

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

JOSEPH MARCINKIEWICZ

**Sur une nouvelle condition pour la convergence presque  
partout des séries de Fourier**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 8,  
n° 3-4 (1939), p. 239-240

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1939\\_2\\_8\\_3-4\\_239\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_239_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE NOUVELLE CONDITION POUR LA CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT DES SÉRIES DE FOURIER

par JOSEPH MARCINKIEWICZ (Wilno).

Soit  $f(x)$  une fonction de période  $2\pi$ . Nous dirons qu'elle vérifie la condition  $I_p$  ( $1 \leq p$ ) si l'on a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} dx dt < \infty.$$

Le but de la Note présente est de démontrer le

**THÉORÈME.** - *Si la fonction  $f(x)$  vérifie la condition  $I_p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ), sa série de Fourier converge presque partout.*

Remarquons d'abord que ce théorème est partiellement connu, à savoir pour  $p=1$  <sup>(1)</sup> et  $p=2$  <sup>(2)</sup>. Nous pouvons donc supposer  $1 < p < 2$ .

Il est évident que si la fonction  $f$  vérifie la condition  $I_p$  ses parties positive et négative satisfont aussi à la même condition. On peut donc admettre  $f \geq 0$ . Désignons par  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  les ensembles où

$$f(x) \leq n, \quad n < f(x) \leq n+1, \quad f(x) > n+1,$$

et par  $C_x$  l'ensemble de points  $t$  tels que  $x+t \in C_n$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ .

Supposons  $|A_n| > 0$  et posons  $f_1 = f(x)$  si  $x \in A_n + B_n$  et  $f_1(x) = n+1$  dans le cas contraire et soit  $f_2 = f - f_1$ .

La condition  $I_p$  étant vérifiée, on a presque partout

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)|^p}{|t|} dt < \infty.$$

Done à plus forte raison cette inégalité est vraie presque partout dans  $A_n$ , ce qui entraîne presque partout dans  $A_n$

$$\int_{C_x} \frac{|f(x+t) - f(x)|^p}{|t|} dt < \infty.$$

Si  $x \in A_n$  et  $t \in C_x$  on a  $|f(x+t) - f(x)| \geq 1$  donc aussi presque partout dans  $A_n$

$$\int_{C_x} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \infty.$$

<sup>(1)</sup> Ceci est une conséquence immédiate du fait que la condition  $I_1$  entraîne d'après le théorème de FUBINI la condition de DINI presque partout.

<sup>(2)</sup> KOLMOGOROFF et SELIVERSTOFF, *Atti dei Lincei*, 3 (1926), pp. 307-310, PLESSNER, *Jurnal für Math.* 155 (1925), pp. 15-25.

D'autre part il est évident que

$$|f(x+t) - f(x)| \geq |f_2(x+t) - f_2(x)|$$

ce qui entraîne d'après la dernière formule

$$\int_{c_x}^{\infty} \frac{|f_2(x+t) - f_2(x)|}{|t|} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_2(x+t)|}{|t|} dt < \infty.$$

Il en résulte d'après une condition classique que la série de FOURIER de la fonction  $f_2(x)$  converge presque partout dans  $A_n$ .

D'après la formule évidente

$$|f_1(x+t) - f_1(x)| \leq |f(x+t) - f(x)|$$

on conclut que la fonction  $f_1$  vérifie la condition  $I_p$ , mais comme elle est bornée, elle vérifie aussi la condition  $I_2$ . Il en résulte d'après un théorème connu la convergence presque partout de la série de FOURIER de la fonction  $f_1$ . Par conséquent la série de FOURIER de la fonction  $f$  converge presque partout dans l'ensemble  $A_n$ . En y posant  $n = \infty$  on obtient le résultat en question.

ERRATA. - M. A. ZYGMUND a eu l'amabilité de vouloir bien attirer <sup>(3)</sup> mon attention sur une faute grossière que j'ai commis dans ma note <sup>(4)</sup>. A savoir l'inégalité (4.10) est mal citée, et elle doit être remplacée par l'inégalité <sup>(5)</sup>

$$\left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{*\varepsilon}(x, y) dx dy \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \leq A_\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg(1+f^2) dx dy + B_\varepsilon, \quad (\varepsilon < 1).$$

De même l'inégalité (4.11) doit être remplacée par

$$\left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_*^\varepsilon(x, y) dx dy \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \leq A_\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg(1+f^2) dx dy + B_\varepsilon, \quad (\varepsilon < 1)$$

ce qui donne au lieu de l'inégalité (2.9) l'inégalité plus faible

$$\left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U^\varepsilon dx dy \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \leq A_\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| \lg\{1+f^2\} dx dy + B_\varepsilon, \quad (\varepsilon < 1).$$

La démonstration reste la même pourvu que l'on applique au lieu des formules (4.10) et (4.11) les formules correctes.

<sup>(3)</sup> Dans une lettre de 15-5-39.

<sup>(4)</sup> J. MARCINKIEWICZ: *Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 8 (1939), pp. 149-160.

<sup>(5)</sup> Voir JESSEN, MARCINKIEWICZ et ZYGMUND: *Note on the differentiability of multiple integrals*. Fund. Math. 25 (1935), pp. 218-234, spec. p. 223.