ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Il principio di Zermelo per lo spazio delle funzioni continue

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 3-4 (1941), p. 209-214

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_209_0>

IL PRINCIPIO DI ZERMELO PER LO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE

di SANDRO FAEDO (Roma).

In due recenti lavori (1) mi sono occupato di una interessante questione riguardante il principio di ZERMELO, e precisamente della dimostrazione del detto principio per gli insiemi chiusi di alcuni tipi di spazî astratti molto generali.

Si tratta cioè di fissare una legge mediante la quale poter scegliere un elemento in ogni insieme chiuso di tali spazî.

Uno dei più importanti per l'Analisi è lo spazió delle funzioni continue, in cui la distanza fra due elementi $f(x)$, $g(x)$ sia definita da

$$\max |f(x)-g(x)|.$$

Il TONELLI (2), dopo aver data una dimostrazione di un noto teorema di ASCOLI indipendente dal principio di ZERMELO, osservava che dal suo ragionamento veniva stabilita una legge con cui scegliere una funzione in ogni insieme chiuso di funzioni ugualmente limitate ed ugualmente continue.

Per il nostro scopo non è però necessario nè che l'insieme sia equilimitato, nè che sia di funzioni ugualmente continue.

In questo lavoro si dimostra infatti che *si può sempre dare una legge con cui scegliere un elemento in ogni insieme chiuso di funzioni continue.*

1\. - Richiamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE: $f_0(x)$ è *funzione di accumulazione* (3) di un insieme di infinite funzioni se, preso ad arbitrio un numero positivo ϱ, esistono sempre infi-

---

(1) S. FAEDO: *Il principio di Zermelo nello spazio Hilbertiano.* Atti del II Congresso dell'Unione Matematica Italiana, 1940. - *Il principio di Zermelo per gli spazî astratti.* Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, serie II, vol. IX (1940), pp. 263-276.

Per maggiori dettagli circa la posizione del problema e per la bibliografia rinvio al secondo lavoro qui citato.

(2) L. TONELLI: *Sul valore di un certo ragionamento.* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1913. - *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, Cap. II, § 2, n. 22, Osservazione II, pag. 84, Zanichelli, Bologna, 1921.

(3) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, Cap. II, § 1, pp. 71-73.

nite funzioni $f(x)$ dell'insieme per cui, essendo (a, b) e (c, d) (con $a \leqslant b$, $c \leqslant d$) gli intervalli in cui sono definite $f_0(x)$ e $f(x)$, è sempre

$$
\begin{array}{lll}
|f_0(x)-f(x)| \leqslant \varrho, & & \text{per ogni } x \text{ comune ai due intervalli;} \\
a-x \leqslant \varrho, & |f_0(a)-f(x)| \leqslant \varrho & \text{per ogni } x<a \text{ e appartenente a } (c, d); \\
x-b \leqslant \varrho, & |f_0(b)-f(x)| \leqslant \varrho & \text{per ogni } x>b \text{ e appartenente a } (c, d);
\end{array}
$$

ed è inoltre $|a-c| \leqslant \varrho$, $|b-d| \leqslant \varrho$.

Poichè occorrerà considerare anche il caso di funzioni definite su intervalli infiniti, si dà anche la seguente

DEFINIZIONE: Dato un insieme di infinite funzioni $f(x)$, definite in $a \leqslant x < +\infty$ (4), dove a può variare da funzione a funzione, $f_0(x)$ $[a_0 \leqslant x < +\infty]$ si dirà *funzione di accumulazione al finito* (5) se, considerato un qualunque numero reale $t \geqslant a_0+1$ e preso ad arbitrio ϱ, con $0<\varrho<1$, esistono sempre infinite funzioni $f(x)$ $[a \leqslant x < +\infty]$ dell'insieme, che soddisfano alle seguenti condizioni:

$$
\begin{array}{ll}
|a_0-a| \leqslant \varrho; & \\
|f_0(x)-f(x)| \leqslant \varrho & \text{per ogni } x \text{ con } a_0 \leqslant x \leqslant t,\ a \leqslant x \leqslant t; \\
|f_0(a_0)-f(x)| \leqslant \varrho & \text{per ogni } x \text{ tale che } a \leqslant x \leqslant a_0.
\end{array}
$$

DEFINIZIONE: Un insieme di infinite funzioni si dirà *chiuso* se contiene ogni sua eventuale funzione di accumulazione, secondo le due definizioni ora date.

DEFINIZIONE: Diremo che le funzioni di un insieme sono *ugualmente limitate* (6) se esiste un numero M, tale che per ogni $f(x)$ dell'insieme è sempre $|f(x)| \leqslant M$ e inoltre gli intervalli in cui esse sono definite sono sempre contenuti in $(-M, M)$.

Il teorema di ASCOLI, già rammentato, afferma che un insieme di infinite funzioni ugualmente limitate ed ugualmente continue ammette almeno una funzione di accumulazione. Ma nella dimostrazione data dall'ASCOLI, e in seguito da altri Autori, si ammetteva di poter estrarre dall'insieme una successione di funzioni, ossia si faceva uso del principio di ZERMELO.

Il TONELLI (7) riusciva invece a dare una dimostrazione del teorema di ASCOLI del tutto indipendente dal principio delle infinite scelte arbitrarie.

Se si va ad analizzare il ragionamento fatto dal TONELLI, si vede che esso continua a sussistere anche se si allargano notevolmente le ipotesi ivi fatte.

---

(4) Si danno analoghe definizioni per i casi $-\infty < x \leqslant h$, $-\infty < x < +\infty$.

(5) Cfr. S. CINQUINI: *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni.* Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, serie II, vol. IX (1940), pag. 254.

(6) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, pp. 78-79.

(7) L. TONELLI: loc. cit. in (2).

Per mostrare ciò richiamiamo il concetto di insieme di funzioni *ugualmente oscillanti*, dovuto all'ARZELÀ (8).

DEFINIZIONE: Le funzioni di un insieme infinito W si dicono *ugualmente oscillanti* se esiste almeno una legge con cui far corrispondere ad ogni intero n un sottoinsieme infinito I_n di I e un numero $\delta_n > 0$ tali che ogni funzione di I_n, in ogni intervallo di lunghezza $< \delta_n$, compia un'oscillazione $< \frac{1}{n}$.

Per dimostrare il teorema di ASCOLI il TONELLI (9) estrae dall'insieme dato W di funzioni ugualmente limitate ed ugualmente continue, una successione di insiemi di funzioni che indica con

$$W_{1,1}, \quad W_{2,2}, \ldots, \quad W_{n,n}, \ldots .$$

Tali insiemi sono ognuno contenuto nel precedente e, in tutto un insieme A numerabile di punti uniformemente denso su un dato intervallo (a, b), questa successione converge a una funzione $F(x)$. L'ipotesi dell'uniforme continuità delle funzioni di W interviene soltanto per dimostrare che quella $F(x)$ è continua sull'insieme A. A tal scopo basta stabilire che fissato un intero positivo n ad arbitrio si può determinare δ_n in guisa che se $f_{n,n}(x)$ è una qualunque funzione dell'insieme $W_{n,n}$ ne segua

$$|f_{n,n}(x_2) - f_{n,n}(x_1)| < \frac{1}{n}, \quad \text{se} \quad |x_2 - x_1| < \delta_n .$$

Se l'insieme W è di funzioni ugualmente continue tale proprietà è ovvia.

Se invece le funzioni di W sono ugualmente oscillanti, basta avere l'avvertenza di scegliere W_{11} dentro all'insieme I_1, W_{22} in I_2 ecc., I_1, I_2,.... essendo i sottoinsiemi di W che sono determinati dal fatto che le funzioni di W sono ugualmente oscillanti.

Si vede facilmente che ciò si può effettivamente fare e che quindi il teorema di ASCOLI *sussiste, indipendentemente dal principio di* ZERMELO, *anche per ogni insieme di funzioni ugualmente limitate ed ugualmente oscillanti.*

Inoltre il *ragionamento del* TONELLI *stabilisce una legge con cui scegliere una funzione in ogni insieme di funzioni ugualmente limitate ed ugualmente oscillanti.*

2. - Considereremo lo spazio di tutte le funzioni continue, mentre ordinariamente ci si limita alle funzioni continue definite su uno stesso intervallo e si dà la distanza fra due elementi $f(x)$ e $g(x)$ come

$$\max |f(x) - g(x)| .$$

---

(8) C. ARZELÀ: *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.* Mem. Acc. Sc. Bologna, serie V, tomo VI (1896-1897), pag. 131. - *Sulle funzioni ugualmente oscillanti.* Atti Acc. Sc. Bologna, 1900.

(9) Cfr. loc. cit. in (6), pag. 82.

Andiamo ora a dimostrare il

TEOREMA: *Dato un insieme chiuso I di funzioni continue $f(x)$, si può dare una legge con cui scegliere una ben determinata funzione di I.*

L'insieme numerico, costituito dai valori che assumono le funzioni di I, sarà in generale non limitato e ciò per due motivi. Infatti può darsi che ogni funzione di I sia limitata, ma che non si possa fissare un numero superiore al valore assoluto di ogni funzione di I; o anche — se ogni funzione di I è definita su un intervallo infinito — può accadere che nessuna $f(x)$ sia limitata.

Distinguiamo perciò due casi:

1°) Esistono in I funzioni definite su un intervallo finito.

2°) Ogni funzione di I è definita su un intervallo infinito.

Inoltre — per quanto si è premesso — basterà dare una legge con cui estrarre da I un sottoinsieme di funzioni equilimitate e ugualmente oscillanti oppure un sottoinsieme costituito di un numero finito di elementi.

Infatti, se si ha un numero finito di funzioni continue, se ne può sempre fissare una nel modo seguente:

Ordinati i punti di ascissa razionale dell'asse delle x in una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, i valori di una funzione in questi punti si possono pensare come sua prima, seconda,...., n^{ma},.... coordinata, in quanto essi sono sufficienti a individuarla.

Allora si considerino dapprima le funzioni per cui la prima coordinata ha valore massimo: fra queste si scelgano quelle per cui la seconda coordinata ha valore massimo e così successivamente finchè, dopo un numero finito di operazioni, si viene a fissare una determinata funzione.

1° caso:

Sia I' il sottoinsieme, non vuoto, di I costituito da tutte le funzioni di I definite su un intervallo finito.

Con α indichiamo il confine inferiore di $|a|$, dove a è il primo estremo degli intervalli in cui sono definite le funzioni di I'; con β il confine inferiore dei secondi estremi degli intervalli relativi alle funzioni di I' per cui è

$$|a| \leq \alpha + 1.$$

Con I'' indichiamo il sottoinsieme non vuoto di I' formato dagli elementi di I' i cui intervalli di definizione (a, b) soddisfano a

$$|a| \leq \alpha + 1, \qquad \beta \leq b \leq \beta + 1.$$

Il confine inferiore dei massimi moduli delle funzioni di I'' è un numero finito $N \geq 0$; indichiamo con I''' il sottoinsieme non vuoto di I'' costituito dalle $f(x)$ di I'' per cui è sempre $|f(x)| \leq N + 1$.

L'insieme I''' così costruito è non vuoto e di funzioni equilimitate.

Se I''' fosse di un numero finito di elementi la questione sarebbe risolta.

In caso contrario andiamo a costruirci una successione di sottoinsiemi di I''' non vuoti e ognuno contenuto nel precedente, nel modo che segue.

Essendo ogni funzione $f(x)$ di I''' continua nel suo intervallo di definizione, essa è uniformemente continua; si può quindi per ogni $f(x)$ determinare un δ_1 (si prenda per ogni funzione il massimo dei possibili δ_1), tale che se x_1 e x_2 sono due punti dell'intervallo su cui è definita $f(x)$ e tali che $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_1$ sia $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 1$.

Sia $\varDelta_1$ il confine superiore di questi δ_1. Indichiamo con I_1 il sottoinsieme delle funzioni di I''' per cui è $\delta_1 \geqslant \frac{\varDelta_1}{2}$.

Per ogni funzione di I_1 si può determinare analogamente un δ_2 in modo che se x_1 e x_2 sono due punti in cui essa è definità e tali che $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_2$ sia $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}$. Se $\varDelta_2$ è il confine superiore di questi δ_2, diremo I_2 il sottoinsieme di I_1 formato da tutte le sue funzioni per cui è $\delta_2 \geqslant \frac{\varDelta_2}{2}$.

Così proseguendo si ottiene una successione di sottoinsiemi non vuoti di I''' ognuno contenuto nel precedente

$$I_1, \quad I_2, \ldots, \quad I_n, \ldots .$$

Se qualcuno di questi I_n (e quindi tutti i successivi) fosse costituito di un numero finito di elementi, si vada a prendere il primo di essi e si compia la scelta nel modo fissato per gli insiemi di un numero finito di elementi.

Se invece ogni I_n è costituito di infiniti elementi, allora I''' è un sottoinsieme di I equilimitato di funzioni limitatamente oscillanti, perchè basta far corrispondere ad ogni intero n il sottoinsieme infinito I_n.

Per quanto si è premesso si viene così ad individuare una funzione di accumulazione di I''', e quindi una funzione di I, essendosi questo supposto chiuso.

2º caso:

Indichiamo con X un punto dell'asse x quando in X sia definita almeno una funzione dell'insieme. Se $M \geqslant 0$ è il confine inferiore di $|X|$, indichiamo con I_1 il sottoinsieme non vuoto di I costituito da tutte le funzioni di I che sono definite in almeno un punto dell'intervallo

$$\delta_1 \equiv (-M - 1,\ M + 1).$$

Se delle funzioni di I_1 consideriamo soltanto i valori che esse assumono in δ_1, abbiamo in δ_1 un insieme chiuso $\mathfrak{I}_1$ di funzioni continue. Mentre a un elemento di I_1 ne corrisponde sempre uno in $\mathfrak{I}_1$, in generale accadrà che una funzione di $\mathfrak{I}_1$ provenga da più (anche infinite) funzioni di $\mathfrak{I}_1$.

Per il caso prima trattato, si ha una legge con cui scegliere un elemento φ_1 in $\mathfrak{I}_1$.

Se a questo corrisponde in I_1 al più un numero finito di elementi, per quanto si è premesso, è data la legge con cui sceglierne uno.

In caso contrario sia I_2 il sottoinsieme costituito dalle funzioni di I_1 che coincidono con φ_1 in δ_1 e $\mathfrak{J}_2$ il sottoinsieme costituito dai valori che le funzioni di I_2 assumono in $\delta_2 \equiv (-M-2, M+2)$.

In $\mathfrak{J}_2$ si sceglie, con la legge già data, un elemento φ_2; se a questo corrispondono in I_2 un numero finito di funzioni, se ne fissa una col procedimento già dato. Altrimenti si prosegue indefinitamente.

Si viene così a definire una ben determinata funzione di I e il teorema è anche in questo caso dimostrato.