

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LADISLAS FEJES

**Sur un théorème concernant l'approximation des courbes
par des suites de polygones**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 9, n° 2
(1940), p. 143-145

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_2_143_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT L'APPROXIMATION DES COURBES PAR DES SUITES DE POLYGONES

par LADISLAS FEJES (Budapest).

Soient K une courbe convexe fermée et P un polygone quelconque situés dans le même plan. Considérons l'ensemble des points situés dans l'une quelconque des deux régions limitées par P et K sans appartenir à l'autre ⁽¹⁾. Cet ensemble possède certainement une aire que nous appellerons *déviatio*n ⁽²⁾ entre P et K . Remarquons tout d'abord que celle-ci ne peut s'annuler que dans le cas où P et K coïncident.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME: *On peut construire pour chaque courbe convexe fermée K ayant l'aire T une suite de polygones $P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$ de 3, 4, ..., n, \dots côtés telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \tau_n \leq \frac{\pi^2}{4} T$$

τ_n étant la déviation entre P_n et K .

L'égalité sera atteinte dans le cas d'une ellipse quelconque.

Faisons tout d'abord une remarque qui nous sera utile dans la démonstration. Soient $y=f(x)$ un arc de courbe convexe défini dans l'intervalle (a, b) et $y=P(x)$ une ligne droite quelconque. Il est aisé de voir que l'intégrale $\int_a^b |f(x) - P(x)| dx$ qui peut être considéré comme la déviation entre $f(x)$ et $P(x)$ atteindra son minimum pour la ligne $y=\bar{P}(x)$ qui coïncide avec $y=f(x)$ dans les points dont les abscisses ξ', ξ'' sont telles que $(\xi' - a) = \frac{1}{2} (\xi'' - \xi') = (b - \xi'')$ et on aura pour un

⁽¹⁾ L'ensemble considéré peut être représenté par la somme: $\overline{\mathbf{D}\mathbf{K}} + \overline{\mathbf{D}\mathbf{K}}$ en désignant par \mathbf{D}, \mathbf{K} et $\overline{\mathbf{D}}, \overline{\mathbf{K}}$ l'ensemble des points situés dans P et K respectivement les complémentaires de celles-ci. C'est M. D. KÖNIG qui m'a donné l'éveil de la définition simple donnée dans le texte.

⁽²⁾ L. FEJES: *Poliéderekre vonatkozó szélsőérték-feladatok.* (Matematikai és Fizikai Lapok, XLV (1938), 191-199). Voir l'extrait allemand.

arc de courbe $y=f(x)$ situé au dessus de l'intervalle (a, b)

$$\int_a^b |f(x) - \bar{P}(x)| dx = \int_{\xi_i'}^{\xi_i''} f(x) dx - \int_a^{\xi_i'} f(x) dx - \int_{\xi_i''}^b f(x) dx = 2 \int_{\xi_i'}^{\xi_i''} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

Posons maintenant $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ et considérons les valeurs ξ_i', ξ_i'' satisfaisant aux égalités $(\xi_i' - x_i) = \frac{1}{2} (\xi_i'' - \xi_i') = (x_{i+1} - \xi_i')$. La ligne brisée de n côtes $P_n(x)$ qui coïncide avec $f(x)$ dans les points ayant pour abscisses ξ_i', ξ_i'' ($i=1, 2, \dots, n$) possède une déviation par rapport à $f(x)$ telle que

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx \leq 2 \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i'}^{\xi_i''} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

Considérons d'ailleurs parmi tous les polygones de n côtés celui qui a la plus petite déviation par rapport à un cercle C donné. Il est aisé de voir que c'est un polygone régulier concentrique au cercle C la portion de son périmètre extérieure à C ayant même longueur que la portion intérieure.

La démonstration de notre théorème ne fera après ces remarques préliminaires aucune difficulté ⁽³⁾. Désignons par MN la plus grande corde de la courbe K et décrivons autour de MN comme diamètre un cercle C ayant pour centre O . Construisons le polygone $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ci-dessus considéré qui a la plus petite déviation par rapport à C et menons les perpendiculaires sur MN des points $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ en désignant par A_i et B_i les points d'intersection de $Q_i Q_{i+1}$ et C . Soient A_i' et B_i' les pieds de ces perpendiculaires qui coupent la courbe K en A_i'', B_i'' et soient m et n les deux droites perpendiculaires à MN , situées de part et d'autre du polygone $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ et ayant la plus petite distance entre elles.

Considérons maintenant le polygone dont les côtés coïncident avec les droites $A_i'' B_i''$ et particulièrement la partie P de ce polygone comprise entre les parallèles m et n . C'est un polygone ayant au plus $n+2$ côtés. Or une considération simple nous assure — tenant compte de la remarque faite ci-dessus — que la déviation entre P et K ne peut être plus grande que $2 \sum_{i=1}^n T(A_i B_i) - T$, en désignant par $T(A_i B_i)$ l'aire de la région bornée par $\overline{A_i' A_i''} \overline{A_i'' B_i''} \overline{B_i'' B_i'} \overline{B_i' A_i'}$.

⁽³⁾ Les raisonnements suivants ont été empruntés à un travail de M. E. SAS: *Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen* (Compositio Mathematica, 6 (1939), 468) où il démontre qu'on peut inscrire dans chaque courbe convexe fermée ayant l'aire T un polygone de n côtés dont l'aire t_n est $t_n \geq \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T$. On peut déduire avec un raisonnement analogue l'inégalité $T_n \leq \frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2} T$ se comportant au polygone circonscrit. (L. FEJES: *Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe*. Compositio Mathematica 7 (1940)).

Soient α_i et β_i les angles comptés avec un signe à partir de OM jusqu'aux demi-droites OA_i respectivement OB_i et posons $\beta_i - \alpha_i = \varphi_n$, $\alpha_i = a + (i-1) \frac{2\pi}{n}$; cela met en évidence que $\sum_{i=1}^n T(A_i B_i) = T(a)$ ne dépend que de a . Attribuons à α diverses valeurs et considérons la moyenne $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(a) da$ de $T(a)$. On a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(a) da = \frac{n\varphi_n}{2\pi} T$, ce qui montre que parmi les polygones P ci-dessus considérés il y a certainement un dont la déviation τ_{n+2} par rapport à K est telle que $\tau_{n+2} \leq \frac{n\varphi_n - \pi}{\pi} T$, dont il résulte immédiatement (4) notre théorème.

On en tire en appliquant l'inégalité isopérimétrique le

COROLLAIRE 1. - *Étant donnée une courbe convexe fermée dont le périmètre est L , il existe une suite de polygones de n côtés avec des déviations τ_n telles que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \tau_n \leq \frac{\pi}{16} L^2$$

et l'égalité ne peut être atteinte que dans le cas d'un cercle.

On arrivera enfin d'après ce que précède sans difficulté au

COROLLAIRE 2. - *On peut construire pour chaque arc de courbe convexe (ou concave) $y=f(x)$, défini dans l'intervalle (a, b) et ayant la longueur L , une suite de lignes brisées de 1, 2, ..., n , ... côtés et ayant pour équations $y=P_1(x)$, $y=P_2(x)$, ..., $y=P_n(x)$, ... telles que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx \leq \frac{\pi}{32} L^2$$

l'égalité n'étant atteinte que pour un demi-cercle.

(4) On a $2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ et par conséquent $\varphi_n = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{n} + \frac{1}{4} \frac{\pi^3}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$.