{i=m}^{m+p} \sum_{k=n}^{n+q} B_{i,k} \operatorname{sen} ix \cos kx \qquad (m, n, p, q \text{ interi e } \geqslant 0),$$

[14] Vedi L. TONELLI: *Serie trigonometriche*, Bologna, Zanichelli (1928), Cap. VII, pag. 361.

si ha, dalla (7), qualunque siano gli interi positivi m, n, p, q e per qualunque (x, y)

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} |S'_{0,n,p,q}(x,y)| = |S'_{p,n+q}(x,y) - S'_{p,n}(x,y)| \leqslant \\ \qquad \leqslant |S'_{p,n+q}(x,y)| + |S'_{p,n}(x,y)| < H + H = K, \text{ e} \\ |S'_{m,0,p,q}(x,y)| = |S'_{m+p,q}(x,y) - S'_{m,q}(x,y)| \leqslant \\ \qquad \leqslant |S'_{m+p,q}(x,y)| + |S'_{m,q}(x,y)| < H + H = k. \end{array}\right.$$

2\. - Ordiniamo tutti i punti di ascissa ed ordinata razionali di Q, in una successione, nella quale ciascuno di essi compaia una ed una volta sola:

$$(11)\qquad (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \quad (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \ldots, \quad (\bar{x}_n, \bar{y}_n), \ldots$$

Sia poi

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \quad \varepsilon_n, \ldots$$

una successione di numeri reali, $0 < \varepsilon_n \leqslant 1$, tendenti a zero. Poniamo per ogni (x, y):

$$\varepsilon(x, y) = \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon_n & \text{se } x \equiv \bar{x}_n \text{ (mod. } 2\pi), \ y \equiv \bar{y} \text{ (mod. } 2\pi) \\ 0 & \text{in ogni altro caso.} \end{array}\right.$$

Formiamo quindi la successione:

$$(12)\quad (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \ (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \ (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \ (\bar{x}_3, \bar{y}_3), \ (\bar{x}_2, \bar{y}_2), \ (\bar{x}_1, \bar{y}_1), \ (\bar{x}_4, \bar{y}_4), \ (\bar{x}_3, \bar{y}_3), \ldots$$

con la evidente legge di formazione; questa successione contiene tutti e soli i punti della (11) e ciascuno infinite volte. Diciamo (x_n, y_n) l'elemento n^{simo} della (12). Poniamo:

$$(13)\quad \Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(x_n, y_n)\, a_n\, \varphi(x - x_n, b_n) \text{ sen } c_n(x - x_n) \left(\cos \frac{y - y_n}{2}\right)^{2d_n},$$

$$(13')\quad \chi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(x_n, y_n)\, a_n\, \varphi(x - x_n, b_n) \cos c_n(x - x_n) \left(\cos \frac{y - y_n}{2}\right)^{2d_n},$$

dove le costanti vanno scelte per la (13), ad esempio, come in (5) e per la (13′), ad esempio, come in (8). Queste funzioni risultano periodiche di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, continue in tutto il piano, a variazione limitata secondo TONELLI in Q.

La serie doppia di FOURIER della $\Psi(x, y)$ non converge nei punti di ascissa ed ordinata razionali; infatti sia $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ uno dei punti della (11) e $\mathrm{S}_{m,k}(x, y)$ la somma parziale di tale serie, avremo allora, per quei particolari valori di r, arbitrariamente grandi, per cui è $x_r \equiv \bar{x}_n$ (mod 2π), $y_r \equiv \bar{y}_n$ (mod 2π):

$$|\mathrm{S}_{c_r - 1, d_r}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) - \mathrm{S}_{c_{r-1} + b_{r-1}, d_{r-1}}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)| = a_r\, \varepsilon(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \sum_{s = b_r}^{1} \frac{1}{s} > \varepsilon_n\, a_r \log b_r,$$

e poichè, per l'opportuna scelta delle costanti (vedi la (5)), è $a_r \log b_r \to \infty$ per $r \to \infty$, risulta che la serie doppia della $\Psi(x, y)$ ha le somme parziali non limitate nei punti di (11), ossia non converge in tali punti. Si osservi che i punti (11) sono ovunque densi in Q.

Possiamo addirittura dimostrare che la serie doppia della $\Psi(x, y)$ non converge in un insieme di punti avente la potenza del continuo. Consideriamo per questo la successione di somme parziali:

$$(14) \qquad S_{c_n+b_n, d_n}(x, y), \qquad n=1, 2, \ldots;$$

per quanto osservato precedentemente, nei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ della (11) è:

$$\lim_{n\to\infty} S_{c_n+b_n, d_n}(\bar{x}, \bar{y}) = +\infty.$$

Per ogni intero N diciamo E_N l'insieme dei punti (x, y) di Q nei quali è per ogni n:

$$|S_{c_n+b_n, d_n}(x, y)| \leqslant N, \qquad n=1, 2, \ldots.$$

Ogni insieme E_N è chiuso a causa della continuità delle $S_{c_n+b_n, d_n}(x, y)$, ed è non denso in Q, perchè i punti di divergenza della serie sono ovunque densi in Q [15], inoltre ogni E_N è contenuto nel successivo E_{N+1}, perchè nei punti in cui è:

$$|S_{c_n+b_n, d_n}(x, y)| \leqslant N, \qquad \text{è anche } |S_{c_n+b_n, d_n}(x, y)| \leqslant N+1.$$

Ne segue che l'insieme $E_1+E_2+\ldots$ è un insieme di prima categoria [16] ed il suo insieme complementare C ha la potenza del continuo [17]. Ma C è l'insieme dei punti di Q in cui la (14) non si mantiene limitata; risulta quindi che la serie doppia di FOURIER della $\Psi(x, y)$ non converge in un insieme di punti avente la potenza del continuo, il quale risulta poi di misura nulla per il teorema di JORDAN esteso alle serie doppie di FOURIER.

---

(15) Richiamiamo la def.: Un insieme E_N è non denso nel rettangolo Q in cui è contenuto, se in ogni sottorettangolo di Q, può essere determinato un altro sottorettangolo che non contiene punti di E_N. — E_N è non denso in Q, perchè, se non fosse non denso in Q, vi sarebbe almeno un sottorettangolo R di Q in ogni sottorettangolo del quale cadono punti di E_N. Ne segue che ogni punto di R è punto di accumulazione di E_N e poichè E_N è chiuso, E_n conterrebbe interamente R. Ma ciò non è possibile perchè in ogni sottorettangolo R di Q deve cadere almeno un punto di (11) in cui la (14) non è limitata.

(16) Ricordiamo la def.: Se gli insiemi E_N di una successione di insiemi, tutti contenuti in un rettangolo Q, e tali che E_N è contenuto in E_{N+1} sono non densi in Q, allora l'insieme somma $E_1+E_2+\ldots$ di questa successione si dice di prima categoria.

(17) Infatti l'insieme complementare di un insieme di prima categoria ha la potenza del continuo. Cfr. E. W. HOBSON: *The theory of function of a real variable and the theory of Fourier's series.* Cap. II, p. 136.

Dimostriamo ora che la serie doppia di FOURIER della $\chi(x, y)$ converge ovunque. Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto qualunque di Q ed $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e diciamo n_0 il più piccolo intero tale che per ogni $n \geqslant n_0$ sia $\varepsilon_n < \varepsilon$; dividiamo poi i punti della (11) in tre categorie: poniamo nella I^a categoria quegli eventuali punti $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}'$ per cui è $n \leqslant n_0$, $\bar{x}_n = \bar{x}$; nella II^a quei punti $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}''$ per cui è $n \leqslant n_0$, $\bar{x}_n \neq \bar{x}_n$; diciamo δ l'estremo inferiore delle differenze $|\bar{x}_n - \bar{x}|$ per quei valori di n per cui $n \leqslant n_0$, $\bar{x}_n \neq \bar{x}$. Poniamo infine nella III^a categoria tutti i rimanenti punti $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}'''$ di (11), cioè i punti con $n > n_0$.

Corrispondentemente spezziamo la serie doppia di FOURIER della $\chi(x, y)$:

$$\chi(x, y) \sim \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny,$$

nella somma di tre serie, in ciascuna delle quali compaia solo lo sviluppo di quei termini:

$$a_n \varepsilon(x_n, y_n)\, \varphi(x - x_n) \cos (x - x_n) \left(\cos \frac{y - y_n}{2}\right)^{2d_n}$$

per i quali il punto (x_n, y_n) appartiene rispettivamente ad una delle tre categorie. Potremo scrivere:

$$\text{(15)} \qquad \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny = \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \mathfrak{B}^{(1)}_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + $$
$$+ \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \mathfrak{B}^{(2)}_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \mathfrak{B}^{(3)}_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny.$$

Diciamo $\mathcal{S}'^{(i)}_{m,n,p,q}(x, y)$, $(i = 1, 2, 3)$ le somme definite dalla (9), relative, ordinatamente alle tre serie. Per ogni m, n, p, q $(\geqslant 0)$ si ha:

$$\mathcal{S}'^{(1)}_{0,n,p,q}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0, \qquad \mathcal{S}'^{(1)}_{m,0,p,q}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0,$$

perchè i termini della prima serie a secondo membro della (15), non identicamente nulli, contengono un fattore del tipo sen $m(\bar{x} - \bar{x}_m)$. Per i punti appartenenti alla seconda categoria si ha $|\bar{x}_n - \bar{x}| \geqslant \delta$, e quindi:

$$|\mathcal{S}'^{(2)}_{0,n,p,q}(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant L(\delta) \cdot 1 \cdot \sum_{r = r(n)}^{\infty} a_r,$$

$$|\mathcal{S}'^{(2)}_{m,0,p,q}(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant L(\delta) \cdot 1 \cdot \sum_{r = r'(m)}^{\infty} a_r,$$

dove $r(n)$ e $r'(m)$ sono i più piccoli interi per cui $n < d_r$ e rispettivamente $m < c_r + b_r$. Evidentemente $\lim_{n \to \infty} r(n) = \infty$ e $\lim_{m \to \infty} r'(m) = \infty$, e quindi in corrispondenza di ε si può determinare un N tale che, per $n>N$, $m>N$ e per qualunque $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, sia:

$$|\mathcal{S}'^{(2)}_{0,n,p,q}(\bar{x},\bar{y})|<\varepsilon, \qquad |\mathcal{S}'^{(2)}_{m,0,p,q}(\bar{x},\bar{y})|<\varepsilon.$$

Poichè per tutti i punti della III^a categoria è $\varepsilon(\bar{x}_n,\bar{y}_n)<\varepsilon$, si ha per le (10):

$$|\mathcal{S}'^{(3)}_{0,n,p,q}(\bar{x},\bar{y})|<k\varepsilon, \qquad |\mathcal{S}'^{(3)}_{m,0,p,q}(\bar{x},\bar{y})|<k\varepsilon;$$

da cui segue che, per ogni n, m entrambi maggiori di N e per qualunque $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, è:

$$|\mathcal{S}'_{0,n,p,q}(\bar{x},\bar{y})|\leqslant(1+k)\varepsilon, \qquad |\mathcal{S}'_{m,0,p,q}(\bar{x},\bar{y})|\leqslant(1+k)\varepsilon$$

dove k non dipende nè da $(\bar{x},\bar{y})$ nè da ε. Per il criterio di CAUCHY [18], rela-

---

[18] Sia:

$$(\alpha) \qquad \sum_{\substack{i\\k}\}=0}^{\infty} a_{ik}$$

una serie doppia numerica e siano $S_{m,n}$, $m, n=0, 1, 2,....$ le sue somme parziali. Consideriamo inoltre le somme $S_{m,n,p,q}=\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{k=n}^{n+q} a_{ik}$, $m, n, p, q=1, 2,....$. Come è noto vale il seguente teorema (di CAUCHY):

I. Condizione necessaria e sufficiente perchè la (α) converga è che ad ogni $\varepsilon>0$ arbitrario si possa far corrispondere un intero N tale che per ogni $m, n, m', n'>N$ si abbia:

$$(\beta) \qquad |S_{m,n}-S'_{m',n'}|<\varepsilon.$$

Osserviamo che al precedente teorema si può dare la forma seguente (che è quella da noi adoperata):

II. Condizione necessaria e sufficiente perchè la (α) converga è che ad ogni numero $\varepsilon>0$ arbitrario si possa far corrispondere un intero $N>0$ tale che per $m\geqslant N$, $n\geqslant N$ e $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$ si abbia:

$$|S_{m,0,p,n}|<\varepsilon, \qquad |S_{0,n,m,q}|<\varepsilon.$$

La condizione è necessaria: infatti, supposta la (α) convergente, sia $\varepsilon>0$ un numero arbitrario e sia N l'intero positivo di cui nel teorema I. Per ogni $m\geqslant N$, $n\geqslant N$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, e in forza della (β):

$$|S_{m,0,p,n}|=|S_{m+p,n}-S_{m,n}|<\varepsilon, \qquad |S_{0,n,m,q}|=|S_{m,n+q}-S_{m,n}|<\varepsilon.$$

La condizione è sufficiente. Sia $N>0$ un numero intero tale che per ogni $m, n\geqslant N$ e $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$ è:

$$|S_{m,0,p,n}|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |S_{0,n,m,q}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Avremo allora, qualunque siano i numeri interi $m, n, m', n'\geqslant N$:

$$|S_{m,n}-S_{m',n'}|\leqslant|S_{m,0,m'-n,n'}|+|S_{0,n,m,n'-n}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad \text{se} \quad m\leqslant m',\ n\leqslant n',$$

$$|S_{m,n}-S_{m',n}|\leqslant|S_{m',0,m-m',n}|+|S_{0,n,m',n'-n}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad \text{se} \quad m>m',\ n<n';$$

e analogamente se $m<m'$, $n>n'$. Dunque è verificata la condizione sufficiente contenuta nel teorema I, da cui segue la convergenza della serie (α).

tivo alle serie doppie, segue la convergenza della serie doppia di FOURIER della $\chi(x, y)$.

Dimostriamo che tale serie non converge uniformemente in nessun quadrato.

Infatti nell'interno di ogni quadrato Q' cadono punti di ascissa ed ordinata razionali; sia $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ il primo di questi. Per quei particolari valori di r per cui $(x_r, y_n) = (\bar{x}_n, \bar{y}_n)$, avremo:

$$\left| S'_{c_r + b_r, d_r}\left(\frac{\pi}{4c_r} + \bar{x}_n, \bar{y}_n\right) - S'_{c_r, d_r}\left(\frac{\pi}{4c_r} + \bar{x}_n, \bar{y}_n\right)\right| > \frac{a_r}{2} \varepsilon_n(\log b_r - 1)$$

e poichè per $r \to \infty$ è $\left(\frac{\pi}{4c_r} + \bar{x}_n, \bar{y}_n\right) \to (\bar{x}_n, \bar{y}_n)$, si ha che la serie doppia di FOURIER della $\chi(x, y)$ non converge uniformemente in Q', perchè, in Q' cadono sempre dei punti del tipo $\left(\frac{\pi}{4c_r} + \bar{x}_n, \bar{y}_n\right)$, nei quali la serie ha delle somme parziali, tutte composte di termini con indici grandi quanto si vuole, la cui differenza è maggiore di un numero fisso, supposto che, per l'opportuna scelta delle costanti (vedi la (8)) $a_r(\log b_r - 1)$ non tenda a zero.