ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

LJUBOMIR TSCHAKALOFF

**Trigonometrische Polynome mit einer Minimumeigenschaft**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 9, nº 1 (1940), p. 13-26

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_1_13_0>

# TRIGONOMETRISCHE POLYNOME MIT EINER MINIMUMEIGENSCHAFT

von LJUBOMIR TSCHAKALOFF (L. ČAKALOV - Sofia).

Bei seinem elementaren Beweis des Primzahlsatsez hat LANDAU [1] die Frage nach der günstigsten Abshätzung des Exponenten im Restgliede auf folgendes Minimumproblem über trigonometrische Polynome zurückgeführt. Man betrachte die Menge $C_n$ der positiv-definiten Kosinuspolynome

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + \ldots + a_n \cos n\varphi \tag{1}$$

$n$-ter oder niederer Ordnung, deren Koeffizienten den Ungleichungen

$$a_0 \geqq 0, \quad a_1 \geqq 0, \ldots, \quad a_n \geqq 0; \qquad a_1 > a_0$$

genügen. Welches ist die *genaue* untere Grenze $P_n$ des Ausdrucks $\frac{g(0)}{a_1 - a_0}$, wenn $g(\varphi)$ die Polynome dieser Menge durchläuft? Vor einigen Jahren kam LANDAU [2] auf dasselbe Problem zurück, indem er unabhängig von mir [3] auf wenigen Zeilen zeigte, dass $P_2 = 7$ ist und $P_3 = P_4 = P_5 = 6$ ist. Zum Schluss seiner Arbeit bemerkte er dabei ausdrücklich: « Die Schwierigkeit fängt also erst bei $n = 6$ an.... Die Bestimmung von $P_6$ lässt sich in endlicher Zeit erzwingen. Vielleicht gelingt sie einem Leser auf wenigen Zeilen oder wenigen Seiten ».

Da ich in einer 1923 publizierten, bulgarisch geschriebenen Arbeit [4] die erwähnten Landauschen Ergebnisse früher auf demselben Wege gefunden und ausserdem die schwierigeren Fälle $n = 6$, 7, 8, 9 erledigt habe, erachte ich es

---

(1) Vgl. E. LANDAU: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* Leipzig 1909, Bd. I, S. 245-258 und Bd. II, S. 891-893.

(2) E. LANDAU: *Eine Frage über trigonometrische Polynome.* Diese Annali, Serie II, Vol. II (1933-XI), pp. 209-210.

(3) Vgl. E. LANDAU: *Nachtrag zu meiner Arbeit « Eine Frage über trigonometrische Polynome ».* Diese Annali, Serie II, Vol. V (1936-XIV), p. 141.

(4) L. TSCHAKALOFF: *Trigonometrische Polynome mit einer Minimumeigenschaft* (Bulgarisch). Jahrbuch der Universität Sofia, Phys.-Math. Fakultät, Bd. XIX (1923), S. 355-387.

nicht für überflüssig, hier diese meine Ergebnisse einem breiteren Leserkreis zugänglich zu machen und zugleich ein Desideratum meines unvergesslichen Lehrers zu erfüllen.

## § 1.

Unter einem *zulässigen* Kosinuspolynom $n$-ter Ordnung verstehe ich ein trigonometrisches Polynom der Gestalt (1) mit nichtnegativen reellen Koeffizienten $a_k$, das den Bedingungen $g(\varphi) \geqq 0$ für jedes reelle $\varphi$ und $a_1 > a_0$ genügt. Da (wegen $a_1 > a_0$) ein solches Polynom nicht identisch verschwinden kann, so ist $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\varphi) d\varphi$ stets positiv. Es sei $C_n$ die Menge aller zulässigen Kosinuspolynome $n$-ter Ordnung. Offenbar ist $C_n$ eine Teilmenge von $C_{n+1}$ und ausserdem ist die Menge $C_1$ leer, da für $n=1$ die Ungleichung $g(\pi) = a_0 - a_1 \geqq 0$ mit $a_0 < a_1$ unverträglich ist.

Unsere Aufgabe besteht darin, bei einem gegebenen $n \geqq 2$ die genaue untere Grenze $P_n$ des Quotienten

$$\frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{a_1 - a_0} \tag{2}$$

effektiv zu bestimmen, wenn $g(\varphi)$ die Polynome der Menge $C_n$ durchläuft.

Ich will zunächst zeigen, dass die untere Grenze $P_n$ wirklich erreicht wird für ein passendes Kosinuspolynom der Menge $C_n$, d. h. dass $P_n$ das Minimum des Ausdrucks (2) ist. Dieser Ausdruck bleibt nämlich unverändert, wenn man $g(\varphi)$ durch $\lambda g(\varphi)$ ersetzt, unter $\lambda$ eine beliebige positive Konstante verstanden. Da aber mit $g(\varphi)$ auch $\lambda g(\varphi)$ der Menge $C_n$ angehört, so kann man die Polynome dieser Menge so normieren, dass stets $a_1 - a_0 = 1$ ist, was damit gleichbedeutend ist, $g(\varphi)$ durch $\frac{g(\varphi)}{a_1 - a_0}$ zu ersetzen. Wir dürfen uns daher auf « normierte » Polynome der Menge $C_n$ beschränken, indem wir nur diese zur Konkurrenz zulassen. Einem beliebigen normierten Polynom (1) dieser Menge ordnen wir den Punkt $A(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes zu; die so entstehende Punktmenge wollen wir mit $M_n$ bezeichnen. Konvergiert nun die Punktfolge $A_1, A_2, A_3, \dots$, deren Glieder der Menge $M_n$ angehören, gegen einen Grenzpunkt $C(c_0, c_1, \dots, c_n)$, so konvergiert die entsprechende Polynomenfolge $g_1(\varphi), g_2(\varphi), \dots$ gegen das normierte Grenzpolynom

$$G(\varphi) = c_0 + c_1 \cos \varphi + \dots + c_n \cos n\varphi,$$

das offenbar der Menge $C_n$ angehört. Der Punkt $C$ gehört also ebenfalls zur Punktmenge $M_n$, d. h. diese Menge ist abgeschlossen. Die beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $M_n$, die dem Würfel

$$0 \leqq a_0 \leqq 8, \quad 0 \leqq a_1 \leqq 8, \ldots, \quad 0 \leqq a_n \leqq 8$$

angehört, ist dabei nicht leer, da

$$2(1+\cos\varphi)^2 = 3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi$$

ein zulässiges normiertes Polynom darstellt; folglich erreicht die stetige Funktion $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ ihre genaue untere Grenze $P_n$, wenn $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ die Punkte dieser Teilmenge durchläuft, und dieses Minimum ist gewiss $\leqq 3+4+1=8$. $P_n$ ist zugleich das Minimum des Ausdrucks (2) für alle zulässigen Kosinuspolynome, da die Koordinatensumme $\sum_0^n x_k$ eines beliebigen Punktes $X$ von $M_n$, der ausserhalb des obigen Würfels liegt, stets grösser als 8 ist.

## § 2.

Wir beginnen mit der Bestimmung von $P_6$. Es sei

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + \ldots + a_6 \cos 6\varphi$$

ein zulässiges Polynom 6-ter Ordnung. Durch die Substitution $x = \cos\varphi$ geht $g(\varphi)$ in das algebraische Polynom

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_6 x^6$$

über, wobei

$$a_0 = b_0 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{8} b_4 + \frac{5}{16} b_6, \quad a_1 = b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5,$$

$$a_4 = \frac{1}{8} b_4 + \frac{3}{16} b_6, \quad a_5 = \frac{1}{16} b_5, \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_6 = b_0 + b_1 + \ldots + b_6.$$

Das so gebildete algebraische Polynom $f(x)$ heisse zulassig, wenn das ursprüngliche Kosinuspolynom $g(\varphi)$ zulässig ist. Offenbar ist das reelle Polynom $f(x)$ nur dann zulässig, wenn es keine Nullstelle ungerader Ordnung hat, die im Intervall $-1 < x < 1$ liegt. (Das Umgekehrte ist natürlich nicht richtig).

Bedeutet nun $\lambda$ eine untere Grenze des Quotienten $\frac{g(0)}{a_1 - a_0}$ für alle zulässigen Polynome 6-ter Ordnung, so besteht die Ungleichung

$$\text{(3)} \qquad \frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6}{b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5 - \left(b_0 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{8} b_4 + \frac{5}{16} b_6\right)} \geqq \lambda$$

oder

$$(4) \qquad (1+\lambda)b_0+(1-\lambda)b_1+\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)b_2+\left(1-\frac{3}{4}\lambda\right)b_3+\left(1+\frac{3}{8}\lambda\right)b_4+$$
$$+\left(1-\frac{5}{8}\lambda\right)b_5+\left(1+\frac{5}{16}\lambda\right)b_6\geqq 0.$$

Da die linke Seite der letzten Ungleichung linear von den Koeffizienten $b_k$ abhängt, könnte man versuchen, sie in der Form

$$(5) \qquad Af(\xi)+Bf(\eta)+\sum_0^6 C_k a_k$$

darzustellen, wobei $A$, $B$, $\xi$, $\eta$, $C_0$, $C_1$,.... $C_6$ gewisse von den Koeffizienten $b_k$ (also von der Wahl von $f(x)$) unabhängige Zahlen bedeuten. Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass $A$, $B$, $C_k\geqq 0$ sind und dass $\xi$ und $\eta$ dem Intervall $(-1, 1)$ angehören, so ist die Summe (5) für jedes zulässige Polynom $f(x)$ nichtnegativ und die Ungleichung (3) von selbst erfüllt. Wir wollen statt (5) den einfacheren Ausdruck

$$(6) \qquad Af(\xi)+Bf(\eta)+Ca_4+Da_5$$

bilden und die sieben Zahlen $A$, $B$, $C$, $D$, $\xi$, $\eta$, $\lambda$, so zu bestimmen suchen, dass (6) identisch gleich der linken Seite von (4) sei, wenn die $b_k$ als unbestimmte Grössen betrachtet werden. Man gelangt auf diese Weise, nachdem man $a_4$ und $a_5$ durch die $b_k$ ausdrückt, zum folgenden Gleichungssystem zur Bestimmung der erwähnten 7 Unbekannten:

$$(7) \qquad \begin{cases} A+B=1+\lambda \\ A\xi+B\eta=1-\lambda \\ A\xi^2+B\eta^2=1+\frac{1}{2}\lambda \\ A\xi^3+B\eta^3=1-\frac{3}{4}\lambda \\ A\xi^4+B\eta^4+\frac{1}{8}C=1+\frac{3}{8}\lambda \\ A\xi^5+B\eta^5+\frac{1}{16}D=1-\frac{5}{8}\lambda \\ A\xi^6+B\eta^6+\frac{3}{16}C=1+\frac{5}{16}\lambda. \end{cases}$$

Unsere weiteren Ausführungen bestehen im folgenden. Wir zeigen zunächst, dass das System (7) eine Lösung besitzt, für welche $A$, $B$, $C$, $D$, $\lambda$ positiv sind und ausserdem $\xi$ und $\eta$ zwischen $-1$ und $+1$ liegen. Daraus folgt, wie schon erwähnt, dass $\lambda$ eine untere Grenze des Quotienten (3) ist für alle zulässigen Polynome 6-ter Ordnung. Wir zeigen ferner, dass es ein zulässiges Polynom $f(x)$

gibt, welches den Bedingungen

$$f(\xi)=0, \quad f(\eta)=0, \quad a_4=0, \quad a_5=0$$

genügt, so dass für dieses Polynom das Zeichen $\geqq$ in (3) durch $=$ ersetzt werden muss. Dadurch wird es bewiesen sein, dass $\lambda$ die genaue untere Grenze des Quotienten (3) ist, also $\lambda=P_6$.

## § 3. - Auflösung des Systems (7).

Ich setze der Kürze halber $u=\xi+\eta$, $v=\xi\eta$, so dass identisch

$$(x-\xi)(x-\eta)(x-1)=x^3-(u+1)x^2+(u+v)x-v,$$

und addiere die ersten vier Gleichungen (7), nachdem ich sie bzw. mit $-v$, $u+v$, $-u-1$, 1 multipliziere. Es kommt heraus

$$0=\lambda\left(-u-v-v-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right), \quad \text{d. h. (wegen } \lambda>0)$$

$$\frac{3}{2}u+2v+\frac{5}{4}=0. \tag{8}$$

Die Anwendung desselben Verfahrens auf je vier aufeinanderfolgende Gleichungen des Systems (7) liefert ferner

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{8}C=\lambda\left(\frac{5}{4}u+\frac{3}{2}v+\frac{9}{8}\right)\\ &-\frac{1}{8}(u+1)C+\frac{1}{16}D=\lambda\left(-\frac{9}{8}u-\frac{5}{4}v-1\right)\\ &\frac{1}{8}\left(u+v+\frac{3}{2}\right)C-\frac{1}{16}(u+1)D=\lambda\left(u+\frac{9}{8}v+\frac{15}{16}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt nach Elimination von $C$, $D$ und $\lambda$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 10u+12v+9 \\ -u-1 & 1 & -9u-10v-8 \\ u+v+\frac{3}{2} & -u-1 & 8u+9v+\frac{15}{2} \end{vmatrix}=0$$

oder

$$10u^3+12u^2v+10u^2-8uv-12v^2-5u-16v-5=0. \tag{10}$$

Aus (8) und (10) erhält man schliesslich für $u$ die resolvente Gleichung

$$16u^3+28u^2+12u+5=0, \tag{11}$$

die nur eine reelle Wurzel hat.

Um $\lambda$ zu bestimmen, eliminieren wir $A$ und $B$ aus den ersten drei Gleichungen (7), indem wir sie der Reihe nach mit $v$, $-u$, 1 multiplizieren und dann addieren. Man erhält

$$0=v-u+1+\lambda\left(u+v+\frac{1}{2}\right), \tag{12}$$

also mit Rücksicht auf (8),

$$\lambda=\frac{u-v-1}{u+v+\frac{1}{2}}=\frac{14u-3}{2u-1}.$$

Setzen wir $\lambda=6-t$, so lassen sich leicht $u$, $v$ rational durch $t$ ausdrücken:

$$u=\frac{t-3}{2t+2}, \quad v=\frac{1-2t}{2t+2}, \tag{13}$$

wobei $t$ eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$5t^3-11t^2+15t-1=0 \tag{14}$$

bedeutet.

Die Auflösung des Systems (7) reduziert sich also im wesentlichen auf diejenige der kubischen Gleichung (14), wobei natürlich nur ihre reelle Wurzel

$$t=0{,}07016147038\ldots. \tag{15}$$

in Betracht kommt. Die entsprechenden Näherungswerte von $\lambda$, $u$ und $v$ sind nach (12) und (13)

$$\lambda=6-t=5{,}92983852961, \quad u=-1{,}3688768526, \quad v=+0{,}4016576394.$$

Die ersten zwei Gleichungen des Systems (9) liefern für $C$ und $D$, mit Rücksiht auf (12) und (13), die Werte

$$C=\frac{2t(6-t)}{t+1}, \quad D=\frac{31t^2-60t+17}{4(t+1)}, \tag{16}$$

die offenbar positiv sind. $\xi$ und $\eta$ sind Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2-ux+v=0$, d. h.

$$(2t+2)x^2+(3-t)x+1-2t=0 \tag{17}$$

mit den Näherungswerten

$$\xi=-0{,}9428921359, \quad \eta=-0{,}4259847167.$$

Schliesslich bestimmt man $A$ und $B$ etwa aus den ersten zwei Gleichungen des Systems (7); die Werte von $A$ und $B$ sind reell und positiv wegen

$$A+B=1+\lambda>0$$

und

$$AB(\xi-\eta)^2=(A+B)(A\xi^2+B\eta^2)-(A\xi+B\eta)^2=\frac{1}{2}\lambda(7-\lambda)>0.$$

Man verifiziert umgekehrt leicht, dass die so bestimmten Werte von $A$, $B$, $C$, $D$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$ in der Tat eine reelle Lösung des Systems (7) liefern. Da dabei $A$, $B$, $C$, $D$, $\lambda$ positiv sind, und $\xi$ und $\eta$ zwischen $-1$ und $+1$ liegen, so stellt die Zahl

$$\lambda=6-t=5{,}92983852961\ \ldots.$$

eine untere Grenze des Quotienten (3) dar.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass dieser Wert die *genaue* untere Grenze von (3) ist für alle zulässigen Polynome 6-ter Ordnung. Es genügt zu dem Zwecke zu zeigen, dass es ein zulässiges Polynom $g(\varphi)=f(x)$ gibt, das den Bedingungen

$$f(\xi)=0, \quad f(\eta)=0, \quad a_4=0 \quad a_5=0$$

genügt. Es ist klar, dass $f(x)$ die Gestalt

$$f(x)=c(x-\xi)^2(x-\eta)^2(x^2+mx+n)=c(x^2-ux+v)^2(x^2+mx+n)$$

haben muss, wobei $c$ eine beliebige positive konstante bebeuten kann. Die Koeffizienten $m$ und $n$ werden durch die Forderungen bestimmt:

$$16a_4=2b_4+3b_6=0, \quad 16a_5=b_5=0.$$

Nun ist

$$b_6=c, \quad b_5=c(m-2u), \quad b_4=c(n-2um+u^2+2v),$$

so dass $m$ und $n$ den Gleichungen

$$m-2u=0, \quad 2(n-2um+u^2+2v)+3=0$$

genügen müssen. Man findet also

$$m=2u, \quad n=3u^2-2v-\frac{3}{2}=3u^2+\frac{3}{2}u-\frac{1}{4}.$$

Wegen

$$m^2-4n=-8u^2-6u+1=\frac{-4(t^2-5t+2)}{(t+1)^2}<0$$

ist das Polynom $x^2+mx+n$ positiv definit, also

$$f(x)=c(x^2-ux+v)^2(x^2+mx+n)\geqq 0$$

für jedes reelle $x$. Nimmt man $c=32$, so geht $f(x)$ durch die Substitution $x=\cos\varphi$ in das zulässige trigonometrische Polynom über

$$g(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+a_2\cos 2\varphi+a_3\cos 3\varphi+a_6\cos 6\varphi$$

mit den positiven Koeffizienten

$$a_0 = \frac{465}{8}u^2 + \frac{33}{2}u + \frac{619}{32} > 105,$$
$$a_1 = 102u^2 + 42u + \frac{75}{2} > 171,$$
$$a_2 = 60u^2 + 39u + \frac{57}{2} > 87,$$
$$a_3 = 20u^2 + 18u + 10 > 22,$$
$$a_6 = 1.$$

Wir haben somit bewiesen, dass $P_6 = 6 - t$ ist, wenn $t$ die reelle Wurzel der kubischen Gleichung (14) bedeutet.

## § 4.

Es sei

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + \dots + a_7 \cos 7\varphi$$

ein zulässiges Polynom 7-ter Ordnung, welches durch die Substitution $x = \cos\varphi$ in das algebraische Polynom

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_7 x^7$$

übergeht, wobei

$$a_0 = b_0 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{8}b_4 + \frac{5}{16}b_6,$$
$$a_1 = b_1 + \frac{3}{4}b_3 + \frac{5}{8}b_5 + \frac{35}{64}b_7,$$
$$a_4 = \frac{1}{8}b_4 + \frac{3}{16}b_6,$$
$$a_5 = \frac{1}{16}b_5 + \frac{7}{64}b_7.$$

Ist $\lambda$ eine untere Grenze des Quotienten

$$\frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_7}{b_1 + \frac{3}{4}b_3 + \frac{5}{8}b_5 + \frac{35}{64}b_7 - b_0 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{3}{8}b_4 - \frac{5}{16}b_6}, \tag{18}$$

so besteht die Ungleichung

$$(1+\lambda)b_0 + (1-\lambda)b_1 + \left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)b_2 + \left(1-\frac{3}{4}\lambda\right)b_3 + \left(1+\frac{3}{8}\lambda\right)b_4 + \\ + \left(1-\frac{5}{8}\lambda\right)b_5 + \left(1+\frac{5}{16}\lambda\right)b_6 + \left(1-\frac{35}{64}\lambda\right)b_7 \geqq 0. \tag{19}$$

Wir wollen versuchen, der linken Seite von (19) die Form

$$Af(\xi)+Bf(\eta)+Cf(-1)+Da_4+Ea_5$$

zu geben, wobei $A, B, C, D, E$, von den Koeffizienten $b_k$ (also von $f(x)$) unabhängig sind. Dafür ist notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen bestehen

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
&A+B+C=1+\lambda\\
&A\xi+B\eta-C=1-\lambda\\
&A\xi^2+B\eta^2+C=1+\frac{1}{2}\lambda\\
&A\xi^3+B\eta^3-C=1-\frac{3}{4}\lambda\\
&A\xi^4+B\eta^4+C+\frac{1}{8}D=1+\frac{3}{8}\lambda\\
&A\xi^5+B\eta^5-C+\frac{1}{16}E=1-\frac{5}{8}\lambda\\
&A\xi^6+B\eta^6+C+\frac{3}{16}D=1+\frac{5}{16}\lambda\\
&A\xi^7+B\eta^7-C+\frac{7}{64}E=1-\frac{35}{64}\lambda.
\end{aligned}\right.$$

Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass das System (20) eine Lösung besitzt, für welche

$$A>0,\quad B>0,\quad C>0,\quad D>0,\quad E>0,\quad \lambda>0,\quad -1\leqq\xi,\quad \eta\leqq 1,$$

so kann man daraus schliessen, dass $\lambda$ eine untere Grenze des Ausdrucks (18) für alle zulässigen Polynome 7-ter Ordnung sein muss. Gibt es ausserdem ein zulässiges Polynom $g(\varphi)=f(x)$, für welches

$$f(\xi)=f(\eta)=f(-1)=a_4=a_5=0,$$

so stellt offenbar $\lambda$ die gesuchte untere Grenze $P_7$ dar.

## § 5. - Auflösung des Systems (20).

Wir setzen wieder $\xi+\eta=u$, $\xi\eta=v$, so dass identisch

$$(x-\xi)(x-\eta)(x-1)(x+1)=x^4-ux^3+(v-1)x^2+ux-v.$$

Man kann die Unbekannten $A$, $B$, $C$ und das konstante Glied 1 eliminieren, indem man die $n$-te Gleichung des Systems mit $-v$, die $(n+1)$-te mit $u$, die $(n+2)$-te mit $v-1$, die $(n+3)$-te mit $-u$, die $(n+4)$-te mit 1 multipliziert und dann addiert. So entstehen für $n=1, 2, 3, 4$ die Gleichungen

$$D=\lambda(-2u-4v-1), \tag{21}$$

$$-2uD+E=\lambda(2u+4v+2), \tag{22}$$

$$(2v+1)D-uE=\lambda(-2u-2v-1), \tag{23}$$

$$-4uD+(4v+3)E=\lambda(4u+8v+5). \tag{24}$$

Aus (21) und (23), (22) und (24), (21) und (22) folgen leicht die einfacheren Gleichungen

$$2vD-uE=2v\lambda, \tag{25}$$

$$(4v+1)E=\lambda, \tag{26}$$

$$(1-2u)D+E=\lambda. \tag{27}$$

Die Elimination von $D$, $E$ und $\lambda$ aus (21), (25) und (26) und nachher aus (21), (26) und (27) liefert, wenn man $4v=t$ setzt,

$$2u(t^2+t+1)+t(t+1)(t+2)=0 \tag{28}$$

und

$$t^2+3t+1-4u^2(t+1)-2ut(t+1)=0. \tag{29}$$

Aus (28) und (29) erhalten wir schliesslich für $t=4v$ die resolvente Gleichung

$$t^6+4t^5+4t^4-4t^3-8t^2-5t-1=0. \tag{30}$$

Merkwürdigerweise ist diese Gleichung algebraisch auflösbar, da ihre linke Seite sich in der Form
$$\left(t^3+2t^2+\frac{5}{2}\,t+\frac{1}{2}\right)^2-5\left(t^2+\frac{3}{2}\,t+\frac{1}{2}\right)^2$$
darstellen lässt. Uns interessiert ihre positive Wurzel, d. h. die reelle Wurzel der kubischen Gleichung

$$t^3+(2-\sqrt{5})t^2+\frac{1}{2}\,(5-3\sqrt{5})\,t+\frac{1}{2}\,(1-\sqrt{5})=0, \tag{31}$$

welche durch die Substitution

$$2t=(1+\sqrt{5})z+\sqrt{5}-1$$

in die einfachere Gleichung

$$z^3+z^2-\sqrt{5}+2=0 \tag{32}$$

übergeht. Man erhält ferner aus (28)

$$-2u=\frac{t^3+3t^2+2t}{t^2+t+1}=\frac{1}{z},$$

so dass $\xi$ und $\eta$ Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2+\frac{1}{2z}x+\frac{1}{8}\{(\sqrt{5}+1)z+\sqrt{5}-1\}=0$$

sind. Man findet für $z$, $t$, $u$, $\xi$, $\eta$ die Näherungswerte mit 8 Dezimalstellen

$$z=0{,}40927948, \qquad t=1{,}28026210, \qquad -u=1{,}22165909,$$
$$-\xi=0{,}38050976, \qquad -\eta=0{,}84114933.$$

Um $\lambda$ durch $u$ und $v$ auszudrücken, eliminieren wir $A$, $B$ und $C$ aus den ersten 4 Gleichungen des Systems (20). Es ergibt sich

$$0=2v-2u+2+\lambda\left(\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\right),$$

also

$$\lambda=\frac{8(v-u+1)}{1-2u}=6-4\cdot\frac{1-\sqrt{5}z}{2z+5-\sqrt{5}}=5{,}90529131\ldots \tag{33}$$

Man erhält ferner aus (21) und (26)

$$D=\lambda(-2u-4v-1)=\lambda\frac{t^2-1}{t^2+t+1}>0, \qquad E=\frac{\lambda}{t+1}>0,$$

und aus den ersten vier Gleichungen des Systems (20)

$$C=\frac{6u+8v+5}{8u+8v+8}\lambda=\frac{-t^3-2t^2+t+5}{-2t^3-2t^2+2t+8}\lambda>0,$$
$$A=\frac{\lambda}{4}\,\frac{2\eta+1}{(\eta-\xi)(1-\xi^2)}>0, \qquad B=\frac{\lambda}{4}\,\frac{2\xi+1}{(\xi-\eta)(1-\eta^2)}>0.$$

Da $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $\lambda$ positiv sind und $\xi$, $\eta$ zwischen $-1$ und $+1$ liegen, so stellt der durch (33) bestimmte Wert von $\lambda$ eine untere Grenze des Quotienten (18) dar.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass ein zulässiges Polynom $g(\varphi)=f(\cos\varphi)$ 7-ter Ordnung existiert, das den Bedingungen

$$f(\xi)=0, \qquad f(\eta)=0, \qquad f(-1)=0, \qquad a_4=0, \qquad a_5=0$$

genügt. Ein solches Polynom muss die Gestalt haben

$$f(x)=c(x+1)(x-\xi)^2(x-\eta)^2(x^2+px+q)=c(x+1)(x^2-ux+v)^2(x^2+px+q),$$

wo $c$ eine positive Konstante bedeutet. $p$ und $q$ sind durch die Bedingungen eindeutig bestimmt:

$$16a_4=2b_4+3b_6=0, \qquad 64a_5=4b_5+7b_7=0, \qquad \text{d. h.}$$
$$p(2u^2+4v-4u+3)+2q(1-2u)+2u^2-4uv-6u+4v+3=0,$$
$$4p(1-2u)+4q+4u^2+8v-4u+7=0.$$

Man verifiziert leicht, dass $p^2-4q$ negativ ist, so dass $f(x)\geqq 0$ für jedes $x$ des Intervalls $-1\leqq x\leqq +1$. Nimmt man etwa $c=1$, so lassen sich die Koeffizienten $a_k$ von $f(\cos\varphi)$ rational durch $t$ ausdrücken. Durch einfache Rechnungen kann man bestätigen, dass alle Koeffizienten des so gebildeten trigonometrischen Polynoms

$$f(\cos\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+\dots+a_7\cos 7\varphi$$

positiv sind mit Ausnahme von $a_4$ und $a_5$, die ja verschwinden müssen.

Man schliesst daraus, wie zum Schluss des § 3, dass der durch (33) bestimmte Wert von $\lambda$ gleich der genauen unteren Grenze $P_7$ ist.

## § 6.

Es sei

$$g(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+\dots+a_9\cos 9\varphi$$

ein zulässiges Polynom 9-ter Ordnung und

$$f(x)=b_0+b_1x+\dots+b_9x^9$$

das entsprechende algebraische Polynom ($f(\cos\varphi)=g(\varphi)$). Man hat

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0+\frac{1}{2}b_2+\frac{3}{8}b_4+\frac{5}{16}b_6+\frac{35}{128}b_8,\\
&a_1=b_1+\frac{3}{4}b_3+\frac{5}{8}b_5+\frac{35}{64}b_7+\frac{63}{128}b_9,\\
&a_4=\frac{1}{8}b_4+\frac{3}{16}b_6+\frac{7}{32}b_8,\\
&a_5=\frac{1}{16}b_5+\frac{7}{64}b_7+\frac{9}{64}b_9,\\
&a_8=\frac{1}{128}b_8,\qquad a_9=\frac{1}{256}b_9,\\
&a_0+a_1+\dots+a_9=b_0+b_1+\dots+b_9=g(0).
\end{aligned}$$

Man bilde den Ausdruck

$$a_0+a_1+\dots+a_9-\lambda(a_1-a_0), \tag{34}$$

wobei $\lambda$ und später $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $\xi$, $\eta$ dieselbe Bedeutung haben, wie in § 5. Der Ausdruck (34) lässt sich noch in der Form schreiben

$$\begin{aligned}
&Af(\xi)+Bf(\eta)+Cf(-1)+Da_4+Ea_5\\
&+128a_8\left(1+\frac{35}{128}\lambda-C-\frac{7}{32}D-A\xi^8-B\eta^8\right)\\
&+256a_9\left(1-\frac{63}{128}\lambda+C-\frac{9}{64}E-A\xi^9-B\eta^9\right).
\end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Zahlen

$$M=128\left(1+\frac{35}{128}\lambda-C-\frac{7}{32}D-A\xi^8-B\eta^8\right)$$

und

$$N=256\left(1-\frac{63}{128}\lambda+C-\frac{9}{64}E-A\xi^9-B\eta^9\right)$$

positiv sind. Man findet nämlich

$$M=(1+t)D>0, \qquad N=\lambda\cdot\frac{-t^3-2t^2+4t+2}{2t+1}>0.$$

Folglich ist der Ausdruck (34) in der Form darstellbar

$$Af(\xi)+Bf(\eta)+Cf(-1)+Da_4+Ea_5+Ma_8+Na_0,$$

woraus sofort erhellt, dass dieser Ausdruck für jedes zulässige Polynom nichtnegative Werte annimmt, da $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $M$, $N$ positiv sind. Aus

$$a_0+a_1+\ldots\ldots+a_9-\lambda(a_1-a_0)\geqq 0$$

schliesst man wie oben, dass $P_9=P_8=P_7=\lambda$ ist.

---

Zusammenfassend können wir die obigen Ergebnisse folgendermassen ausdrücken:

Bezeichnet man mit $P_n$ die genaue untere Grenze des Quotienten

$$\frac{a_0+a_1+\ldots\ldots+a_n}{a_1-a_0}$$

für alle zulässigen Kosinuspolynome $n$-ter Ordnung, so ist

$$P_6=6-t=5{,}92983852961\ldots$$

und

$$P_7=P_8=P_9=6-4\cdot\frac{1-\sqrt{5}z}{2z+5-\sqrt{5}}=5{,}90529131\ldots,$$

wobei $t$ und $z$ die reellen Wurzeln der kubischen Gleichungen

$$5t^3-11t^2+15t-1=0$$

und

$$z^3+z^2-\sqrt{5}+2=0$$

bedeuten.

## § 7.

Wir wollen zum Schluss noch zeigen, dass $P_{11}>5{,}792$ ist. Bedeutet

$$g(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+\ldots\ldots+a_{11}\cos 11\varphi$$

ein zulässiges Polynom 11-ter Ordnung, so folgt aus

$$\begin{aligned}0 &\leqq (2\sqrt{3}-2)g\left(\frac{\pi}{2}\right)+8g\left(\frac{2\pi}{3}\right)+8g\left(\frac{5\pi}{6}\right)+(3+\sqrt{3})g(\pi)= \\ &=(17+3\sqrt{3})a_0-(7+5\sqrt{3})a_1+(5-\sqrt{3})a_2+(5-\sqrt{3})a_3 \\ &+(-7+3\sqrt{3})a_4+(-7+3\sqrt{3})a_5+(5-\sqrt{3})a_6+(-7+3\sqrt{3})a_7 \\ &+(-7+3\sqrt{3})a_8+(5-\sqrt{3})a_9+(5-\sqrt{3})a_{10}-(7+5\sqrt{3})a_{11} \\ &\leqq(17+3\sqrt{3})a_0-(7+5\sqrt{3})a_1+(5-\sqrt{3})(a_2+a_3+\dots+a_{11}),\end{aligned}$$

wenn man durch $(5-\sqrt{3})(a_1-a_0)$ dividiert, die Ungleichung

$$\frac{a_0+a_1+\dots+a_{11}}{a_1-a_0} \geqq \frac{12+4\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{36+16\sqrt{3}}{11} > 5{,}792.$$