

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LUIGI MARCHETTI

Riduzione alla forma canonica delle equazioni del moto di sistemi anolonomi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 10,
n° 3-4 (1941), p. 199-208

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_199_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

RIDUZIONE ALLA FORMA CANONICA
DELLE EQUAZIONI DEL MOTO DI SISTEMI ANOLONOMI (*)

di LUIGI MARCHETTI (Perugia).

1. - Si abbia un sistema dinamico olonomo S di coordinate lagrangiane q_h ($h=1, \dots, n$), (avente perciò n gradi di libertà); imponiamo ad esso uno o più vincoli ulteriori, traducendosi in altrettante equazioni involgenti le q_h e t , del tipo

$$(1) \quad f_\nu(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad (\nu=1, \dots, k; k < n)$$

che supporremo *indipendenti* rispetto alle q_h .

Potremo sempre immaginare di esprimere, per le (1), k delle q mediante le rimanenti. Perciò il nuovo sistema S' che possiamo immaginare ottenuto esprimendo k delle q mediante le altre avrà grado di libertà uguale ad $n-k$.

È ben noto ⁽¹⁾ come l'espressione analitica del più generale spostamento infinitesimo possibile del sistema schematizzato in N punti P_i , nell'istante t , a partire dalla configurazione di coordinate q_h , sia dato dall'equazione

$$(2) \quad dP_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt,$$

dove i dq_r e dt sono affatto indipendenti tra loro e arbitrari. Coll'aggiunta delle (1), questi dq_r e dt non saranno più indipendenti, ma dovranno soddisfare alle seguenti equazioni:

$$(3) \quad \sum_1^n \frac{\partial f_\nu}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} dt = 0, \quad (\nu=1, \dots, k)$$

cioè ad equazioni del tipo

$$(3') \quad \sum_r \frac{\partial f_\nu}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0, \quad (\nu=1, \dots, k),$$

funzioni lineari delle *velocità* \dot{q}_r .

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽¹⁾ Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI: *Lezioni di Meccanica razionale*, Vol. I, pag. 292, Zanichelli, 1927, Bologna.

Il sistema dato viene perciò assoggettato a nuovi vincoli, che assumono, attraverso le (3) o (3'), la forma di *vincoli di mobilità*.

Abbiamo cioè che il più generale spostamento possibile del sistema è dato dalle (2), dove però gli incrementi dq_r , dt si intendono legati dalle (3).

Dati perciò le q_r e t , per ogni dt , restano arbitrari $n-k$ solamente dei dq_r , restando i rimanenti espressi mediante questi attraverso le (3).

Un vincolo di mobilità del tipo

$$(4) \quad \sum_1^n a_{rv} dq_r + a_v dt = 0,$$

dove le a_{rv} , a_v sono funzioni delle q , ed eventualmente anche di t , sarà detto *anonomo*, quando non sia deducibile per differenziazione da una relazione in termini finiti involgente le q , ed eventualmente t .

Ed in conseguenza un sistema che possenga qualche vincolo anonomo sarà detto *sistema anonomo*.

2. - Ciò premesso potremo pensare il sistema anonomo come sottostante all'azione di certe forze aggiunte, e precisamente a quelle esercitate dai vincoli analiticamente espressi mediante le (4) del paragrafo precedente (*reazioni vincolari*).

Sia

$$\sum_1^n Q_h^* \delta q_h$$

il lavoro fornito al sistema da queste forze aggiunte in uno spostamento virtuale, ad un istante t , a partire dalla configurazione q_h , cioè in uno spostamento atto a far passare il sistema dalla configurazione q_h , ad un'altra *qualsiasi*, infinitamente vicina, e relativa allo stesso istante t ; i δq_h saranno soggetti alla restrizione di dover sottostare alle condizioni imposte dai vincoli di mobilità.

E sia

$$\sum_1^n Q_h \delta q_h$$

Il lavoro fornito dalle originarie forze applicate (*forze attive*) nello stesso spostamento.

Poichè l'aver introdotto forze aggiunte ha ricondotto il sistema a potersi trattare (nell'impostazione del problema di moto) come oonomo, potremo per esso scrivere le equazioni di LAGRANGE, nella seconda forma,

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_r} = Q_r + Q_r^*, \quad (r=1, \dots, n)$$

dove T è l'energia cinetica appartenente al sistema e Q_r^* dovrà essere considerata come *sollecitazione reattiva secondo la coordinata lagrangiana q_r* .

Le Q_1^*, \dots, Q_n^* sono incognite; esse hanno la proprietà di *non fornire lavoro virtuale* per ogni spostamento *compatibile con i vincoli di mobilità*.

Dovrà perciò essere

$$Q_1^* dq_1 + \dots + Q_n^* dq_n = 0$$

per tutti i valori dei rapporti

$$dq_1 : dq_2 : \dots : dq_n$$

soddisfacenti alle k equazioni:

$$a_{1v} dq_1 + \dots + a_{nv} dq_n = 0, \quad (v=1, \dots, k).$$

Dovrà perciò essere

$$Q_r^* = \lambda_1 a_{r1} + \dots + \lambda_k a_{rk}, \quad (r=1, \dots, n).$$

Dalle $n+k$ equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ri}, \quad (r=1, \dots, n) \\ \sum_{r=1}^n a_{rv} \dot{q}_r + a_v = 0, \quad (v=1, \dots, k) \end{array} \right.$$

indipendenti potranno essere determinate le $n+k$ incognite $q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Il problema è così ricondotto all'integrazione di questo sistema.

3. - Ammettiamo ora che le forze date derivino da una funzione delle forze U . Introdotta la funzione lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ come

$$L = T + U$$

ed eseguita la ben nota trasformazione di POISSON

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h},$$

le equazioni (5) prenderanno la forma

$$(6) \quad \frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_r} + Q_r^*, \quad (r=1, \dots, n).$$

Introduciamo ora la funzione hamiltoniana

$$H(p, q, t) = \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - L.$$

Le (6) potranno essere scritte

$$\frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^*, \quad (r=1, \dots, n),$$

oltrechè sussisteranno le altre n relazioni

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad (r=1, \dots, n).$$

Siamo così arrivati per sistemi anolonomi ad equazioni del moto in una forma *molto simile* a quella *canonica* dei sistemi olonomi; il sistema delle $2n$ equazioni differenziali del primo ordine

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^* \\ \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \quad (r=1, \dots, n)$$

sarà perciò da noi detto: *sistema canonico generalizzato*.

Non è inutile far notare come una volta risolto il problema del moto e determinate le Q^* , nel caso in cui tali forze reattive derivino da una funzione delle forze potremo considerare un'unica funzione delle forze U_1 , relativa a $Q + Q^*$, ottenendo in tal caso, invece delle (7), le equazioni

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \\ \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \quad (r=1, \dots, n)$$

raggiungendo così per le equazioni del moto la forma canonica classica.

4. - Vediamo ora, prescindendo dalla risoluzione del problema del moto e quindi dalla effettiva struttura delle Q^* , di arrivare alle equazioni canoniche classiche operando, in (7), sulle p , sulle q e su t con una opportuna trasformazione.

Si abbia un generico sistema differenziale del primo ordine

$$(8) \quad dx_1 : dx_2 : \dots : dx_{2n} = X_1 : X_2 : \dots : X_{2n}$$

dove le X_1, X_2, \dots, X_{2n} sono assegnate funzioni di x_1, x_2, \dots, x_{2n} , regolari in un certo campo.

Consideriamo ora uno pfaffiano ⁽²⁾

$$(9) \quad \psi = \sum_1^{2n} Y_i dx_i,$$

in cui le Y_i designano $2n$ funzioni finite e continue, insieme alle derivate prime, delle x , regolari entro un dato campo, *tali* che il sistema (8) possa essere

⁽²⁾ Cfr. per lo sviluppo delle teorie sugli pfaffiani l'opera di E. GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris, J. Hermann, 1922.

considerato come l'associato allo pfaffiano (9), e questo evidentemente può sempre farsi.

Per le (8), il sistema associato a (9)

$$(8') \quad \sum_1^{2n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right) dx_i = 0, \quad (j=1, \dots, 2n)$$

potrà scriversi

$$(8'') \quad \sum_1^{2n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right) X_i = 0, \quad (j=1, \dots, 2n).$$

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che le equazioni del moto per un sistema anolonomo prendevano la forma:

$$\begin{cases} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^* \\ \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \quad (r=1, \dots, n)$$

equivalente a

$$(7'') \quad dp_1 : \dots : dp_n : dq_1 : \dots : dq_n : dt = \\ = -\frac{\partial H}{\partial q_1} + Q_1^* : \dots : -\frac{\partial H}{\partial q_n} + Q_n^* : \frac{\partial H}{\partial p_1} : \dots : \frac{\partial H}{\partial p_n} : 1.$$

Per quanto abbiamo fatto precedentemente notare possiamo considerarlo come sistema associato ad un certo pfaffiano $\psi(p; q; t)$.

Operiamo ora sulle p , sulle q e su t con la trasformazione

$$(10) \quad \begin{cases} P_r = P_r(p, q, t) \\ Q_r = Q_r(p, q, t) \\ T = T(p, q, t) \end{cases} \quad (r=1, \dots, n),$$

invertibile entro un certo campo.

Se tale trasformazione mi fa

$$(11) \quad \psi = \sum_1^n P_r dQ_r - KdT + d\Omega,$$

indicando $d\Omega$ il differenziale esatto di una funzione $\Omega(P, Q, T)$, e K , arbitrariamente prefissata, una funzione di $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, T$, il sistema trasformato, come è ben noto ⁽³⁾, avrà la forma canonica

$$(7''') \quad \begin{cases} \frac{dP_r}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \\ \frac{dQ_r}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_r} \end{cases} \quad (r=1, \dots, n).$$

⁽³⁾ Cfr., per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, loco citato, pag. 311, Vol. II, Parte II.

Notiamo che esistendo k equazioni fra le q espressioni vincoli di mobilità, anche le Q non saranno indipendenti, ma fra le Q, P, T sussisteranno altrettante relazioni.

Lo pfaffiano a secondo membro di (11) potrà scriversi, tenendo conto delle (10):

$$\sum_1^n P_l \left\{ \sum_1^n \left(\frac{\partial Q_l}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial Q_l}{\partial t} dt \right\} - K \left\{ \sum_1^n \left(\frac{\partial T}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t} dt \right\} + d\Omega.$$

Indicando per semplicità di notazioni $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$ rispettivamente con x_1, \dots, x_{2n+1} , tale espressione prenderà la forma

$$\sum_1^{2n+1} \left\{ \sum_1^n P_l \frac{\partial Q_l}{\partial x_i} - K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} dx_i + d\Omega,$$

ed il sistema associato a tale pfaffiano, quando al posto di dx_1, \dots, dx_{2n+1} si sostituiscano le quantità proporzionali

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} + Q_1^*, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} + Q_n^*, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, 1$$

(che verranno momentaneamente indicate rispettivamente con X_1, \dots, X_{2n+1}) si scriverà:

$$\sum_1^{2n+1} \left\{ \sum_1^n \left(\frac{\partial P_l}{\partial x_j} \frac{\partial Q_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 Q_l}{\partial x_i \partial x_j} P_l \right) - \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n \left(\frac{\partial P_l}{\partial x_i} \frac{\partial Q_l}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 Q_l}{\partial x_j \partial x_i} P_l \right) + \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} + K \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i} \right\} X_i = 0, \quad (j=1, \dots, 2n+1)$$

cioè

$$(12) \quad \sum_1^{2n+1} \left\{ \sum_1^n \left(\frac{\partial P_l}{\partial x_j} \frac{\partial Q_l}{\partial x_i} - \frac{\partial P_l}{\partial x_i} \frac{\partial Q_l}{\partial x_j} \right) X_i - \left(\frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) X_i \right\} = 0, \quad (j=1, \dots, 2n+1).$$

Introducendo le parentesi di LAGRANGE ⁽⁴⁾, tali equazioni prenderanno la forma

$$(12') \quad \sum_1^{2n+1} [x_j, x_i] X_i - \sum_1^{2n+1} \left(\frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) X_i = 0, \quad (j=1, \dots, 2n+1).$$

⁽⁴⁾ Si abbiano $2n$ funzioni $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$, dei $2n$ argomenti x_1, \dots, x_{2n} . Chiameremo « Parentesi di Lagrange » relativa a due argomenti qualunque x_r e x_s , l'espressione

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_r} \frac{\partial v_i}{\partial x_s} - \frac{\partial u_i}{\partial x_s} \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \right)$$

e verrà indicata col simbolo: $[x_r, x_s]$.

E ritornando alle p, q, t :

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^n \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} + [q_s, t] - \\ & - \sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial q_s} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) \frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial q_s} \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \\ & - \left(\frac{\partial K}{\partial q_s} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n) \\ \\ & \sum_1^n \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [p_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} + [p_s, t] - \\ & - \sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial p_s} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial T}{\partial p_s} \right) \frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial p_s} \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial T}{\partial p_s} \right) \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \\ & - \left(\frac{\partial K}{\partial p_s} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial p_s} \right) = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n) \\ \\ & \sum_1^n \left\{ [t, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [t, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \\ & \sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

A queste equazioni bisognerà unire le

$$Q_r^* = \sum_1^k a_{rs} \lambda_s, \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

di pag. 201, mediante le quali le n incognite Q_r^* si esprimono in funzione delle k ($< n$) incognite λ_s , e le (4) di pag. 200

$$(a) \quad \sum_1^n a_{rs} \dot{q}_r + a_s = 0$$

le quali (ove le \dot{q} si esprimano mediante le p) costituiscono un ulteriore sistema di k equazioni fra le q, p, t .

In sostanza, a definire la sostituzione si hanno $2n+1+k$ equazioni [le 13 e le (a)] fra altrettante funzioni incognite $[P, Q, T, \lambda]$: intendendosi fissata K .

Abbiamo così che *condizione sufficiente perchè una trasformazione riduca un sistema del tipo (7) alla forma canonica (7''')* è che le P , le Q e T soddisfino alle $2n+1$ equazioni (13), in cui le Q^* si siano già determinate nel modo sopraddetto.

Ma è noto ⁽⁵⁾ che condizione *necessaria* perchè un sistema sia in forma canonica è che lo pfaffiano al quale è associato sia del tipo (11); non facendo le (13) che ridurre a questo tipo lo pfaffiano cui era associato il sistema dato, possiamo concludere che le (13) ci danno anche la condizione *necessaria*.

Vediamo ora quale forma assumono le (13) quando nella trasformazione (10) si faccia $T=t$.

Tenendo conto che in tale ipotesi, per qualunque r , è

$$\frac{\partial T}{\partial p_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 1,$$

avremo :

$$(13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} + [q_s, t] - \frac{\partial K}{\partial q_s} = 0, \\ \hspace{15em} (s=1, 2, \dots, n) \\ \sum_1^n \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [p_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} + [p_s, t] - \frac{\partial K}{\partial p_s} = 0, \\ \hspace{15em} (s=1, 2, \dots, n) \\ \sum_1^n \left\{ [t, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [t, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} + \sum_1^n \left\{ \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial K}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Unite alle (a), tali equazioni costituiscono un sistema nelle $2n+k$ incognite P, Q, λ .

Per avere un sistema di $2n+k+1$ equazioni in un *ugual* numero di incognite, si potrà assumere K come nuova incognita, al posto di T già prefissata.

Operiamo ora con una trasformazione del tipo

$$(10') \quad \left\{ \begin{array}{l} P_r = P_r(p, q) \\ Q_r = Q_r(p, q) \end{array} \right. \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

e facciamo inoltre due ipotesi :

1^a) Il sistema sia conservativo, e quindi la funzione H non contenga esplicitamente t e le (a) di pag. 205 si riducano alle

$$(\beta) \quad \sum_1^n a_{rs} \dot{q}_r = 0$$

con le a_{rs} indipendenti da t .

2^a) La funzione K coincida con H .

⁽⁵⁾ Cfr. MORERA: *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton*, in Rend. Acc. Lincei, Vol. XII, 1° sem. 1903, pp. 113-122

Le equazioni (13) si ridurranno alle

$$(13'') \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n) \\ \sum_1^n \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [p_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n) \\ \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial p_i} Q_i^* = 0. \end{array} \right.$$

Di queste l'ultima si può scrivere

$$\sum_1^n Q_i^* \dot{q}_i = 0,$$

meccanicamente interpretabile, nel caso attuale, come quella che definisce la proprietà fondamentale delle reazioni vincolari ⁽⁶⁾; essa è d'altronde conseguenza delle (β) e delle

$$Q_i^* = \sum_1^k a_{i\nu} \lambda_\nu.$$

Le equazioni indipendenti del problema sono dunque le prime $2n$ delle $(13'')$ e le (β) , mentre le funzioni incognite sono le P, Q, λ , in numero di $2n+k$, altrettante quante le equazioni.

Supponiamo che le q siano *indipendenti*. Sarà allora

$$Q_i^* \equiv 0, \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

avremo dunque un sistema nella forma canonica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \\ \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{array} \quad (r=1, 2, \dots, n). \right.$$

Si tratterà di determinare una trasformazione che *conservi* tale forma canonica, si tratterà cioè di trovare alcune condizioni che ci assicurino la natura *canonica* della trasformazione.

Le $(13'')$ in tale ipotesi prendono la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} - [q_s, p_i] \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} - \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n) \\ \sum_1^n \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} - [p_s, p_i] \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} - \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

⁽⁶⁾ Vedi § 2.

Si vede facilmente che il sistema ammette la soluzione

$$[p_i, p_s] = 0, \quad [p_s, q_i] = \delta_{si}, \quad [q_s, q_i] = 0$$

che non sono altro, come già si sa ⁽⁷⁾, che le condizioni di *completa canonicità* richieste.

5. - Ora che siamo arrivati alle equazioni del moto in forma canonica per sistemi anolonomi, possiamo applicare a tali equazioni tutti i risultati della teoria delle trasformazioni canoniche, in particolare il classico metodo di integrazione di JACOBI ⁽⁸⁾, il che manifestamente non era possibile prima della riduzione alla forma canonica di HAMILTON.

⁽⁷⁾ Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, loco citato, Vol. II, Parte II, pag. 321.

⁽⁸⁾ Cfr. ibid. pag. 362 e s. o anche JUVET: *Mécanique analytique et théorie des quanta*, Ed. Blanchard, Paris (1926), pag. 26 e s.