ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra il problema di Nicoletti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 2 (1941), p. 127-138

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_127_0>

SOPRA IL PROBLEMA DI NICOLETTI PER I SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

È ben noto che il problema di valori al contorno per un sistema di equazioni differenziali ordinarie è stato considerato, nella sua forma generale, da O. NICOLETTI ([1]) che l'ha risolto «in piccolo» alla fine del secolo passato. Pochi anni dopo C. SEVERINI ([2]) ha sviluppato, per il caso di una sola equazione, un complesso di ricerche, che si estendono anche ai sistemi di più equazioni, e che hanno dato origine ad un metodo rivelatosi, recentemente, assai fecondo.

In alcuni nostri lavori ([3]) ci siamo occupati del problema in questione per il caso di una sola equazione, ed abbiamo ripetutamente soggiunto che il nostro procedimento elementare, che trae il suo spunto dalle citate ricerche del SEVERINI, si può estendere ai sistemi di più equazioni differenziali ordinarie.

Nel presente lavoro ci occupiamo dapprima di un caso particolare del problema di NICOLETTI: si considera un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{array} \right.$$

([1]) O. NICOLETTI: *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.* Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXIII (1898).

([2]) C. SEVERINI: *Sopra gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo con valori prestabiliti in punti assegnati.* Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1905).

([3]) Un elenco completo dei nostri precedenti lavori trovasi in S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie.* Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol. XIV (1940), pp. 157-170, nota (7).

Segnaliamo in particolare i due seguenti, che, nel seguito, verranno indicati rispettivamente con M. I e M. III: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 1-22. *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine n.* Ibidem, Vol. IX (1940), pp. 61-77.

e, assegnati n punti qualunque (a_i, b_i), $(i=1, 2, \ldots, n)$, si richiede una soluzione $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ del sistema (1) soddisfacente alle condizioni

$$y_i(a_i) = b_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Lo studio di questo caso, che è il più semplice, e che è ritenuto, da qualche autore, degno di particolare rilievo, mette in luce quali siano le nuove considerazioni che vengono introdotte nel procedimento da noi già seguito per il caso di una sola equazione, per applicarlo, in modo altrettanto efficace, ai sistemi di più equazioni.

La soluzione del problema in questione per il sistema (1) viene stabilita, sotto opportune condizioni, *in grande* da un teorema generale (n. 2), di cui mettiamo in evidenza due corollari (n. 3), nei quali è contenuto, come caso particolare, un teorema rilevato da R. CACCIOPPOLI ([4]).

Nella dimostrazione del nostro teorema si presenta un sistema di n disuguaglianze algebriche in n variabili non negative, e la nuova difficoltà che, in confronto ai nostri precedenti lavori, si deve superare, allo scopo di dare la maggiore generalità alla nostra proposizione, si riduce a stabilire delle condizioni sufficienti, affinchè le soluzioni di tale sistema algebrico siano limitate. Questo studio, che, per quanto abbia carattere elementare, si presenta piuttosto laborioso, viene premesso (n. 1) al nostro teorema.

Il procedimento sviluppato per risolvere il problema in questione per il sistema (1), si estende, con qualche complemento, al problema generale di NICOLETTI per un sistema di equazioni differenziali di ordine qualunque ([5]). Si

---

([4]) R. CACCIOPPOLI: *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti.* Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. XIII (1931), pp. 498-502, n. 2.

Per un caso particolare vedi: A. MINZONI: *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine.* Rend. Seminario Matematico di Padova, A. IX (1938).

([5]) È noto che un qualsiasi problema di valori al contorno, relativo ad un sistema di equazioni differenziali di ordine superiore al primo, non può ricondursi sempre al problema considerato per il sistema (1). Per esempio: dato il sistema $y'' = f(x, y, y', z, z')$, $z'' = g(x, y, y', z, z')$, si richiede una soluzione $y = y(x)$, $z = z(x)$ soddisfacente alle condizioni

$$(a) \qquad y(x_i) = y_i, \qquad z(x_i) = z_i, \qquad (i = 1, 2).$$

Posto $y' = u$, $z' = v$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y' = u \\ z' = v \\ u' = f(x, y, u, z, v) \\ v' = g(x, y, u, z, v) \end{cases}$$

con le condizioni (a), che non rientrano in quelle formulate per il sistema (1).

A questo punto potrebbe sorgere l'idea di formulare il problema di valori al contorno relativo al sistema (1) in forma più generale e tale da contenere anche quello ora citato. Ma ottiene così, anche nel caso, che a prima vista può sembrare più ostico, in cui il sistema sia costituito di equazioni il cui ordine è variabile con esse, un'ampia proposizione che, sotto opportune condizioni, risolve il problema di NICOLETTI *in grande* e che contiene come caso particolare sia il teorema del n. 2, sia uno dei teoremi da noi stabiliti (vedi M. III, n. 1) per una sola equazione di ordine n ($n \geqslant 2$).

Si vedrà nel seguito che anche le altre nostre proposizioni valevoli per una sola equazione si estendono ai sistemi di ordine qualunque [6].

1. - Preliminari (sistemi di disuguaglianze algebriche).

a) - Considerata la matrice

$$\left\{\begin{matrix} c^{(0)}_{1,1} & c^{(0)}_{1,2} \dots & c^{(0)}_{1,n} \\ c^{(0)}_{2,1} & c^{(0)}_{2,2} \dots & c^{(0)}_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{(0)}_{n,1} & c^{(0)}_{n,2} \dots & c^{(0)}_{n,n} \end{matrix}\right.$$

definiamo, per $m=1, 2, \dots, n-1$; $r, s = m+1, m+2, \dots, n$,

$$c^{(m)}_{r,s} = \begin{vmatrix} c^{(m-1)}_{m,m} & c^{(m-1)}_{m,s} \\ c^{(m-1)}_{r,m} & c^{(m-1)}_{r,s} \end{vmatrix}.$$

b) - *Sia* $c_{r,s} \geqslant 0$, $(r=1, 2, \dots, n;\ s=1, 2, \dots, n+1)$, *e siano* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *n variabili non negative che verificano le disuguaglianze*

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \leqslant c_{1,1}\, x_1 + c_{1,2}\, x_2 + \dots + c_{1,n}\, x_n + c_{1,n+1} \\ \dots \\ x_n \leqslant c_{n,1} x_1 + c_{n,2}\, x_2 + \dots + c_{n,n}\, x_n + c_{n,n+1}. \end{matrix}\right. \tag{2}$$

Posto

$$c^{(0)}_{r,s} = c_{r,s}, \quad per \quad r \neq s, \qquad c^{(0)}_{r,r} = c_{r,r} - 1,$$

se è

$$c^{(0)}_{1,1} < 0, \quad c^{(1)}_{2,2} > 0, \quad c^{(2)}_{3,3} > 0, \dots, \quad c^{(n-1)}_{n,n} > 0, \tag{3}$$

le n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ *sono limitate.*

Il nostro asserto si prova facilmente per induzione.

---

ciò è assurdo, perchè, per esempio, potrebbe presentarsi il caso che una delle equazioni del sistema (1) dipendesse da una soltanto delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$,

$$\frac{dy_r}{dx} = f_r(x, y_r),$$

e in tal caso non si potrebbe imporre, in alcun modo, alla curva $y_r = y_r(x)$ il passaggio per due o più punti arbitrariamente prefissati.

[6] Per un caso particolare vedi G. SCORZA-DRAGONI: *Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine.* Boll. Unione Matematica Italiana A. XIV (1935), pp. 225-230.

Per $n=1$, da $x_1 \leqslant c_{1,1}\, x_1 + c_{1,2}$, essendo per ipotesi $c_{1,1}-1<0$, risulta evidentemente

$$x_1 \leqslant \frac{c_{1,2}}{1-c_{1,1}}.$$

Sia $n=2$; dalla prima delle (2) si trae

$$x_1 \leqslant \frac{c_{1,2}}{1-c_{1,1}}\, x_2 + \frac{c_{1,3}}{1-c_{1,1}},$$

e quindi se x_2 è limitato lo è anche x_1. Ma dalla seconda delle (2), in virtù di quest'ultima, risulta

$$x_2 \leqslant \left(\frac{c_{2,1}\, c_{1,2}}{1-c_{1,1}} + c_{2,2}\right) x_2 + \frac{c_{2,1}\, c_{1,3}}{1-c_{1,1}} + c_{2,3},$$

e quindi, siccome dalla seconda delle (3), in virtù della prima, risulta

$$\frac{c_{2,1}\, c_{1,2}}{1-c_{1,1}} + c_{2,2} < 1$$

x_2 è limitato, e, per quanto si è detto, lo è anche x_1.

Ciò premesso, supposto verificato il nostro asserto per $n-1$, dimostriamolo per n. Dalla prima delle (2), tenendo conto della prima delle (3), risulta

$$x_1 \leqslant \frac{c_{1,2}}{1-c_{1,1}}\, x_2 + \dots + \frac{c_{1,n}}{1-c_{1,1}}\, x_n + \frac{c_{1,n+1}}{1-c_{1,1}}, \tag{4}$$

e quindi, sostituendo nelle rimanenti delle (2), abbiamo il sistema

$$\left\{ x_j \leqslant \left(\frac{c_{j,1}\, c_{1,2}}{1-c_{1,1}} + c_{j,2}\right) x_2 + \dots + \left(\frac{c_{j,1}\, c_{1,n}}{1-c_{1,1}} + c_{j,n}\right) x_n + \frac{c_{j,1}\, c_{1,n+1}}{1-c_{1,1}} + c_{j,n+1},\ (j=2,3,\dots n), \right.$$

analogo al (2), ma che contiene soltanto $n-1$ disuguaglianze nelle $n-1$ variabili $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Posto

$$d^{(0)}_{r,s} = \frac{c_{r+1,1}\, c_{1,s+1}}{1-c_{1,1}} + c_{r+1,s+1},\ \text{per } r \neq s;\ d^{(0)}_{r,r} = \frac{c_{r+1,1}\, c_{1,r+1}}{1-c_{1,1}} + c_{r+1,r+1} - 1,$$
$$(r,\ s=1,\ 2,\dots\ n-1),$$

e, per $m=1, 2,\dots, n-2$; $r, s = m+1, m+2,\dots, n-1$,

$$d^{(m)}_{r,s} = \begin{vmatrix} d^{(m-1)}_{m,m} & d^{(m-1)}_{m,s} \\ d^{(m-1)}_{r,m} & d^{(m-1)}_{r,s} \end{vmatrix},$$

se sono verificate le disuguaglianze

$$d^{(0)}_{1,1} < 0,\quad d^{(1)}_{2,2} > 0,\quad d^{(2)}_{3,3} > 0,\dots,\quad d^{(n-2)}_{n-1,n-1} > 0, \tag{5}$$

le $x_2, x_3, \dots, x_n$ sono limitate e dalla (4) lo risulta anche x_1, e quindi il nostro asserto è completamente provato.

Per mostrare che hanno luogo le (5), osserviamo che, per ogni coppia r, s, è

$$d^{(0)}_{r,s} = -\frac{1}{1-c_{1,1}} c^{(1)}_{r+1,s+1}$$

e quindi anche

$$d^{(m)}_{r,s} = \frac{1}{(1-c_{1,1})^{2^m}} c^{(m+1)}_{r+1,s+1}, \qquad (m=1, 2, \ldots, n-2).$$

Si ha dunque in particolare

$$d^{(0)}_{1,1} = -\frac{1}{1-c_{1,1}} c^{(1)}_{2,2}; \qquad d^{(m)}_{m+1,m+1} = \frac{1}{(1-c_{1,1})^{2^m}} c^{(m+1)}_{m+2,m+2}, \quad (m=1, 2, \ldots, n-2),$$

e quindi in virtù delle (3) sono verificate le (5), e il nostro asserto è così provato.

c) - *Ferma l'ipotesi* $c_{r,s} \geqslant 0$, *una condizione sufficiente, affinchè le variabili non negative* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *che soddisfano al sistema* (2), *siano limitate, è che siano verificate le* n *disuguaglianze*

$$c_{1,j} + c_{2,j} + \ldots + c_{n,j} < 1, \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Infatti, sommando membro a membro le (2), risulta

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \sum_{j=1}^{n} (c_{1,j} + c_{2,j} + \ldots + c_{n,j})\, x_j + c_{1,n+1} + c_{2,n+1} + \ldots + c_{n,n+1},$$

e, in virtù delle (6), si trae

$$x_j \leqslant \frac{c_{1,n+1} + c_{2,n+1} + \ldots + c_{n,n+1}}{1-[c_{1,j} + c_{2,j} + \ldots + c_{n,j}]}, \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

d) - *Nell'enunciato che figura in c*) *alle disuguaglianze* (6) *possono sostituirsi le seguenti*

$$c_{i,1} + c_{i,2} + \ldots + c_{i,n} < 1, \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Infatti, indicato con X_i, $(i=1, 2, \ldots, n)$, il limite superiore dei valori che x_i può assumere nell'ipotesi che le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano non negative e che abbiano luogo le (2), sia X_r il maggiore dei numeri X_i o uno qualunque dei maggiori. Risulta evidentemente

$$X_r \leqslant (c_{r,1} + c_{r,2} + \ldots + c_{r,n})\, X_r + c_{r,n+1},$$

e quindi in virtù delle (7)

$$X_r \leqslant \frac{c_{r,n+1}}{1-[c_{r,1} + c_{r,2} + \ldots + c_{r,n}]},$$

ed anche

$$x_i \leqslant \frac{c_{r,n+1}}{1-[c_{r,1} + c_{r,2} + \ldots + c_{r,n}]}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

e) Osservazione. - È importante, per il seguito, mettere in rilievo che sia le condizioni (3), sia le (6), sia le (7), sono indipendenti dalle costanti

$$c_{1,n+1}, \quad c_{2,n+1}, \ldots, \quad c_{n,n+1}.$$

f) ESEMPIO. - Sia, per $n=2$,

$$\begin{cases} x_1 \leqslant \frac{1}{6} x_1 + 2x_2 + c_{1,3} \\ x_2 \leqslant \frac{1}{6} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + c_{2,3}. \end{cases}$$

È evidente che non sono soddisfatte nè le condizioni del capoverso *c*) nè quelle del capoverso *d*), ma sono verificate le condizioni del teorema dato in *b*). Infatti

$$c_{1,1}^{(0)} = \frac{1}{6} - 1 < 0, \qquad c_{2,2}^{(1)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{6} - 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - 1 \end{vmatrix} > 0.$$

2. - Teorema (per i sistemi del primo ordine).

Siano $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ *n funzioni definite per ogni x di* (a, b) *e per ogni n-pla di numeri reali* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *e tali che ciascuna di esse per ogni x fissato risulti continua rispetto a* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *e per ogni n-pla* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *fissata risulti quasi continua rispetto a x. Si supponga che esistano* $n(n+1)$ *funzioni non negative* $\gamma_{r,s}(x)$, $(r, s=1, 2, \ldots, n)$, $\psi_r(x)$, $(r=1, 2, \ldots, n)$, *integrabili* [7] *sull'intervallo* (a, b) *e tali che, posto*

$$c_{r,s} = \int_a^b \gamma_{r,s}(x)\,dx, \qquad (r, s=1, 2, \ldots, n),$$

risulti (n. 1, *a*))

$$c_{1,1}^{(0)} < 0, \quad c_{2,2}^{(1)} > 0, \quad c_{3,3}^{(2)} > 0, \ldots, \quad c_{n,n}^{(n-1)} > 0, \tag{8}$$

in modo che in tutto il campo

$$C'_\infty: \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad |y_j| < +\infty, \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

siano verificate le n disuguaglianze

$$|f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant \gamma_{i,1}(x)|y_1| + \gamma_{i,2}(x)|y_2| + \ldots + \gamma_{i,n}(x)|y_n| + \psi_i(x), \tag{9}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Allora, se (a_j, b_j), $(j=1, 2, \ldots, n)$ *sono n punti qualunque del piano* (x, y) *tali che sia* $a \leqslant a_j \leqslant b$, $(j=1, 2, \ldots, n)$, *il sistema*

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1(a) + \int_a^x f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dx \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = y_n(a) + \int_a^x f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dx \end{cases} \tag{10}$$

---

[7] L'integrabilità va intesa sempre nel senso del LEBESGUE.

ammette in (a, b) *almeno una soluzione* $y_i = y_i(x)$, $(i=1, 2,...., n)$ *con* $y_i(x)$ *assolutamente continua e tale che sia*

$$(11) \qquad y_1(a_1) = b_1, \quad y_2(a_2) = b_2, ..., \quad y_n(a_n) = b_n.$$

Infatti, sia $y_i = Y_i(x)$, $(i=1, 2,...., n)$ una soluzione del sistema (10), la quale verifichi le condizioni (11), e si supponga che le funzioni f_i soddisfino, anzichè alle (9), alle disuguaglianze

$$(12) \quad |f_i(x, y_1, y_2,...., y_n)| \leq \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}(x)|y_j| + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}(x) + \psi_i(x), \qquad (i=1, 2,...., n).$$

Essendo

$$\Big\{ \; Y_i(x) = b_i + \int_{a_i}^{x} f_i(x, Y_1, Y_2,...., Y_n)\, dx, \qquad (i=1, 2,...., n),$$

indicato con M_i $(i=1, 2,...., n)$ il massimo modulo di $Y_i(x)$ sull'intervallo (a, b) e posto

$$h_i = |b_i| + \int_a^b \Big\{ \psi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}(x) \Big\} dx,$$

in virtù delle (12) risulta

$$\{ \; M_i \leq c_{i,1} M_1 + c_{i,2} M_2 + ... + c_{i,n} M_n + h_i, \qquad (i=1, 2,...., n),$$

e quindi, tenute presenti le (8), per il n. 1, *b*) esiste un numero $L > 0$, tale che, in tutto (a, b), sono verificate le disuguaglianze

$$|Y_i(x)| \leq L, \qquad (i=1, 2,...., n).$$

Ciò premesso, in modo perfettamente analogo al n. 1 di M. III, considerato x come parametro, approssimiamo nel cubo ad n dimensioni $\Delta \equiv [\,|y_j| \leq L+1,$ $j=1, 2,...., n]$ ciascuna funzione $f_i(x, y_1,...., y_n)$ mediante la nota successione dei polinomi di STIELTJES nelle n variabili $y_1, y_2,...., y_n$. Otteniamo così n successioni di funzioni

$$\Pi_{i,m}(x, y_1, y_2,...., y_n), \qquad (m=1, 2,....), \qquad i=1, 2,...., n.$$

Quindi in modo identico al luogo citato definiamo per ogni m maggiore di un certo $\overline{m}$ le funzioni $Q_{i,m}(x, y_1, y_2,...., y_n)$, osservando che, in virtù delle (9), in tutto C'_∞ e per $m > \overline{m}$ risultano soddisfatte le disuguaglianze

$$(13) \quad |Q_{i,m}(x, y_1,...., y_n)| \leq \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}(x)|y_j| + \psi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}(x), \qquad (i=1, 2,...., n),$$

$$(14) \quad |Q_{i,m}(x, y_1,...., y_n)| \leq (1+L) \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}(x) + \psi_i(x), \qquad (i=1, 2,...., n).$$

Inoltre, in corrispondenza ad ogni coppia di numeri interi i, m (con $i=1, 2,...., n$; $m>\overline{m}$), esiste una funzione $\chi_{i,m}(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (a, b), tale che, per ogni x di tale intervallo e per ogni coppia di *n-ple* di numeri reali $(t_1, t_2,...., t_n)$, $(z_1, z_2,...., z_n)$ risulta

$$|\,Q_{i,m}(x, t_1, t_2, ..., t_n)-Q_{i,m}(x, z_1, z_2,...., z_n)\,|\leqslant$$
$$\leqslant \chi_{i,m}(x)\ \{\,|\,t_1-z_1\,|+|\,t_2-z_2\,|+....+|\,t_n-z_n\,|\,\},\qquad (i=1, 2,...., n).$$

Pertanto, per noti teoremi sulle equazioni differenziali, il sistema

$$(15)\qquad \begin{cases} y_1(x)=k_1+\int\limits_a^x Q_{1,m}(x, y_1,...., y_n)\,dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x)=k_n+\int\limits_a^x Q_{n,m}(x, y_1,...., y_n)\,dx \end{cases}$$

ammette su tutto (a, b) almeno una soluzione $y_i=y_i(x)$, $(i=1, 2,...., n)$, con $y_i(x)$ assolutamente continua, la quale varia con continuità al variare in modo continuo di $k_1, k_2,...., k_n$.

In virtù delle (14), posto

$$H_i=(1+L)\int\limits_a^b\Big(\sum_{j=1}^n\gamma_{i,j}(x)\Big)dx+\int\limits_a^b\psi_i(x)\,dx,\qquad (i=1, 2,...., n),$$

per $\quad k_i\geqslant b_i+H_i+1,\quad$ risulta $\quad y_i(a_i)>b_i,\qquad (i=1, 2,...., n),$

e per $\quad k_i\leqslant b_i-H_i-1,\quad$ risulta $\quad y_i(a_i)<b_i,\qquad (i=1, 2,...., n).$

Quindi, considerato il cubo ad n dimensioni dello spazio $(k_1, k_2,...., k_n)$ limitato dagli iperpiani

$$k_i=b_i+H_i+1,\quad k_i=b_i-H_i-1,\qquad (i=1, 2,...., n),$$

per una semplice osservazione di cui abbiamo già fatto uso [8], esiste almeno una *n-pla* $\overline{k}_1, \overline{k}_2,...., \overline{k}_n$, con $b_i-H_i-1<\overline{k}_i<b_i+H_i+1$, $(i=1, 2,...., n)$, tale che la soluzione $y_i=y_{i,m}(x)$, $(i=1, 2,...., n)$ del sistema (15) corrispondente ai valori iniziali $k_i=\overline{k}_i$, $(i=1, 2,...., n)$ soddisfa alle condizioni

$$y_{1,m}(a_1)=b_1,\quad y_{2,m}(a_2)=b_2,....,\quad y_{n,m}(a_n)=b_n.$$

---

(8) Rileviamo per il seguito che la nostra osservazione (cfr. luogo cit. per primo in (3) n. 8, *a*)) è valida, più generalmente, anche per un parallelepipedo dello spazio ad n dimensioni. Ciò può dedursi immediatamente con un semplice cambiamento di coordinate dal risultato di C. MIRANDA: [*Un'osservazione su un teorema di Brouwer*. Boll. Unione Matematica Italiana. A. III (1940-41), pp. 5-7], cui avevamo avuto occasione di comunicare la nostra osservazione.

Tenute presenti le (13), in base alle considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione risulta per $m > \overline{m}$ in tutto (a, b)

$$|y_{i,m}(x)| \leq L, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

e non rimane che proseguire in modo perfettamente analogo al luogo citato.

3. - Due casi particolari del teorema del n. 2.

a) In base a quanto si è visto nel c) del n. 1, *il teorema precedente è ancora valido quando si sostituiscano alle condizioni* (8) *le seguenti più semplici*

$$\sum_{r=1}^{n} \int_a^b \gamma_{r,s}(x)\, dx < 1, \qquad (s=1, 2, \ldots, n).$$

b) Per il d) del n. 1 *il teorema precedente continua a sussistere anche quando si sostituiscano alle condizioni* (8) *le seguenti*

$$\sum_{s=1}^{n} \int_a^b \gamma_{r,s}(x)\, dx < 1, \qquad (r=1, 2, \ldots, n).$$

c) OSSERVAZIONE. - In entrambi i casi particolari segnalati nell'*a*) e nel *b*) del presente numero è contenuto come caso particolare il teorema di CACCIOPPOLI citato in ([4]). Ciò si verifica immediatamente ripetendo l'osservazione fatta alla fine del n. 4 di M. I, prendendo $\sigma < \dfrac{1}{n(b-a)}$.

d) ESEMPIO I. - Sia $n=2$, e si considerino le funzioni $f_1(x, y_1, y_2)$, $f_2(x, y_1, y_2)$ con

$$f_1 \equiv \sqrt[4]{\frac{y_1^4}{x} + \frac{y_2^4}{x^3} + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}{x^2}}, \quad f_2 \equiv \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + x^{-1}} \quad \text{per} \quad 0 < x \leq \frac{1}{16},$$

$$f_1(0, y_1, y_2) = f_2(0, y_1, y_2) = 0.$$

In base al teorema del n. 2 il sistema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

ammette in $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ almeno una soluzione $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, con $y_1(0) = b_1$, $y_2\left(\frac{1}{16}\right) = b_2$, ove b_1 e b_2 sono due numeri reali qualunque. Infatti è

$$|f_1(x, y_1, y_2)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x}} |y_1| + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} |y_2| + \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$|f_2(x, y_1, y_2)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Big\{ |y_1| + |y_2| \Big\} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}},$$

e siccome

$$\int_0^{\frac{1}{16}} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{6}, \qquad \int_0^{\frac{1}{16}} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = 2,$$

risulta $a_{1,1}^{(0)} < 0$, $a_{2,2}^{(1)} > 0$, come si è visto nell'esempio indicato al n. 1, f). D'altra parte non sono verificate nè le condizioni dell'a) del presente numero, nè quelle del b), e quindi non è applicabile il teorema di CACCIOPPOLI.

ESEMPIO II. - Sia $n=3$ e si considerino le funzioni $f_i(x, y_1, y_2, y_3)$, $(i=1, 2, 3)$ definite nel seguente modo:

$$f_1 \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}; \quad f_2 \equiv \sqrt[3]{\frac{y_1^3+y_2^3+y_3^3}{x}}; \quad f_3 \equiv \sqrt[4]{y_1^4+y_2^4+y_3^4} + \frac{1}{x[\lg x]^{1+\sigma}}, \text{ con } \sigma > 0,$$

nell' intervallo $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$; $f_i(0, y_1, y_2, y_3) = 0$, $(i=1,2,3)$.

Essendo

$$\int_0^{\frac{1}{27}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6},$$

si verifica immediatamente che nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{27}\right)$ sono verificate sia le condizioni dell'a) del presente numero, sia quelle del b), ma non sono soddisfatte le condizioni del teorema di CACCIOPPOLI.

4. - Teorema (per i sistemi di ordine qualunque).

Siano $f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(\nu_n-1)})$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ *n funzioni definite per ogni x di* (a, b) *e per ogni* $(\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n)$*-pla di numeri reali,* $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(\nu_n-1)}$, *tali che ciascuna di esse, per ogni x fissato, risulti continua nel complesso delle altre variabili, mentre, per ogni* $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)$*-pla* $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(\nu_n-1)}$ *fissata, risulti quasi continua rispetto a x. Si supponga che esistano* $n(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n+1)$ *funzioni non negative* $\gamma_{i,r,s}(x)$, $(i, r=1, 2, \ldots, n;\ s=0, 1, \ldots, \nu_r-1)$, $\psi_i(x)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ *integrabili sull'intervallo* (a, b) *e tali che, posto*

$$\Gamma_{i,r,s} = \int_a^b \gamma_{i,r,s}(x), \qquad (i, r=1, 2, \ldots, n;\ \ s=0, 1, 2, \ldots, \nu_r-1),$$

$$c_{i,r} = \Gamma_{i,r,0} \frac{(b-a)^{\nu_r-1}}{(\nu_r-1)!} + \Gamma_{i,r,1} \frac{(b-a)^{\nu_r-2}}{(\nu_r-2)!} + \ldots + \Gamma_{i,r,\nu_r-2} \frac{b-a}{1!} + \Gamma_{i,r,\nu_r-1},$$

$$c_{i,r}^{(0)} = c_{i,r}, \quad per \quad i \neq r, \qquad c_{r,r}^{(0)} = c_{r,r} - 1,$$

risulti (n. 1, *a*)

$$(16) \qquad c_{1,1}^{(0)}<0, \quad c_{2,2}^{(1)}>0, \quad c_{3,3}^{(2)}>0, \ldots, \quad c_{n,n}^{(n-1)}>0,$$

in modo che in tutto il campo

$$C_\infty^*: \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad |y_r^{(s)}|<+\infty, \qquad (r=1,2,\ldots,n;\ s=0,1,\ldots,\nu_r-1;\ y_r^{(0)}=y_r),$$

siano verificate le disuguaglianze

$$(17) \quad |f_i|\leqslant \gamma_{i,1,0}(x)\,|y_1|+\gamma_{i,1,1}(x)\,|y_1'|+\ldots+\gamma_{i,1,\nu_1-1}(x)\,|y_1^{(\nu_1-1)}|+\ldots$$
$$\ldots+\gamma_{i,n,0}(x)\,|y_n|+\gamma_{i,n,1}(x)\,|y_n'|+\ldots+\gamma_{i,n,\nu_n-1}(x)\,|y_n^{(\nu_n-1)}|+\psi_i(x),$$
$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Allora, considerato il sistema

$$(18) \quad \left\{ y_i^{(\nu_i-1)}(x)=y_i^{(\nu_i-1)}(a)+\int_a^x f_i(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(\nu_1-1)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(\nu_n-1)})\,dx, \right.$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

e assegnati, per ogni funzione $y_i(x)$, μ_i *(con* $\mu_i\leqslant\nu_i$*) punti dell'intervallo* (a,b) $a_{i,1}, a_{i,2},\ldots, a_{i,\mu_i}$, μ_i *numeri interi positivi* $\omega_{i,1},\omega_{i,2},\ldots,\omega_{i,\mu_i}$ *con*

$$\omega_{i,1}+\omega_{i,2}+\ldots+\omega_{i,\mu_i}=\nu_i,$$

e ν_i *valori arbitrari* $\beta_{i,j,h}$, $(j=1,2,\ldots,\mu_i;\ h=0,1,\ldots,\omega_{i,j}-1)$, ***esiste almeno una soluzione del sistema*** (18), $y=y_i(x)$, $(a\leqslant x\leqslant b)$, $(i=1,2,\ldots,n)$, *con* $y_i(x)$ *assolutamente continua insieme con le proprie derivate dei primi* ν_i-1 *ordini e tale che risulta*

$$y_i(a_{i,j})=\beta_{i,j,0}, \quad y_i'(a_{i,j})=\beta_{i,j,1},\ldots, \quad y_i^{(\omega_{j,i}-1)}(a_{i,j})=\beta_{i,j,\omega_{i,j}-1},$$
$$(i=1,2,\ldots,n;\quad j=1,2,\ldots\mu_i).$$

La dimostrazione si sviluppa senza difficoltà tenendo presente quella del n. 2 del presente lavoro e quella del n. 1 di M. III. Ci limitiamo ai seguenti cenni:

1) Si può supporre per semplicità che i valori prefissati $\beta_{i,j,h}$ siano tutti nulli ([9]).

2) Se $y_i=Y_i(x)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ è una soluzione del sistema (18), ove si suppone che le funzioni f_i soddisfino alle disuguaglianze che si deducono dalla (17) sostituendovi a $\psi_i(x)$ la somma $\psi_i(x)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=0}^{\nu_r-1}\gamma_{i,r,s}(x)$, e se, in base alla convenzione fatta in 1), è:

$$Y_i^{(h)}(a_{i,j})=0, \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\mu_i;\ h=0,1,\ldots,\omega_{i,j}-1),$$

indicato con K_r il massimo modulo di $Y_r^{(\nu_r-1)}(x)$ nell'intervallo (a,b), analoga-

---

([9]) A questo caso ci si può sempre ridurre con un cambiamento delle $y_i(x)$ in base al quale nelle (17) le $\gamma_{i,r,s}(x)$ restano inalterate, mentre variano soltanto le $\psi_i(x)$.

mente a quanto si è visto in M. III e per note formule di calcolo differenziale [10] risulta in tutto (a, b)

$$(19)\qquad |Y_r^{(t)}(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{\nu_r-t-1}}{(\nu_r-t-1)!} K_r, \quad (r=1, 2, \ldots, n; \quad t=0, 1, \ldots, \nu_r-2; \quad Y_r^{(0)}=Y_r).$$

In modo analogo al n. 2 si ha ora da considerare il sistema di disuguaglianze algebriche

$$\{ K_i \leqslant c_{i,1} K_1 + c_{i,2} K_2 + \ldots + c_{i,n} K_n + \lambda_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ove $\lambda_i = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=0}^{\nu_r-1} \Gamma_{i,r,s} + \int_a^b \psi_i(x)dx$, e tenuto conto delle (16) si conclude, in base al n. 1, *b*), che nell'intervallo (a, b) i massimi moduli delle

$$Y_1^{(\nu_1-1)}(x), \; Y_2^{(\nu_2-1)}(x), \ldots, \; Y_n^{(\nu_n-1)}(x)$$

si mantengono limitati. Quindi per le (19) esiste un numero fisso $L'>0$, tale che, in tutto (a, b), le $Y_i(x)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ e le loro derivate dei primi ν_i-1 ordini rispettivamente risultano in modulo inferiori a L'.

3) Si procede poi in modo perfettamente analogo al n. 2, considerando il cubo a $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n$ dimensioni $\Delta' \equiv [\,|y_i^{(r)}| \leqslant L'+1;\; i=1, 2, \ldots, n;\; r=0, 1, \ldots, \nu_i-1;\; (y_i^{(0)}=y_i)]$, e tenendo conto infine di quanto abbiamo osservato in [8].

5. - Due casi particolari del teorema n. 4.

Analogamente a quanto si è visto al n. 3, in base alle osservazioni *c*) e *d*) del n. 1, *il teorema del* n. 4 *continua a essere valido quando si sostituiscano alle condizioni* (16) *o le seguenti*

$$(20)\qquad \int_a^b \left[\sum_{s=0}^{\nu_r-1} \frac{(b-a)^{\nu_r-s-1}}{(\nu_r-s-1)!} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,r,s}(x) \right] dx < 1, \qquad (r=1, 2, \ldots, n),$$

oppure le seguenti

$$(21)\qquad \int_a^b \left[\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=0}^{\nu_r-1} \frac{(b-a)^{\nu_r-s-1}}{(\nu_r-s-1)!} \gamma_{i,r,s}(x) \right] dx < 1, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

OSSERVAZIONE. - Se il sistema (18) si riduce a una sola equazione, la (17) si riduce alla (4) del n. 1 di M. III, mentre sia le (16), sia le (20), sia le (21) si riducono alle (3) del luogo ora citato.

Pertanto il teorema del n. 4 e i suoi due casi particolari segnalati nel presente numero contengono ciascuno come caso particolare il teorema del n. 1 di M. III.

([10]) Cfr. per esempio S. CINQUINI: *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VI (1937), pp. 191-210, nota (7).