ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Sulle funzioni di intervallo

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 309-321

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_309_0>

SULLE FUNZIONI DI INTERVALLO

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Nel primo volume dei miei « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* » [1], ho dato (pp. 37-39), per le funzioni d'intervallo *subadditive*, una proposizione generale che ho chiamata *lemma di Darboux generalizzato*, perchè costituisce una generalizzazione di un lemma stabilito da G. DARBOUX relativamente agli *integrali* (di MENGOLI-CAUCHY) *inferiore* e *superiore*. Considerata una funzione (reale e ad un valore) $\Phi(\delta)$, definita per ogni intervallo δ contenuto in un intervallo base (a, b), e indicato con L il *confine* (*o limite*) *superiore* (finito o $+\infty$) delle somme

$$\sum_{r=1}^{n} \Phi(\delta_r),$$

corrispondenti a tutte le possibili decomposizioni dell'intervallo (a, b) in parti $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in numero finito qualsiasi, la proposizione generale a cui ho alluso si enuncia nel seguente modo:

A). *Supposto che la $\Phi(\delta)$ sia una funzione d'intervallo subadditiva, vale a dire, supposto che, per qualsiasi intervallo δ di (a, b) e per qualsiasi decomposizione di δ in due intervalli parziali δ_1 e δ_2, valga sempre la disuguaglianza*

$$\Phi(\delta) \leq \Phi(\delta_1) + \Phi(\delta_2); \tag{1}$$

preso ad arbitrio un numero $\eta > 0$, è possibile di determinarne un altro $\sigma > 0$, tale che, se ciascuno degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, in cui vien decomposto (a, b), e tutte le loro parti rendono la Φ inferiore in valore assoluto a σ, si abbia

$$\begin{cases} L - \eta < \sum_{r=1}^{n} \Phi(\delta_r) \leq L, & \text{se} \quad L < +\infty, \\ \sum_{r=1}^{n} \Phi(\delta_r) > \dfrac{1}{\eta}, & \text{se} \quad L = +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

---

[1] Bologna, Zanichelli, 1921.

Da questa proposizione segue immediatamente [2]:

B). Supposto che la $\Phi(\delta)$ *sia una funzione d'intervallo subadditiva e supposto, inoltre, che, preso ad arbitrio un numero* $\mu > 0$, *sia possibile di determinarne un altro* $\lambda > 0$, *tale che, per ogni intervallo* δ *di* (a, b), *di lunghezza* $|\delta| < \lambda$ [3], *si abbia*

$$|\Phi(\delta)| < \mu; \tag{3}$$

scelto ad arbitrio un numero $\eta > 0$, *è possibile di determinarne un altro* $\Lambda > 0$ *in modo che, per qualsiasi suddivisione di* (a, b) *in parti* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, *tutte di lunghezza minore di* Λ, *valgano le* (2).

L'enunciato B) si presta a molte applicazioni. Esso, infatti, serve utilmente nella teoria dell'integrazione, in quella della variazione totale di una funzione *continua* $f(x)$, in quella della rettificazione delle curve, ecc. ecc.

Nelle pagine che seguono mi propongo di stabilire un teorema che estende la proposizione B) in due direzioni distinte; vale a dire, che sussiste, non soltanto per le funzioni d'intervallo *subadditive* e soddisfacenti alla condizione espressa dalla (3), ma anche per quelle che chiamerò *approssimativamente subadditive* e che soddisfano ad una condizione meno restrittiva della (3). Del nuovo teorema (alla cui dimostrazione si perviene sfruttando il ragionamento fatto nei miei « *Fondamenti....* », al luogo citato, e integrandolo opportunamente) indicherò due applicazioni. Una di esse si riferisce alla teoria della variazione totale delle funzioni $f(x)$ discontinue, con discontinuità soltanto di 1ª specie e tali che $f(x)$ risulti sempre compreso fra $f(x-0)$ e $f(x+0)$; e la seconda è relativa al noto *integrale di Weierstrass*, dal WEIERSTRASS stesso introdotto nel Calcolo delle Variazioni.

1. - Sia $\Phi(\delta)$ una funzione reale e ad un valore, definita per ogni intervallo δ, contenuto in un dato intervallo base (a, b), e soddisfacente alle due seguenti condizioni:

α) la $\Phi(\delta)$ è *approssimativamente subadditiva*, vale a dire, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, si può determinarne un altro $\lambda_\varepsilon > 0$, tale che, se δ è un qualsiasi intervallo di (a, b) di lunghezza $\leq \lambda_\varepsilon$, per qualsiasi decomposizione di δ in intervalli parziali, in numero finito qualunque, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, si abbia

$$\Phi(\delta) \leq \{\Phi(\delta_1) + \Phi(\delta_2) + \ldots + \Phi(\delta_n)\} + \varepsilon|\delta|; \tag{4}$$

β) preso ad arbitrio un numero $\sigma > 0$, si può determinarne un altro $l_\sigma > 0$, in modo che, se δ è un qualsiasi intervallo di (a, b) di lunghezza $\leq l_\sigma$, per

(2) Loc. cit. in (1), p. 39.

(3) La lunghezza di un intervallo δ sarà sempre indicata con $|\delta|$.

qualsiasi decomposizione di δ in *due* intervalli parziali δ_1 e δ_2, si abbia

$$\Phi(\delta_1)+\Phi(\delta_2)<\Phi(\delta)+\sigma. \tag{5}$$

Ciò posto, dimostriamo che:

C) o esiste un numero (finito) L tale che, scelto ad arbitrio un numero $\eta_0>0$, *si possa sempre determinarne un altro* $\Delta_0>0$ *in modo che, per tutte le possibili decomposizioni di* (a, b) *in intervalli parziali, in numero finito qualunque,* $\delta_1, \delta_2,\dots, \delta_n$, *tutti minori di* Δ_0, *si abbia*

$$\left| L-\sum_{r=1}^{n}\Phi(\delta_r)\right|<\eta_0\,; \tag{6}$$

oppure, scelto ad arbitrio un numero $\eta_0>0$, *si può sempre determinarne un altro* $\Delta_0>0$ *in modo che, per tutte le possibili decomposizioni di* (a, b) *in intervalli parziali, in numero finito qualunque,* $\delta_1, \delta_2,\dots, \delta_n$, *tutti minori di* Δ_0, *si abbia*

$$\sum_{r=1}^{n}\Phi(\delta_r)>\frac{1}{\eta_0}\,. \tag{7}$$

Distinguiamo due casi:

1° CASO. - Esiste un numero $\Delta>0$ tale che le somme $\sum\Phi(\delta_r)$ corrispondenti a tutte le possibili decomposizioni di (a, b) in intervalli parziali in numero finito qualunque, tutti minori di Δ, ammettano un *confine superiore finito.*

In questo caso, sia η un numero positivo arbitrariamente scelto e, posto

$$\varepsilon=\frac{\eta}{4(b-a)}\,,$$

consideriamo il numero positivo λ_ε determinato in base alla condizione α), cui soddisfa $\Phi(\delta)$. Indichiamo con Δ_1' il minore dei due numeri Δ e λ_ε, e con S_1 il confine superiore (certamente finito) delle somme $\sum\Phi(\delta_r)$ corrispondenti a tutte le possibili decomposizioni di (a, b) in intervalli parziali (in numero finito qualunque, maggiore di 1) minori di Δ_1'.

Sia $\delta_1', \delta_2',\dots, \delta'_m$ una decomposizione di (a, b) in parti $m>1$, tutte minori di Δ_1' e tali che sia

$$S_1-\frac{\eta}{2}<s'=\sum_{r=1}^{m}\Phi(\delta_r')\leq S_1\,.$$

Poniamo

$$\sigma=\frac{\eta}{4(m-1)}\,,$$

determiniamo il numero positivo l_σ in base alla condizione β), cui soddisfa $\Phi(\delta)$, e indichiamo con Δ_1 il minore fra i numeri Δ_1', l_σ, $|\delta_1'|$, $|\delta_2'|,\dots, |\delta'_m|$.

Fatto questo, consideriamo una *qualsiasi* decomposizione di (a, b) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, tutti minori di Δ_1, e formiamo la somma

$$s = \sum_{r=1}^{n} \Phi(\delta_r).$$

Consideriamo poi una terza decomposizione di (a, b) in parti $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots, \bar{\delta}_\nu$, ottenute prendendo in (a, b) come punti di suddivisione tutti gli estremi dei δ_r' e tutti quelli dei δ_r, e poniamo

$$\bar{s} = \sum_{r=1}^{\nu} \Phi(\bar{\delta}_r).$$

La decomposizione $\{\bar{\delta}_r\} \equiv \{\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots, \bar{\delta}_\nu\}$ può ritenersi ottenuta suddividendo ulteriormente gli intervalli della decomposizione $\{\delta_r'\}$; e poichè gli intervalli δ_r' sono tutti di lunghezza minore di Δ_1' e quindi minore di λ_ε, ne viene, per la condizione a),

$$s' \leqslant \bar{s} + \varepsilon(b-a). \tag{8}$$

Se ora confrontiamo le due decomposizioni $\{\bar{\delta}_r\}$ e $\{\delta_r\}$, vediamo che esse hanno un certo numero (eventualmente nullo) di intervalli comuni, i quali danno in $\bar{s}$ e s uno stesso contributo. Inoltre, ogni intervallo di $\{\delta_r\}$ che non figura in $\{\bar{\delta}_r\}$ contiene nel suo *interno* un estremo di un δ_r', ed uno solo, perchè i δ_r hanno tutti lunghezza minore di Δ_1 e quindi minore della più piccola lunghezza dei δ_r'; perciò ognuno dei δ_r che non figura in $\{\bar{\delta}_r\}$ si decompone in *due* intervalli di $\{\bar{\delta}_r\}$ i quali, per la (5), danno in $\bar{s}$ un contributo minore di σ aumentato del contributo che porta in s il δ_r considerato. E poichè i δ_r della specie ora indicata sono, al massimo, $m-1$, si ha

$$\bar{s} < s + \sigma(m-1).$$

Risulta pertanto

$$s' < s + \sigma(m-1) + \varepsilon(b-a),$$

e perciò

$$s' < s + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = s + \frac{\eta}{2}, \qquad S_1 - \frac{\eta}{2} < s' < s + \frac{\eta}{2},$$

onde

$$S_1 - \eta < s;$$

e poichè è sicuramente $s \leqslant S_1$, si ha, infine,

$$S_1 - \eta < s \leqslant S_1, \tag{9}$$

e ciò vale per tutte le somme s corrispondenti alle decomposizioni di (a, b) in intervalli parziali, in numero finito, tutti minori di Δ_1.

Ripetiamo il ragionamento ora fatto, sostituendo a Δ e η rispettivamente $\frac{\Delta_1}{2}$ e $\frac{\eta}{2}$; e detto Δ_2 il numero che qui viene a sostituire Δ_1 $\left(\text{onde } \Delta_2 \leq \frac{\Delta_1}{2}\right)$ e indicato con S_2 il confine superiore delle somme $s = \sum \Phi(\delta_r)$ corrispondenti a tutte le decomposizioni di (a, b) in intervalli parziali (in numero finito) tutti minori di Δ_2, avremo che, per tutte queste somme s, vale la

$$S_2 - \frac{\eta}{2} < s \leq S_2. \tag{10}$$

E poichè sussiste necessariamente anche la (9) ne viene che tutte le somme s or ora indicate sono contenute in un intervallo (i_2, j_2), di ampiezza non superiore a $\frac{\eta}{2}$, contenuto, a sua volta, in $(S_1 - \eta, S_1)$.

Ripetendo ancora il ragionamento fatto, sostituendo a Δ e η rispettivamente $\frac{\Delta_2}{2}$ e $\frac{\eta}{2^2}$, e così proseguendo indefinitamente, si vengono a costruire una successione di numeri positivi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, decrescenti e tendenti a zero, ed una successione di intervalli $(S_1 - \eta, S_1)$, (i_2, j_2), $(i_3, j_3), \ldots$, ciascuno contenuto nel precedente e di ampiezza tendente a zero, in modo che, per tutte le somme $s = \sum \Phi(\delta_r)$ corrispondenti a suddivisioni di (a, b) in intervalli parziali tutti minori di Δ_p, risulti

$$i_p < s \leq j_p.$$

Detto L il punto comune a tutti gli intervalli (i_p, j_p), e preso ad arbitrio un $\eta_0 > 0$, si può allora determinare un numero $\Delta_0 > 0$ in modo che, per tutte le decomposizioni di (a, b) in parti in numero finito e minori di Δ_0, si abbia

$$\left| L - \sum \Phi(\delta_r) \right| < \eta_0.$$

2° CASO. - Comunque si prenda il numero $\Delta > 0$, le somme $s = \sum \Phi(\delta_r)$ corrispondenti a tutte le possibili decomposizioni di (a, b) in intervalli parziali, in numero finito qualunque, tutti minori di Δ, ammettono come *confine superiore* $+\infty$.

Scelto arbitrariamente un numero $\eta > 0$, si ponga

$$\varepsilon = \frac{1}{2\eta(b-a)}$$

e sia $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta'_m$ (con $m > 1$), una decomposizione di (a, b) in intervalli parziali, tutti minori del λ_ε determinato in base alla condizione α) cui soddisfa $\Phi(\delta)$, e tale che risulti

$$\frac{2}{\eta} < s' = \sum_{r=1}^{m} \Phi(\delta_r').$$

Si ponga poi

$$\sigma = \frac{1}{2\eta(m-1)}$$

e, determinato l_σ in base alla condizione β) cui soddisfa la $\Phi(\delta)$, si indichi con Δ_1 il minore fra i numeri λ_ε, l_σ, $|\delta_1'|$, $|\delta_2'|,....,$ $|\delta'_m|$. Allora, ripetendo considerazioni già fatte nel 1° Caso, si giunge alla disuguaglianza

$$\frac{1}{\eta} < s = \sum \Phi(\delta_r),$$

valida per tutte le somme $s = \sum \Phi(\delta_r)$ corrispondenti alle decomposizioni di (a, b) in parti (in numero finito) tutte minori di Δ_1; e ciò prova completamente la proposizione enunciata.

2. - Se, invece della condizione a) del n°. 1, si ha, più restrittivamente,

$$\Phi(\delta) \leq \Phi(\delta_1) + \Phi(\delta_2) + ... + \Phi(\delta_n), \tag{11}$$

per ogni intervallo δ di (a, b) e qualsiasi decomposizione di δ in intervalli parziali δ_1, $\delta_2,....,$ δ_n, in numero finito qualsiasi, vale a dire, se, invece di supporre la $\Phi(\delta)$ *approssimativamente subadditiva*, la supponiamo *subadditiva*, nel *1° caso* della dimostrazione del n.° 1 il numero L ivi considerato risulta *maggiore* o *uguale* a *tutte* le possibili somme $\sum \Phi(\delta_r)$. Infatti, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, è, nel caso detto,

$$\sum \Phi(\delta_r) < L + \eta,$$

per tutte le decomposizioni di (a, b) in parti $\delta_1,....,$ δ_n sufficientemente piccole e quindi anche, in virtù della (11), per *tutte* le possibili decomposizioni di (a, b) in parti in numero finito. E siccome η è arbitrario, ne risulta quanto abbiamo affermato. Si ha, pertanto, che vale il teorema:

D). Se la funzione $\Phi(\delta)$, reale e ad un valore, è definita per ogni intervallo contenuto in (a, b), ed è una funzione d'intervallo subadditiva e soddisfacente alla condizione β) del n.° 1, detto L il confine superiore (finito o $+\infty$) delle somme $\sum \Phi(\delta_r)$ corrispondenti a tutte le possibili decomposizioni di (a, b) in parti δ_1, $\delta_2,....,$ δ_n, in numero finito qualsiasi, e preso ad arbitrio un numero $\eta > 0$, è possibile determinarne un altro $\lambda > 0$ in modo che, per qualsiasi decomposizione di (a, b) in parti tutte di lunghezza minore di λ, si abbia

$$L - \eta < \sum \Phi(\delta_r) \leq L, \quad \text{se} \quad L < +\infty$$
$$\sum \Phi(\delta_r) > \frac{1}{\eta}, \quad \text{se} \quad L = +\infty.$$

Questa proposizione D) contiene evidentemente la B) come caso particolare.

3. - Come applicazione di ciò che abbiamo stabilito or ora, consideriamo, definita in tutto l'intervallo (a, b), una funzione reale e ad un valore, $f(x)$, la quale ammetta soltanto discontinuità di 1ª specie e soddisfi ovunque, in (a, b), alla condizione che $f(x)$ sia sempre compreso tra $f(x-0)$ e $f(x+0)$ (intendendo che sia $f(a-0)=f(a)$, $f(b+0)=f(b)$).

Formiamo, in corrispondenza ad ogni suddivisione di (a, b) in parti, in numero finito qualunque, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, la somma

$$v=\sum_{r=1}^{n} |f(b_r)-f(a_r)|,$$

dove a_r e b_r sono, rispettivamente, il primo ed il secondo estremo di δ_r, e indichiamo con V il confine superiore (finito o $+\infty$) di tutte le possibili somme v.

Posto, per ogni intervallo δ di (a, b), di estremi α e β,

$$\Phi(\delta)=|f(\beta)-f(\alpha)|,$$

la funzione d'intervallo così definita è *subadditiva*, e, in virtù delle proprietà ammesse per la $f(x)$, soddisfa alla condizione β) del n.º 1. E siccome è

$$v=\sum_{r=1}^{n} |f(b_r)-f(a_r)| = \sum_{r=1}^{n} \Phi(\delta_r),$$

dalla proposizione D) segue senz'altro il ben noto risultato:

Se $f(x)$ è una funzione soddisfacente alle condizioni sopra indicate, preso ad arbitrio un numero $\eta>0$, è possibile di trovarne un altro $\lambda>0$, tale che si abbia, per ogni decomposizione di (a, b) in parti, in numero finito, tutte minori di λ,

$$V-\eta<v\leq V, \quad \text{se} \quad V<+\infty$$
$$v>\frac{1}{\eta}, \quad \text{se} \quad V=+\infty.$$

4. - Sia ora $F(x, y, x', y')$ una funzione, reale e ad un valore, definita per ogni punto (x, y) di un campo (reale) limitato A e per ogni coppia (x', y') di numeri (reali) x', y', qualsiasi, e tale che sia sempre $F(x, y, 0, 0)=0$ e che risultino soddisfatte le seguenti condizioni:

1º) la $F(x, y, x', y')$ è *positivamente omogenea da grado* 1 nelle x', y', vale a dire, è, per ogni $k>0$ e per ogni punto (x, y) del campo A ed ogni coppia (reale) (x', y'),

$$F(x, y, kx', ky')=kF(x, y, x', y'); \tag{12}$$

2º) la $F(x, y, x', y')$ è, per ogni coppia (reale) (x', y'), *funzione continua* di (x, y) nel campo A;

3°) per ogni (x, y) di A, la $F(x, y, x', y')$ è funzione della coppia (reale) (x', y') *concava verso l'alto*, vale a dire, comunque si scelgano le coppie (reali) (x_1', y_1') e (x_2', y_2'), risulta

$$(13) \qquad F\left(x,\, y,\, \frac{x_1'+x_2'}{2},\, \frac{y_1'+y_2'}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\{F(x, y, x_1', y_1') + F(x, y, x_2', y_2')\}.$$

Da (12) e (13) segue

$$F(x, y, x_1'+x_2', y_1'+y_2') \leqslant F(x, y, x_1', y_1') + F(x, y, x_2', y_2')$$

e, più in generale, se $(x_1', y_1'), \ldots, (x_n', y_n')$ sono n coppie di numeri (reali) qualsiasi,

$$(14) \qquad F(x, y, x_1'+\ldots+x_n', y_1'+\ldots+y_n') \leqslant F(x, y, x_1', y_1') + \ldots + F(x, y, x_n', y_n').$$

Osserviamo poi che, per la $F(x, y, 0, 0) = 0$ e per la condizione 3°), la $F(x, y, x', y')$ è, in tutti i punti (x, y) del campo A, una *funzione continua* di (x', y'). Inoltre, la $F(x, y, x', y')$ risulta *funzione continua anche rispetto alla quaterna* (x, y, x', y'), e ciò per ogni (x, y) di A e per qualsiasi coppia (reale) (x', y').

Consideriamo, nel campo A, una curva continua C, sulla quale intendiamo che sia fissato un *verso positivo*; e siano $P_0, P_1, \ldots, P_n$ dei punti della C, susseguentisi sulla curva, secondo il *verso positivo* di essa, nell'ordine scritto, e tali che P_0 coincida col primo estremo della C e P_n col secondo estremo, essendo inteso che P_n coincida con P_0 se la curva è chiusa. Per ciascun arco $C(P_r, P_{r+1})$ della curva C, indichiamo con d_r la massima distanza fra due punti qualunque dell'arco stesso, e indichiamo poi con $\Delta(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ il maggiore dei numeri $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$.

Formata la somma

$$(15) \qquad \sum_{r=0}^{n-1} F(x_r, y_r, x_{r+1}-x_r, y_{r+1}-y_r),$$

dove x_r e y_r sono, rispettivamente, le coordinate x e y del punto P_r, se, al tendere comunque di $\Delta(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ allo zero, questa somma tende ad un limite *finito*, tale limite è il ben noto *integrale di Weierstrass* $W_C(F)$ della funzione $F(x, y, x', y')$, relativo alla curva C, considerata nel suo verso positivo.

Si sa che, *se la curva C è rettificabile, l'integrale $W_C(F)$ esiste* (*finito*); e noi vogliamo mostrare come ciò discenda immediatamente dal teorema C).

Sia l la lunghezza della curva C e consideriamo la rappresentazione parametrica di tale curva

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

dove s indica la lunghezza dell'arco generico della curva che dal primo estremo di essa (o da un punto fissato comunque su di essa, se la curva è chiusa) va al punto corrente P. Chiamati $s_0=0$, s_1, s_2,...., $s_n=l$ i valori di s corrispondenti rispettivamente ai punti P_0, P_1,...., P_n, si ha

$$s_0=0<s_1<s_2<....<s_n=l,$$

$$(16)\quad \begin{cases} \sum F(x_r, y_r, x_{r+1}-x_r, y_{r+1}-y_r)=\sum F(x(s_r), y(s_r), x(s_{r+1})-x(s_r), y(s_{r+1})-y(s_r)) \\ \qquad =\sum \Phi(\delta_r), \end{cases}$$

dove δ_r è l'intervallo parziale (s_r, s_{r+1}), contenuto nell'intervallo base $(0, l)$, e $\Phi(\delta)$ è la funzione dell'intervallo $\delta\equiv(s', s'')$ definita dalla uguaglianza

$$(17)\qquad \Phi(\delta)=F(x(s'), y(s'), x(s'')-x(s'), y(s'')-y(s')).$$

Poichè è

$$(18)\quad \begin{cases} \Phi(\delta)=F\left(x(s'),\ y(s'),\ \dfrac{x(s'')-x(s')}{s''-s'},\ \dfrac{y(s'')-y(s')}{s''-s'}\right)(s''-s') \\ \qquad =F\left(x(s'),\ y(s'),\ \dfrac{x(s'')-x(s')}{s''-s'},\ \dfrac{y(s'')-y(s')}{s''-s'}\right)|\delta|, \end{cases}$$

con

$$\left|\frac{x(s'')-x(s')}{s''-s'}\right|^2+\left|\frac{y(s'')-y(s')}{s''-s'}\right|^2\leqslant 1,$$

dalle proprietà ammesse per la funzione $F(x, y, x', y')$ segue che la funzione d'intervallo definita dalla (17) verifica le condizioni α) e β) del n.° 1. Ciò è senz'altro evidente, in base alla (18), per quanto riguarda la condizione β). Per la α), si osserverà che, se è

$$\delta'\equiv(s', s''),$$
$$\delta_r'\equiv(s_r', s''_{r+1}),\qquad (r=1, 2,...., n),$$

con

$$s'=s_1'<s_2'<....<s'_{n+1}=s'',$$

si ha, per la (14),

$$\begin{aligned} \Phi(\delta')&=F(x(s'), y(s'), x(s'')-x(s'), y(s'')-y(s')) \\ &\leqslant\sum_{r=1}^{n} F(x(s'), y(s'), x(s'_{r+1})-x(s_r'), y(s'_{r+1})-y(s_r')) \\ &=\sum_{r=1}^{n} F\left(x(s'), y(s'), \frac{x(s'_{r+1})-x(s_r')}{s'_{r+1}-s_r'}, \frac{y(s'_{r+1})-y(s_r')}{s'_{r+1}-s_r'}\right)|\delta_r'|, \end{aligned}$$

e quindi, fissato un $\varepsilon>0$ e per δ' sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned} \Phi(\delta')&\leqslant\sum_{r=1}^{n} F\left(x(s_r'), y(s_r'), \frac{x(s'_{r+1})-x(s_r')}{s'_{r+1}-s_r'}, \frac{y(s'_{r+1})-y(s_r')}{s'_{r+1}-s_r'}\right)|\delta_r'|+\varepsilon\sum_{r=1}^{n}|\delta_r'| \\ &=\sum_{r=1}^{n}\Phi(\delta_r')+\varepsilon|\delta'|, \end{aligned}$$

la quale disuguaglianza mostra precisamente che, per la $\Phi(\delta)$ definita dalla (17), vale la condizione a) del n.° 1.

Alla funzione d'intervallo $\Phi(\delta)$ definita dalla (17) è dunque applicabile il teorema C); e siccome da (18) segue

$$\left|\sum_{r=1}^{n}\Phi(\delta_r)\right| \leqslant \sum_{r=1}^{n}\left|F\left(x(s_r),\, y(s_r),\, \frac{x(s_{r+1})-x(s_r)}{s_{r+1}-s_r},\, \frac{y(s_{r+1})-y(s_r)}{s_{r+1}-s_r}\right)\right| |\delta_r|$$
$$\leqslant M\sum_{r=1}^{n}|\delta_r| = Ml,$$

M essendo un numero positivo, indipendente dalla decomposizione dell'intervallo $(0, l)$ nelle parti $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, ne viene che non può valere la (7). Vale perciò la (6); e questo prova che esiste finito l'integrale di WEIERSTRASS $W_C(F)$ della F relativo alla curva continua e rettificabile C, considerata nel fissato verso positivo.

5. - a). Se la funzione $F(x, y, x', y')$ soddisfa a tutte le condizioni per essa indicate nel n.° 4, *eccettuata la 3°*), e se esiste un'altra funzione $G(x, y, x', y')$ la quale verifichi *tutte* le condizioni enunciate per la $F(x, y, x', y')$ nel n.° detto e che, di più, sia tale da rendere la somma $F(x, y, x', y') + G(x, y, x', y')$ soddisfacente alla indicata condizione 3°), allora, supposto che C sia una curva continua e rettificabile avente determinato *verso positivo* e appartenente al campo A, anche l'integrale di WEIERSTRASS di questa F, relativo alla curva C considerata nel fissato verso positivo, esiste finito. Infatti, dal n.° 4 segue che esiste finito l'integrale di WEIERSTRASS $W_C(F+G)$ ed anche quello $W_C(G)$; e poichè, considerando le somme (15) relative alle funzioni F, $F+G$ e G, si ha

$$\sum F(x_r, y_r, x_{r+1}-x_r, y_{r+1}-y_r) = \sum\{F(....)+G(....)\} - \sum G(....),$$

ne viene che esiste finito anche l'integrale $W_C(F)$.

b). Se la $F(x, y, x', y')$ verifica tutte le condizioni per essa indicate nel n.° 4, *eccettuata la 3°*), e se, di più, essa ammette, finite, le derivate parziali dei primi due ordini rispetto a x' e y', per ogni (x, y) del campo A e per ogni coppia (reale) (x', y') tale che $x'^2+y'^2=1$, e tali derivate risultano *limitate* (per gli (x, y) e (x', y') detti), allora esiste sicuramente la funzione $G(x, y, x', y')$ indicata in a): basta, infatti, prendere

$$G(x, y, x', y') \equiv K\sqrt{x'^2+y'^2}$$

con K costante positiva sufficientemente grande.

c). Se, infine, supponiamo che la $F(x, y, x', y')$ sia *continua rispetto alla quaterna* (x, y, x', y'), per ogni (x, y) del campo A e qualsiasi coppia (reale) (x', y'), e, inoltre, che sia, per tutti gli (x, y) di A, positivamente omogenea di grado 1, rispetto a (x', y'), con $F(x, y, 0, 0) = 0$, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ si possono determinare (come facilmente si vede) una costante positiva K ed una funzione $\overline{F}(x, y, x', y')$, avente le stesse proprietà della $F(x, y, x', y')$, in modo che la somma

$$\overline{F}(x, y, x', y') + K\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

risulti, per ogni (x, y) di A, funzione di (x', y') *concava verso l'alto*, e pure in modo che, per ogni (x, y) di A ed ogni coppia (reale) (x', y') tale che $x'^2 + y'^2 = 1$, risulti

$$|F(x, y, x', y') - \overline{F}(x, y, x', y')| < \varepsilon.$$

Allora, scrivendo

$$F \equiv \{F - \overline{F}\} + \{\overline{F} + K\sqrt{x'^2 + y'^2}\} - K\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

e considerando una curva C, continua e rettificabile, avente determinato *verso positivo* e appartenente al campo A, si ha che esistono finiti gli integrali di WEIERSTRASS

$$W_C(\overline{F} + K\sqrt{x'^2 + y'^2}), \qquad W_C(K\sqrt{x'^2 + y'^2}),$$

e che le somme (15) relative alla funzione $\{F - \overline{F}\}$ risultano in valore assoluto sempre minori di εl (l essendo la lunghezza della C); perciò le somme (15) relative alla F risultano, per tutti i $\Delta(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ minori di un certo $\lambda > 0$, tra loro differenti al massimo per $2\varepsilon(l + 1)$. E ciò basta per poter asserire che, nelle condizioni indicate per la $F(x, y, x', y')$, l'integrale di WEIERSTRASS $W_C(F)$ esiste finito.

Questo risultato, da me dato — indipendentemente dalla condizione 3°) del n.° 4, ma con qualche maggiore restrizione relativamente alla derivabilità della $F(x, y, x', y')$ — nel 1912 ([4]), risulta anche provato per altra via, e in tutta la sua generalità, dall'osservazione posta a piè di p. 450 della mia Nota or ora citata e da un mio teorema di convergenza ([5]).

L'osservazione ed il teorema ora rammentati mostrano pure che, nelle ipotesi generali qui poste, l'integrale di WEIERSTRASS $W_C(F)$ coincide con l'integrale del LEBESGUE considerato nel senso da me indicato nel Vol. I, pp. 217-218, dei miei « *Fondamenti....* ».

6. - Ritornando alle condizioni poste per la $F(x, y, x', y')$ nel n.° 4, le considerazioni svolte in tale n.° mostrano che, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$,

---

([4]) *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni.* Rend. R. Accad. dei Lincei Vol. XXI, serie 5ª, 1912, pp. 448-453.

([5]) Vedi, per esempio, i miei « *Fondamenti....* », Vol. I, pp. 227-229.

è possibile determinarne un altro $\lambda > 0$, in modo che, se C è una qualsiasi curva continua e rettificabile del campo A, di lunghezza l e di fissato *verso positivo*, la somma (15), ad essa relativa, verifica, sotto la sola condizione $\Delta(P_0, P_1, \dots, P_n) \leq \lambda$, la disuguaglianza

$$\sum_{r=1}^{n-1} F(x_r, y_r, x_{r+1} - x_r, y_{r+1} - y_r) < W_C(F) + \varepsilon l.$$

Questa disuguaglianza semplifica notevolmente il ragionamento da me fatto nel n.° 27 della mia Memoria: *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni* (6), il quale prova che:

1°) nelle ipotesi poste per la $F(x, y, x', y')$ nel n.° 4, il funzionale $W_C(F)$ è semicontinuo inferiormente in ogni classe di curve continue e rettificabili del campo A, aventi tutte determinato verso positivo e lunghezza sempre inferiore ad un numero fisso;

2°) nelle ipotesi poste per la $F(x, y, x', y')$ nel n.° 4, e supponendo in più che, per ogni coppia (reale) (x', y') di numeri non ambedue nulli, sia sempre, in tutto il campo A, $F(x, y, x', y') > 0$, il funzionale $W_C(F)$ è semicontinuo inferiormente in ogni classe di curve continue e rettificabili del campo A, aventi tutte determinato verso positivo.

7. - La proposizione C), dimostrata nel n.° 1, sussiste anche se, restando immutata la condizione β), ivi considerata, la condizione α) cessa, invece, di valere nell'intorno di un numero finito di punti di (a, b), $a_1, a_2, \dots, a_p$, che diremo *eccezionali*, purchè per ciascuno di questi punti esista, in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$, un intorno tale che, per ogni intervallo δ_1, o gruppo di intervalli *consecutivi*, in numero finito, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$, appartenenti ad esso, valga la disuguaglianza

$$|\Phi(\delta_1) + \Phi(\delta_2) + \dots + \Phi(\delta_q)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Ammessa questa condizione, relativa ai *punti eccezionali*, si intenderà che, racchiusi i punti $a_1, a_2, \dots, a_p$ in intorni comunque piccoli, e tolti da (a, b) i punti interni a questi intorni, in tutti gli *intervalli* rimanenti valga sempre la condizione α) del n.° 1.

Per dimostrare il teorema C) in queste nuove ipotesi, supponiamo, *a scopo di semplicità*, che sia $p = 1$ e $a_1 = b$; ed esaminiamo i due casi considerati nel n.° 1.

Nel primo caso, detto η un numero positivo arbitrariamente scelto, e posto

$$\varepsilon = \frac{\eta}{4(b - a + 2)},$$

(6) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXII (2° sem. 1911), pp. 297-337.