

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

## **Su gli insiemi chiusi di misura nulla**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 3-4 (1941), p. 249-252

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1941\\_2\\_10\\_3-4\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_249_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SU GLI INSIEMI CHIUSI DI MISURA NULLA

di SANDRO FAEDO (Roma).

Si consideri su un intervallo  $(a, b)$  un insieme chiuso  $I$  di punti di misura nulla.

Per il teorema di PINCHERLE - BOREL, se è dato un qualunque gruppo  $G$  di intervalli di  $(a, b)$  tali che ogni punto di  $I$  sia interno ad almeno uno di essi, si può sempre estrarre da  $G$  un numero finito d' intervalli ricoprenti interamente  $I$ .

Quando parleremo di un gruppo di intervalli ricoprente  $I$  potremo quindi supporre — senza alcuna limitazione — che tale gruppo sia costituito di un *numero finito* di elementi.

Poichè  $I$  è inoltre di misura nulla esso si potrà rinchiudere in un gruppo di un numero finito di intervalli di lunghezza complessiva piccola a piacere.

Sia data una serie convergente a termini tutti positivi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Si domanda: *Sarà possibile trovare un gruppo di intervalli  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  ricoprente  $I$  e maggiorato dalla serie data, ossia tale che si abbia*

$$|\delta_1| \leq a_1, \quad |\delta_2| \leq a_2, \dots, \quad |\delta_n| \leq a_n \quad (1).$$

A questa domanda sembra ovvio che si possa rispondere affermativamente, dato che  $I$  si può ricoprire con un numero finito di intervalli di lunghezza complessiva piccola quanto si voglia.

Se  $I$  è numerabile la cosa è immediata, perchè basta ricoprire il primo punto di  $I$  con un intervallo di ampiezza  $a_1$ , il secondo punto con uno di ampiezza  $a_2$ , ecc.

Persuaso che alla domanda posta si potesse in ogni caso rispondere affermativamente, ne ho tentata inutilmente la dimostrazione, convinto di poterne trovare una assai breve data la semplicità che presenta a un primo esame la questione. Ma tutte le vie che tentavo si arrestavano di fronte a una difficoltà che, maggiormente analizzata, mi fece dubitare assai che la cosa fosse sempre possibile.

---

(1) Con  $\delta$  si indica la lunghezza dell'intervallo  $\delta$ .

Questo mio dubbio fu pienamente confermato non appena ebbi trovato un esempio di un insieme chiuso di misura nulla e una opportuna serie, a termini tutti positivi, tali che nessun gruppo di intervalli rinchiudenti l'insieme poteva essere maggiorato da questa.

Ma le cose, per così dire, stanno ancora peggio.

Si dimostra infatti che *se un insieme chiuso  $I$  di misura nulla è tale che, fissata comunque una serie a termini positivi, è sempre possibile trovare almeno un gruppo di intervalli maggiorato da questa e racchiudente  $I$ , esso è necessariamente numerabile.*

1. - Ritengo opportuno, perchè si possa veder bene la questione, di andare ad esaminare la natura della difficoltà che si incontra quando si tenti di dimostrare la possibilità di ricoprire un insieme di misura nulla con un gruppo di intervalli maggiorati da una serie prefissata.

Una delle vie che si possono seguire per raggiungere tale scopo è, ad esempio, questa.

Il complementare in  $(a, b)$  dell'insieme chiuso  $I$  è costituito da una infinità numerabile di intervalli aperti [senza punti a comune fra loro]

$$(1) \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$$

ossia è un plurintervallo aperto di  $(a, b)$  <sup>(2)</sup>.

Se

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

con  $a_n > 0$  è la serie prefissata, possiamo andarci a costruire una nuova successione di intervalli

$$\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n, \dots$$

nel modo seguente:

$\gamma'_1$  si ottiene da  $\gamma_1$  orlandolo da una parte con un segmento di lunghezza  $a_1$  e dall'altra con uno lungo  $a_2$ .  $\gamma'_2$  si ottiene analogamente da  $\gamma_2$  orlandolo con due segmenti di lunghezza rispettivamente  $a_3$  e  $a_4$ ; e così successivamente.

La proposizione sarebbe immediatamente dimostrata se si potesse affermare che ogni punto di  $I$  è contenuto in qualcuno dei  $\gamma'_n$ .

La costruzione fatta non permette però di arrivare a questa conclusione.

Sia infatti  $P$  un punto di  $I$ , che non sia estremo di nessun  $\gamma_n$  (e di tali punti ve ne sono certamente se  $I$  non è numerabile). Si può allora estrarre dalla (1) una successione di intervalli, che indicheremo ancora con  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$  i cui secondi estremi  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  formano una successione crescente che ha per limite  $P$  (se  $P$  fosse il primo punto di  $I$ , si può estrarre da 1) una successione di intervalli i cui primi estremi tendono decrescendo a  $P$ ). I secondi

<sup>(2)</sup> L. TONELLI: *Sulla nozione di integrale*, Ann. di Mat. S. IV, T. I, 1924, pag. 109.

estremi  $b_1', b_2', \dots, b_n', \dots$  dei corrispondenti intervalli  $\gamma_n'$  formano una successione che ha certamente per limite  $P$  e che *potrebbe essere* ancora crescente. In tal caso, che non si può escludere a priori, non si può affermare che  $P$  appartenga a qualche  $\gamma_n'$ .

2. - Andiamo a provare con un esempio che effettivamente si può costruire un insieme chiuso di misura nulla e una opportuna serie, tali che quell'insieme non si può mai rinchiodere in un gruppo di intervalli maggiorato da questa.

Consideriamo sull'intervallo  $(0, 1)$  il noto insieme di CANTOR, che si definisce nel modo seguente:

Si divida  $(0, 1)$  in 3 parti uguali e si tolgano i punti interni alla parte centrale. Rimangono i punti che appartengono a due intervalli chiusi  $\delta_{1,1}, \delta_{1,2}$  di ampiezza  $\frac{1}{3}$ . Si ripeta su questi l'operazione.

Restano i punti che appartengono a 4 intervalli chiusi  $\delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \delta_{2,3}, \delta_{2,4}$  di ampiezza  $\frac{1}{3^2}$ . Così si prosegue indefinitamente. I punti che non vengono tolti da  $(0, 1)$  costituiscono un insieme  $C$  di misura nulla, che chiamasi *insieme di Cantor*.

Sia data la serie convergente

$$(2) \quad \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

Supponiamo che si sia ricoperto  $C$  con un gruppo di  $n$  intervalli  $a_1, a_2, \dots, a_n$  maggiorati dalla (2).

L'intervallo  $a_1$  essendo  $|a_1| \leq \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3}$  lascia certamente all'esterno uno fra  $\delta_{1,1}$  e  $\delta_{1,2}$ . Sia questo  $\delta_{1,1}$ , e  $\delta_{2,1}, \delta_{2,2}$  siano i due intervalli di ampiezza  $\frac{1}{3^2}$  prima determinati e che sono contenuti in  $\delta_{1,1}$ .

Analogamente  $a_2$ , con  $|a_2| \leq \frac{1}{3^3} < \frac{1}{3^2}$ , lascia completamente all'esterno uno fra  $\delta_{2,1}$  e  $\delta_{2,2}$ . Così proseguendo si vede che  $a_1, a_2, \dots, a_n$  non possono certamente ricoprire  $C$  perchè lasciano all'esterno almeno un intervallino del tipo  $\delta_{n,i}$  [ $1 \leq i \leq 2^n$ ], il quale contiene infiniti punti di  $C$ .

3. - La dimostrazione ora data si può — con opportune modificazioni — applicare ad ogni insieme perfetto, ottenendo il teorema:

*Se  $I$  è un insieme perfetto, si può sempre costruire una serie a termini tutti positivi  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  tale che non si possa mai ricoprire  $I$  con intervalli maggiorati da essa.*

Siano  $a$  e  $b$  rispettivamente il minimo e il massimo fra i punti di  $I$ .

Il complementare di  $I$  è un plurintervallo

$$(3) \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$$

Andiamo ad ordinare questi intervalli nel modo seguente.

Tra gli intervalli di (3) di lunghezza massima indichiamo con  $\gamma_1'$  il primo nel verso da  $a$  a  $b$ . Il primo estremo di  $\gamma_1'$  è certamente distinto da  $a$ , altrimenti  $a$  sarebbe un punto isolato di  $I$ , il che è impossibile essendo  $I$  perfetto. Analogamente il secondo estremo di  $\gamma_1'$  è distinto da  $b$ . Perciò  $\gamma_1'$  determina in  $(a, b)$  due intervalli  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$  che comprendono tutti i punti di  $I$ .

Indichiamo con  $a_1$  la metà del più piccolo fra i numeri  $|\gamma_1'|$ ,  $|\delta_{1,1}|$ ,  $|\delta_{1,2}|$ .

Scegliamo ora in (3) il primo fra i massimi intervalli contenuti in  $\delta_{1,1}$ , e sia  $\gamma_2'$  e analogamente  $\gamma_3'$  in  $\delta_{1,2}$ .

Come prima si dimostra che  $\gamma_2'$  e  $\gamma_3'$  lasciano scoperti su  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$  quattro effettivi intervalli  $\delta_{2,1}$ ,  $\delta_{2,2}$ ,  $\delta_{2,3}$ ,  $\delta_{2,4}$ ; sia  $a_2$  uguale alla metà del più piccolo fra i numeri  $|\gamma_2'|$ ,  $|\gamma_3'|$ ,  $|\delta_{2,1}|$ ,  $|\delta_{2,2}|$ ,  $|\delta_{2,3}|$ ,  $|\delta_{2,4}|$ . Così proseguendo si viene certamente ad includere nei  $\gamma'$  ogni intervallo di (3), perchè per ogni  $\gamma$  c'è solo un numero finito di intervalli di (3) che abbiano lunghezza maggiore o uguale alla sua. Si ottiene così la serie (convergente) a termini positivi

$$(4) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

e si vede — con lo stesso ragionamento del caso trattato nel paragrafo precedente — che non si può ricoprire  $I$  con un gruppo di intervalli maggiorato dalla (4).

4. - Si consideri ora un qualunque insieme  $I$  chiuso di misura nulla. Per un classico teorema di CANTOR-BENDIXSON <sup>(3)</sup> tale insieme si può scomporre nella somma di un insieme perfetto e di uno al più numerabile. Se  $I$  ha la potenza del continuo, questo insieme perfetto certamente non è vuoto e, per quanto si è visto, esistono serie a termini positivi tali che è impossibile ricoprire  $I$  con intervalli maggiorati da esse.

Quindi se, qualunque sia la serie a termini positivi fissata, si può sempre trovare almeno un gruppo di intervalli maggiorato da questa e ricoprente l'insieme, esso potrà essere al più numerabile.

D'altronde si è visto che per gli insiemi numerabili — qualunque sia la serie a termini tutti positivi fissata — essa maggiora sempre gruppi di intervalli ricoprenti tutto l'insieme.

Si conclude quindi col teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme chiuso di misura nulla sia numerabile è che, fissata comunque una serie  $\sum$  a termini tutti positivi, si possa sempre trovare un gruppo di intervalli ricoprente tutto l'insieme e maggiorato da  $\sum$ .*

<sup>(3)</sup> F. HAUSDORFF: *Mengenlehre*, Berlin, 1935, III ed., VI Cap., § 26, p. 138.