ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CONSTANTIN CARATHÉODORY

Die homomorphieen von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 2 (1939), p. 105-130

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_2_105_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIE HOMOMORPHIEEN VON SOMEN UND DIE MULTIPLIKATION VON INHALTSFUNKTIONEN

von CONSTANTIN CARATHÉODORY (München).

Einleitung.

Als ich mich vor einigen Monaten mit der Theorie der Somen beschäftigte (1), verfolgte ich lediglich die Absicht, einen Beitrag für die systematische Darstellung der Mass- und Integrationstheorie zu liefern. Durch weiteres Nachdenken über diesen Gegenstand habe ich aber gefunden, dass die Theorie der Somen auch für ganz elementare Fragen der gewöhnlichen Lebesgueschen Theorie in Euklidischen Räumen von Bedeutung und Nutzen sein kann, weil sie erlaubt, gewisse Erscheinungen, die seit vielen Jahrzehnten beobachtet worden sind, straffer zu erfassen und einfacher zu erklären, als es bisher der Fall war.

Schon im Jahre 1905 hat G. VITALI die wichtige Entdeckung gemacht, dass jede beliebige Funktion, wenn sie messbar ist, einer Funktion äquivalent ist, die höchstens der zweiten Baireschen Klasse angehört (2), und dieser Satz von VITALI war nur der erste unter vielen anderen, bei welchen man in der Lebesgueschen Theorie von einer Nullmenge abzusehen hat.

Man kann nun jeder beliebigen Punktmenge eines Euklidischen Raumes alle Punktmengen zuordnen, die sich von der ersten nur um Nullmengen unterscheiden. Dann bildet die Gesamtheit dieser Punktmengen eine Klasse; und die Klassen, die man so erhält, genügen allen Axiomen der Somentheorie und können daher auch als Somen betrachtet werden. Ausserdem besitzen alle Punktmengen, die zu einer dieser Klassen gehören, denselben Lebesgueschen Inhalt, der als Inhalt des entsprechenden Somas betrachtet werden kann. Man erhält auf diese Weise einen Körper von Somen, der als Träger des Inhaltsbegriffs von LEBESGUE besonders zweckmässig gebaut ist.

In Verfolgung dieses Gedankens wird man dazu geführt, die allgemeine Theorie der Homomorphieen von Somen zu entwickeln, die in dem ersten Kapitel dieser Arbeit behandelt wird. Insbesondere wird sich in diesem Zusammenhang

---

(1) C. CARATHÉODORY: *Entwurf für eine Algebraisierung des Inhaltsbegriffs.* Münch. Sitzungsber. (1938), pp. 27-68.

(2) G. VITALI: *Una proprietà delle funzioni misurabili.* R. Ist. Lomb. sci. e lett. Rendic. (2), **38**, pp. 509-603.

zeigen, dass jeder vollkommene Körper von Somen, auf welchem eine Massfunktion gegeben ist, homomorph und masstreu auf einen ebensolchen Körper abgebildet werden kann, und dass insbesondere diese Abbildung eindeutig festgelegt ist, wenn man verlangt, dass alle Nullsomen der ersten Massfunktion dem leeren Soma des zweiten Somenkörpers entsprechen sollen.

Man wird nun den Wunsch haben, in möglichst vielen Fällen zwei Massfunktionen, die auf verschiedenen Somenkörpern definiert sind, auf diese Weise auf einen und denselben Körper von Somen abzubilden, weil man dann für viele Zwecke die eine dieser Massfunktionen durch die andere, die möglicherweise einfacher ist, ersetzen kann. Ein sehr anschauliches Beispiel liefert in dieser Hinsicht die klassische Kurve von PEANO.

Bekanntlich wird durch eine derartige Kurve eine Strecke von der Länge Eins auf alle Punkte eines Quadrats, dessen Flächeninhalt ebenfalls gleich Eins sein möge, abgebildet. Diese Abbildung ist allerdings nicht eineindeutig; die Gesamtheit derjenigen Punkte des Quadrats, denen mehrere Punkte der Strecke entsprechen, ist aber eine Nullmenge E'' der Ebene. Ebenso bilden die Punkte der Strecke, die auf einen Punkt von E'' abgebildet werden, eine Menge E', deren lineares Mass verschwindet.

Nun kann man alle Teilmengen A'' des Quadrats, für welche die Punktmenge $(A''-A''E'')$ gegeben ist, als ein einziges Soma A ansehen und alle linearen Punktmengen B', für welche $(B'-B'E')$ gegeben ist, als ein Soma B. Mit Hilfe der Peanokurve kann man nun die Somen A und B *eineindeutig* auf einander beziehen und hierbei haben entsprechende Somen denselben Inhalt.

In einem verwickelteren Falle hat Herr B. JESSEN eine ganz ähnliche Abbildung als Übertragungsprinzip behandelt ([3]) und viele Anwendungen dieses Prinzips machen können. Diese Resultate von JESSEN können nicht überraschen, denn es wird sich zeigen, dass jede Inhaltsfunktion, deren Masskörper eine abzählbare Basis besitzt, homomorph und masstreu auf einen Körper von Somen abgebildet werden kann, der auch dem gewöhnlichen Lebesgueschen Inhalt auf der geraden Linie homomorph und masstreu ist.

Dieses sehr allgemeine Resultat ist, wie man sofort sieht, vieler Anwendungen fähig. Insbesondere erlaubt es, die von HANS HAHN in dieser Zeitschrift begründete Theorie der Multiplikation von Inhaltsfunktionen ([4]) mit wenigen Federstrichen zu erhalten. Trotzdem soll man nicht glauben, dass die ursprüngliche Methode,

---

([3]) B. JESSEN: *The theory of Integration in a Space of an infinite number of Dimensions.* Act. Math. Vol. 63 (1934), pp. 249-323, insbes. p. 260. Bei dieser Gelegenheit möchte ich auf die schönen Arbeiten in dänischer Sprache desselben Autors aufmerksam machen, die mir bisher entgangen waren und die unter den Titeln 1. Indhold og Maal 2. Det bestemte Integral 3. Maengdefunktioner in Mat. Tidskr. 1934 S. 73, 1935 S. 60, 1938 S. 13 erschienen sind.

([4]) HANS HAHN: *Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen.* Diese Ztschr. (2) 2 (1933-XI), pp. 429-452.

die HAHN benutzt hat, und die durch eine Vervollständigung eines Verfahrens von M. FRÉCHET ([5]) entstanden ist, hierdurch überflüssig geworden sei.

Diese Methode von FRÉCHET-HAHN bildet nämlich das Fundament für einen der Hauptsätze der Somentheorie, auf den ich hoffe bei Gelegenheit zurückkommen zu können.

KAPITEL I.

Homomorphieen und Isomorphieen von Somen.

1. - Die Somen. — Wir stellen zum späteren Gebrauch die Axiome zusammen, denen die Somen genügen müssen ([6]).

Irgendwelche mathematischen Objekte, für welche die folgenden Axiome gelten, sollen *Somen* genannt werden.

Axiom 1. - *Die Gesamtheit der Somen A, B,.... bildet eine Menge* **M**. *Für irgend zwei Somen A, B soll immer bestimmt werden können, ob $A=B$ oder ob $A \neq B$ ist. Hierbei wird durch das Gleichheitszeichen irgendeine Beziehung ausgedrückt, die den Forderungen genügt:*

(1.1) $$A=A,$$

(1.2) $$\text{aus } A=B \text{ folgt } B=A,$$

(1.3) $$\text{aus } A=B \text{ und } B=C \text{ folgt } A=C.$$

Axiom 2. - *Jedem Paar A, B von Somen wird ein drittes Soma $A \dotplus B$ eindeutig zugeordnet, das die Vereinigung von A und B genannt wird. Für die Vereinigung gelten die Regeln:*

(1.4) $$A \dotplus A = A,$$

(1.5) $$A \dotplus B = B \dotplus A,$$

(1.6) $$A \dotplus (B \dotplus C) = (A \dotplus B) \dotplus C,$$

(1.7) $$\text{aus } B=B' \text{ folgt } A \dotplus B = A \dotplus B'.$$

Definition 1. - *Man sagt, dass das Soma B ein Teil des Somas A ist und schreibt*

(1.8) $$B \subseteqq A \text{ oder auch } A \supseteqq B,$$

wenn

(1.9) $$A \dotplus B = A$$

ist.

([5]) M. FRÉCHET: *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits.* Fund. Math., **4** (1923), pp. 329-365, **5** (1924), pp. 206-251 insbes. **5** p. 227.

([6]) L. c. ([1]) §§ 1-3.

Axiom 3. - *Sind $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele Somen, so gibt es ein kleinstes Soma V, das jedes der Somen A_k als Teil enthält. Das Soma V wird die Vereinigung aller A_k genannt, und man schreibt $V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$*

Axiom 4. - *Es gibt mindestens ein Soma O, das leere Soma, das Teil eines beliebigen Somas ist.*

Definition 2. - *Zwei Somen A, B, die ausser dem leeren Soma O keine weiteren gemeinsamen Teile besitzen, heissen fremd. Sind A und B fremd, so schreiben wir*

$$A \circ B. \tag{1.10}$$

Axiom 5. - *Ist ein Soma B fremd allen Somen $A_1, A_2, \ldots$ einer Folge, so ist B ebenfalls fremd der Vereinigung $A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$ dieser Somen.*

Axiom 6. - *Sind A und B zwei beliebige Somen, so gibt es immer mindestens ein Soma B_1, das den Bedingungen*

$$B_1 \circ A, \quad B_1 \dotplus B = B, \quad B_1 \dotplus A = B \dotplus A. \tag{1.11}$$

gleichzeitig genügt.

Man beweist, dass man für Somen, die den vorhergehenden Axiomen genügen, den Durchschnitt $D = AB$ von zwei und den Durchschnitt $D = A_1 A_2 A_3 \ldots$ von unendlich vielen Somen bestimmen kann, und dass auch mit irgend zwei Somen A, B die Differenz $A - AB$ existiert.

Alle diese Verknüpfungen von Somen haben genau dieselben Eigenschaften, wie die analogen Bildungen für gewöhnliche Punktmengen.

2. - Ringe und Körper (7). — Ein *Ring* $\boldsymbol{R}$ von Somen ist eine Menge von Somen, die mit je zwei Somen A und B aus $\boldsymbol{R}$ sowohl die Vereinigung $(A \dotplus B)$ als auch den Durchschnitt AB dieser Somen enthält.

Ein *Körper* $\boldsymbol{K}$ von Somen ist eine Menge von Somen, die mit den Somen A und B auch die Differenzen $(A - AB)$ und $(B - AB)$ und — falls die beiden Somen fremd sind — auch ihre Summe $A + B$ enthält.

Jeder Körper ist ein Ring: mit A und B sind AB und $A \dotplus B$ in $\boldsymbol{K}$ enthalten. Aber ein Ring braucht nicht ein Körper zu sein.

Ein Körper von Somen heisst ein *vollkommener Körper* $\overline{\boldsymbol{K}}$ — oder auch ein σ-Körper —, wenn er mit abzählbar vielen seiner Somen immer auch ihre Vereinigung enthält.

Ein vollkommener Körper $\overline{\boldsymbol{K}}$ enthält auch mit abzählbar vielen seiner Somen ihren Durchschnitt.

Ein Körper von Somen, der mit jedem seiner Somen auch alle Teile dieses Somas enthält, heisst *vollständig*.

---

(7) L. c. (1), § 11.

Sind alle Somen eines Körpers $\boldsymbol{K}$ auch Somen eines Körpers $\boldsymbol{K}_0$ und sind alle Teile eines Somas A von $\boldsymbol{K}$, die zu $\boldsymbol{K}_0$ gehören, auch Somen von $\boldsymbol{K}$, so heisst der Körper $\boldsymbol{K}$ *vollständig relativ zu* $\boldsymbol{K}_0$.

Ein Ring, der mit jedem Soma A auch alle Teile von A enthält, ist notwendig ein vollständiger Körper. Denn er enthält mit A und B auch $(A-AB)$ als Teil von A.

Ein einfaches Beispiel für einen vollkommenen und vollständigen Körper erhält man, indem man sämtliche Somen A nimmt, die Teile eines fest gegebenen Somas A_0 sind.

Ein vollkommener Körper braucht nicht vollständig zu sein: z. B. bilden die Borelschen Punktmengen in irgend einem Euklidischen Raume einen vollkommenen Körper von Somen, der nicht vollständig ist.

3. - Definition der Homomorphieen. — Mit $\boldsymbol{A}'$ bezeichnen wir einen vollkommenen Körper von Somen A', B',.... und mit $\boldsymbol{A}_0$ einen vollkommenen Körper von Somen A, B,.... Jedem Soma A' aus $\boldsymbol{A}'$ ordnen wir ein Soma

$$A=\sigma A' \tag{3.1}$$

aus $\boldsymbol{A}_0$ zu, es darf aber verschiedenen Somen A', B' dasselbe A zugeordnet werden.

Die Abbildung (3.1) *soll eine Homomorphie genannt werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) mindestens ein Soma N' aus $\boldsymbol{A}'$ wird auf das leere Soma O aus $\boldsymbol{A}_0$ abgebildet;

b) bezeichnet man mit

$$V'=A_1'\dot{+}A_2'\dot{+}\dots \tag{3.2}$$

die Vereinigung von endlich oder abzählbar vielen Somen A_j' aus $\boldsymbol{A}'$ und mit

$$D'=A'B' \tag{3.3}$$

den Durchschnitt von A' mit B', so kann man schreiben

$$\sigma V'=\sigma A_1'\dot{+}\sigma A_2'\dot{+}\dots \tag{3.4}$$

$$\sigma D'=\sigma A'\cdot\sigma B' \tag{3.5}$$

Aus dieser Definition folgt zunächst der

Satz 1. - *Mit $B'\subseteqq A'$ hat man immer $\sigma B'\subseteqq\sigma A'$ und mit $A'\circ B'$ ist stets $\sigma B'\circ\sigma A'$.*

In der Tat ist $B'\subseteqq A'$ äquivalent mit $A'\dot{+}B'=A'$. Nach (3.4) ist also

$$\sigma A'=\sigma(A'\dot{+}B')=\sigma A'\dot{+}\sigma B'$$

und es muss daher $\sigma B'\subseteqq\sigma A'$ sein.

Ferner ist $O' \subseteqq N'$ und man hat

$$\sigma O' \subseteqq \sigma N' = O,$$

so dass auch ist

$$\sigma O' = O. \tag{3.6}$$

Ist aber $A' \circ B'$, so hat man $A'B' = O'$ und nach (3.5)

$$\sigma A' \cdot \sigma B' = \sigma(A'B') = \sigma O' = O, \tag{3.7}$$

woraus die letzte Behauptung des Satzes 1 folgt.

Wir beweisen jetzt den

Satz 2. - *Für Homomorphieen folgt aus* $C' = A' - A'B'$

$$\sigma C' = \sigma A' - \sigma A' \cdot \sigma B'. \tag{3.8}$$

Ferner folgt aus

$$D' = A_1' A_2' A_3' \ldots. \tag{3.9}$$

die Relation

$$\sigma D' = \sigma A_1' \cdot \sigma A_2' \cdot \sigma A_3' \ldots. \tag{3.10}$$

Es ist nämlich

$$C' \subseteqq A', \qquad C' \circ B', \qquad C' + B' = A' \dotplus B'.$$

Nach dem Satz 1 hat man nun in Verbindung mit (3.4)

$$\sigma C' \subseteqq \sigma A', \qquad \sigma C' \circ \sigma B', \qquad \sigma C' + \sigma B' = \sigma A' \dotplus \sigma B'$$

und diese letzten Relationen sind der Gleichung (3.8) äquivalent.

Um (3.10) zu beweisen, bemerken wir, dass man D' folgendermassen berechnen kann.

Man setze

$$D_k' = A_1' \cdot A_2' \ldots \cdot A_k'$$
$$E_k' = D_1' - D_k'$$
$$E' = E_1' \dotplus E_2' \dotplus \ldots;$$

dann ist

$$D' = D_1' - E' \quad (^8).$$

Wir setzen nun

$$A_k = \sigma A_k'$$

und führen die neuen Somen ein

$$D_k = A_1 A_2 \ldots A_k, \qquad E_k = D_1 - D_k, \qquad E = E_1 \dotplus E_2 \dotplus \ldots, \qquad D = D_1 - E;$$

dann ist

$$D = A_1 A_2 A_3 \ldots.$$

---

(8) Vgl. (1), S. 40, § 7, wo D_k' u. D' dieselbe Rolle spielen, wie hier E_k' u. E'.

Andererseits haben wir nach unseren früheren Resultaten

$$D_k = \sigma D_k', \qquad E_k = \sigma E_k', \qquad E = \sigma E'$$

und schliesslich $D = \sigma D'$, eine Relation, die mit (3.10) äquivalent ist.

Wir sehen jetzt, dass alle Operationen über Somen aus $\boldsymbol{A}'$ bei den Homomorphieen erhalten bleiben. Ferner, dass die Gesamtheit der Somen $A = \sigma A'$, die man erhält, wenn A' alle Somen aus $\boldsymbol{A}'$ durchläuft, einen vollkommenen Körper $\boldsymbol{A}$ bildet.

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{B}'$ eine Teilmenge von Somen aus $\boldsymbol{A}'$ und mit $\boldsymbol{B}$ die Gesamtheit der Somen $A = \sigma A'$, die man erhält, wenn A' die Menge $\boldsymbol{B}'$ durchläuft. Ist dann $\boldsymbol{B}'$ ein Ring oder ein Körper von Somen A', so muss $\boldsymbol{B}$ auch ein Ring bzw. ein Körper von Somen A sein. Ist $\boldsymbol{B}'$ ein vollkommener Körper, so gilt dasselbe von $\boldsymbol{B}$.

4. - Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{N}'$ die Gesamtheit der Somen N', für welche

$$\sigma N' = O \tag{4.1}$$

ist. Man bestätigt sofort, dass $\boldsymbol{N}'$ ein vollkommener und vollständiger Körper sein muss.

Sind A' und B' zwei Somen, für welche

$$\sigma A' = \sigma B' \tag{4.2}$$

ist, so hat man

$$\sigma(A' - A'B') = \sigma A' - \sigma A' \sigma B' = O.$$

Hieraus folgt, dass die beiden Somen

$$N_1' = A' - A'B', \qquad N_2' = B' - A'B' \tag{4.3}$$

dem Körper $\boldsymbol{N}$ angehören. Nun folgt aus (4.3)

$$A' = A'B' + N_1', \qquad B' = A'B' + N_2', \tag{4.4}$$

und daher ist auch

$$A' \dotplus N_2' = B' \dotplus N_1'. \tag{4.5}$$

Ist umgekehrt N' ein Soma aus $\boldsymbol{N}'$, so hat man

$$\sigma(A' \dotplus N') = \sigma A' \dotplus \sigma N' = \sigma A'$$

und hieraus folgt, dass die Gleichung (4.5) die Relation (4.2) zur Folge hat.

Satz 3. - *Die Gesamtheit der Somen N', für welche bei einer Homomorphie $\sigma N' = O$ ist, bildet einen vollkommenen und vollständigen Körper $\boldsymbol{N}'$.*

Notwendig und hinreichend dafür, dass zwei Somen A' und B' dasselbe Bild haben, d.h. dass $\sigma A' = \sigma B'$ sei, ist die Existenz von zwei Somen N_1', N_2' aus $\boldsymbol{N}'$, für welche $A' \dotplus N_2' = B' \dotplus N_1'$ ist.

5. - Bildung der allgemeinsten Homomorphieen. — Wir betrachten wieder einen vollkommenen Körper $\boldsymbol{A}'$ von Somen A', B',.... und nehmen an, dass ein vollkommener und vollständiger Teilkörper $\boldsymbol{N}'$ von $\boldsymbol{A}'$ irgendwie gegeben ist.

Ist A' ein beliebiges Soma aus $\boldsymbol{A}'$, so bezeichnen wir mit $\{A'\}$ die Gesamtheit der Somen B' aus $\boldsymbol{A}'$, für welche eine Gleichung von der Gestalt

$$B' \dotplus V' = A' \dotplus U' \tag{5.1}$$

existiert, wobei U', V' Somen aus $\boldsymbol{N}'$ bedeuten.

Die Somenmengen $\{A'\}$ können als Klassen von Somen aus $\boldsymbol{A}'$ angesehen werden. Sind nämlich $\{A'\}$ und $\{B'\}$ zwei solche Somenmengen, die mindestens ein Soma C' gemeinsam haben, und ist D' ein beliebiges Soma aus $\{B'\}$, so gibt es Somen U_i', V_i' aus $\boldsymbol{N}'$, für welche gilt:

$$C' \dotplus V_1' = A' \dotplus U_1', \qquad B' \dotplus V_2' = C' \dotplus U_2', \qquad D' \dotplus V_3' = B' \dotplus U_3'. \tag{5.2}$$

Hieraus erhält man nach einander:

$$B' \dotplus V_1' \dotplus V_2' = C' \dotplus V_1' \dotplus U_2' = A' \dotplus U_1' \dotplus U_2',$$
$$D' \dotplus V_1' \dotplus V_2' \dotplus V_3' = B' \dotplus V_1' \dotplus V_2' \dotplus U_3' = A' \dotplus U_1' \dotplus U_2' \dotplus U_3'.$$

Da nun die beiden Somen

$$U' = U_1' \dotplus U_2' \dotplus U_3', \qquad V' = V_1' \dotplus V_2' \dotplus V_3'$$

zu $\boldsymbol{N}'$ gehören, folgt aus

$$D' \dotplus V' = A' \dotplus U',$$

dass D' in der Menge $\{A'\}$ enthalten ist. Ebenso zeigt man, dass jedes Soma aus $\{A'\}$ in der Menge $\{B'\}$ enthalten ist.

Die beiden Mengen $\{A'\}$ und $\{B'\}$ enthalten also kein gemeinsames Soma oder sie sind identisch.

Wir setzen nun

$$A = \{A'\}, \qquad B = \{B'\},.... \tag{5.3}$$

und wollen beweisen, dass diese Mengen von Somen, die man auch als Restklassen der Somen aus $\boldsymbol{A}'$ mod. $\boldsymbol{N}'$ ansehen kann, selbst als Somen betrachtet werden können. Wir müssen hierzu die *Gleichheit* und die *Vereinigung* von zwei Somen A, B definieren und dann die sechs Axiome der Somentheorie verifizieren.

Selbstverständlich setzen wir $A = B$, wenn für irgend zwei Repraesentanten A', B' von A bzw. B die Relation (5.1) besteht. Dann ist das Axiom 1 bestätigt.

Wir definieren jetzt die Vereinigung $A \dotplus B$ durch die Gleichung

$$A \dotplus B = \{A' \dotplus B'\} \tag{5.4}$$

und verifizieren ohne Mühe, dass auch das Axiom 2 in allen seinen Teilen besteht.

Ist jetzt $B \subseteqq A$ oder

(5.5) $$B \dotplus A = A,$$

so betrachten wir einen Repraesentanten A' von A und einen Repraesentanten B_1' von B. Dann ist $B_1' \dotplus A'$ ein Repraesentant von A, und man muss haben

(5.6) $$B_1' \dotplus A' \dotplus U_1' = A' \dotplus V_1',$$

wobei U_1', V_1' zu N' gehören. Nun ist

(5.7) $$A' \dotplus V_1' = A' + (V_1' - A'V_1') = A' + V'$$

und, da N' ein *vollständiger* Körper ist, muss $V' = (V_1' - A'V_1')$ ein Soma aus N' sein. Nun folgt aus (5.6) und (5.7)

$$B_1' = A'B_1' + V'B_1'$$

Setzt man dann

$$B' = B_1' - V'B_1' = A'B_1',$$

so ist B' ein Repraesentant von B, der Teil von A' ist.

Es sei zweitens B' ein beliebiger Repraesentant von B und A_2' ein Repraesentant von A. Ebenso wie früber findet man

$$B' \dotplus A_2' \dotplus U_2' = A_2' \dotplus V_2';$$

setzt man $A' = A_2' \dotplus V_2'$, so ist A' ein Repraesentant von A, für welchen $B' \subseteqq A'$ ist.

Umgekehrt folgt aus $B' \subseteqq A'$, dass $B \subseteqq A$ sein muss, und es gilt der

Satz 4. - *Dafür, dass $B \subseteqq A$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass mindestens ein Paar von Repraesentanten A', B' von A, B existiert, für welche $B' \subseteqq A'$ ist. Ist dies der Fall, so kann man jedem Repraesentanten A' von A mindestens einen Repraesentanten B' von B und jedem Repraesentanten B' von B mindestens einen Repraesentanten A' von A zuordnen, für welchen $B' \subseteqq A'$ ist.*

6. - Wir betrachten jetzt eine Folge von abzählbar vielen Somen A_1', A_2',... und setzen

(6.1) $$A' = A_1' \dotplus A_2' \dotplus A_3' \dotplus \ldots.$$

Ferner betrachten wir die Somen

(6.2) $$A_k = \{A_k'\}, \qquad A = \{A'\}.$$

Dann ist erstens

(6.3) $$A_k \subseteqq A \qquad (k = 1, 2, \ldots.)$$

und zweitens existieren, wenn B ein Soma bedeutet, für welches

(6.4) $$A_k \subseteqq B \qquad (k = 1, 2, \ldots.)$$

ist, nach dem Satze 4 Repraesentanten B_k' von B, für welche

$$A_k' \subseteqq B_k' \tag{6.5}$$

ist. Ist jetzt B_0' irgend ein Repraesentant von B, so gibt es Somen U_k', V_k' aus $\mathbf{N}'$, für welche

$$B_k' \dotplus V_k' = B_0' \dotplus U_k' \tag{6.6}$$

ist. Setzt man nun

$$U' = U_1' \dotplus U_2' \dotplus U_3' \dotplus \ldots, \tag{6.7}$$

$$B' = B_0' \dotplus U', \tag{6.8}$$

so ist, weil $\mathbf{N}'$ ein *vollkommener* Körper sein sollte, U' in $\mathbf{N}'$ enthalten, und B' ist ein Repraesentant von B. Aus den Relationen (6.5) bis (6.8) folgt jetzt $A_k' \subseteqq B'$, und es ist also auch $A' \subseteqq B'$.

Aus (6.4) folgt also schliesslich

$$A \subseteqq B,$$

womit bewiesen ist, dass das Axiom 3 der Somentheorie für unsere Somen A, B,.... besteht.

7. - Wir betrachten mit den Somen $A = \{A'\}$ und $B = \{B'\}$ auch das Soma

$$D = \{A'B'\}. \tag{7.1}$$

Es folgt sofort aus dem Früheren, dass $D \subseteqq A$ und $D \subseteqq B$ ist.

Andererseits sei $E = \{E'\}$ ein Soma, für welches $E \subseteqq A$ und $E \subseteqq B$ gilt. Dann gibt es zwei Repraesentanten A_1', B_1' von A bzw. B, für welche

$$E' \subseteqq A_1', \qquad E' \subseteqq B_1' \tag{7.2}$$

ist. Andererseits gibt es zwei Somen U_1', U_2' aus $\mathbf{N}'$, für welche

$$A_1' \subseteqq A' \dotplus U_1', \qquad B_1' \subseteqq B' \dotplus U_2' \tag{7.3}$$

ist. Endlich ist

$$\begin{aligned}(A' \dotplus U_1')(B' \dotplus U_2') &= A'B' \dotplus A'U_2' \dotplus U_1'(B' \dotplus U_2') \\ &= A'B' \dotplus U'\end{aligned} \tag{7.4}$$

und U' ist, weil $\mathbf{N}'$ vollständig sein sollte, ein Soma aus $\mathbf{N}'$.

Aus (7.2) bis (7.4) folgt jetzt

$$E' \subseteqq A_1'B_1' \subseteqq A'B' \dotplus U'$$

und hieraus entnehmen wir

$$E \subseteqq D. \tag{7.5}$$

Das Soma (7.1) ist also das grösste Soma, für welches gleichzeitig $D \subseteqq A$ und $D \subseteqq B$ besteht, und wir haben hiermit den Begriff des *Durchschnitts* auf unsere Somen übertragen.

8. - Wir bezeichnen mit

$$O = \{O'\} = \{U'\} \tag{8.1}$$

die Somenmenge aus A', die aus allen Somen des Körpers N' besteht. Für jedes Soma $A = \{A'\}$ hat man dann $O \subseteq A$, sodass O das leere Soma darstellt.

Das Axiom 4 ist hiermit verifiziert.

Die Bedingung $A \circ B$ bedeutet, dass für jedes Soma E, für welches $E \subseteq A$ und $E \subseteq B$ ist, immer $E = O$ sein muss.

Also muss insbesondere auch

$$D = \{A'B'\} = O \tag{8.2}$$

sein und dies ist gleichbedeutend mit der Forderung

$$A'B' = U', \tag{8.3}$$

wobei U' ein Soma aus N' ist. Umgekehrt folgt aus (8.3), dass $A \circ B$ sein muss.

Das Axiom 5 kann jetzt ohne weiteres bestätigt werden.

Ist endlich $A = \{A'\}$ und $B = \{B'\}$ und setzt man $B_1 = \{B' - A'B'\}$, so erhält man die Gleichungen (1.11), womit auch das letzte Axiom 6 bestätigt wird. Wir haben mithin folgenden Satz bewiesen.

Satz 5. - *Ist A' ein vollkommener Körper von Somen A', B',...., und ist N' ein beliebiger vollkommener und vollständiger Teilkörper von A', so gibt es eine und nur eine Homomorphie, welche die Somen aus A' auf Somen eines Körpers A abbildet, wenn dabei alle Somen aus N' auf das leere Soma aus A abgebildet werden sollen.*

9. - **Massfunktionen** ([9]). — Wir definieren Somenfunktionen, indem wir jedem Soma A aus einem Körper A eine reelle Zahl $\varphi(A)$ zuordnen.

Die Somenfunktion heisst *monoton wachsend*, wenn aus $B \subseteq A$ folgt $\varphi(B) \leqq \varphi(A)$.

Die Somenfunktion heisst *vereinigungsbeschränkt*, wenn aus

$$V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus A_3 \dotplus \ldots. \tag{9.1}$$

folgt

$$\varphi(V) \leqq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots. \tag{9.2}$$

Eine nichtnegative, monoton wachsende, vereinigungsbeschränkte Somenfunktion heisst eine *Massfunktion.*

Ist $\varphi(A)$ eine gegebene Massfunktion, so heisst das Soma A *messbar* für $\varphi(A)$, wenn für jedes Soma W

$$\varphi(W) = \varphi(AW) + \varphi(W - AW) \tag{9.3}$$

([9]) L. c. ([1]), kap. II.

ist. Ist also A *nicht messbar* für $\varphi(A)$, so gibt es mindestens ein Soma W, für welches

$$\varphi(W) < \varphi(AW) + \varphi(W - AW)$$

ist.

Man beweist, dass die Gesamtheit der messbaren Somen einer Massfunktion immer einen vollkommenen Körper $\boldsymbol{K}$ bilden — den *Masskörper* der Massfunktion — der aber eventuell auch leer sein kann.

Eine Massfunktion, deren Masskörper unendlich viele Somen enthält, nennen wir eine *normale Massfunktion.*

Normale Massfunktionen bezeichnen wir mit griechischen Buchstahen $\mu^* A$, $\nu^* A$,.... und für *messbare Somen* lassen wir den Stern weg und schreiben μA, νA,.... Für normale Massfunktionen ist das leere Soma O immer messbar und

$$\mu O = 0.$$

Somen, U, V,.... für welche $\mu U = 0$ ist, nennt man die *Nullsomen* der Massfunktion; sie sind immer messbar und ihre Gesamtheit bildet einen *vollkommenen* und *vollständigen* Körper $\boldsymbol{K}_0$ von Somen, den *Nullkörper* der Massfunktion.

10. - Wir betrachten Somen A', B',.... aus einem vollkommenen Körper $\boldsymbol{A}'$ und eine normale Massfunktion $\mu^* A'$, die für diese Somen erklärt ist. Es sei $\boldsymbol{K}'$ der Masskörper und $\boldsymbol{K}_0'$ der Nullkörper von $\mu^* A'$. Ferner sei $\boldsymbol{N}'$ ein vollkommener und vollständiger Körper von Somen, der ein Teilkörper von $\boldsymbol{K}_0'$ ist.

Wir betrachten die Homomorphie $A = \{A'\}$, für welche alle Somen U', V' aus $\boldsymbol{N}'$ auf das leere Soma O abgebildet werden. Sind dann A', B' zwei beliebige Repraesentanten eines Somas A, so gibt es nach dem § 5 zwei Somen U', V' aus $\boldsymbol{N}'$, für welche

(10.1) $$A' \dotplus U' = B' \dotplus V'$$

ist. Nun hat man

(10.2) $$\mu^* A' \leqq \mu^*(A' \dotplus U') \leqq \mu^* A' + \mu U' = \mu^* A',$$

woraus folgt

(10.3) $$\mu^*(A' \dotplus U') = \mu^* A',$$

und ebenso beweist man, dass

(10.4) $$\mu^*(B' \dotplus V') = \mu^* B'$$

ist. Hieraus folgt aber $\mu^* A' = \mu^* B'$, und man kann jedem Bildsoma A eindeutig eine Zahl zuordnen, die wir mit $\mu^* A$ bezeichnen wollen und die durch die Gleichung

(10.5) $$\mu^* A = \mu^* A'$$

definiert wird.

Durch die Gleichung (10.5) wird also auf dem Körper $\boldsymbol{A}$ der Somen A eine Somenfunktion definiert. Mit Benutzung des Satzes des § 5 und des Resultates des § 6 überzeugt man sich, dass die nicht negative Somenfunktion $\mu^* A$ monoton wachsend und vereinigungsbeschränkt ist.

Es sei das Soma A' nicht messbar für $\mu^* A'$; dann gibt es ein Soma W' mit

$$\mu^* W' < \mu^* A' W' + \mu^*(W' - A' W'). \tag{10.6}$$

Setzt man nun $A = \{A'\}$, $W = \{W'\}$, so ist

$$A W = \{A' W'\} \quad \text{und} \quad W - A W = \{W' - A' W'\}$$

und daher folgt aus (10.5) und (10.6)

$$\mu^* W < \mu^* A W + \mu^*(W - A W);$$

d.h. A ist nicht messbar für $\mu^* A$. Genau ebenso sieht man, dass jedes Soma A', das für $\mu^* A'$ messbar ist, abgebildet wird auf ein Soma $A = \{A'\}$, das für $\mu^* A$ messbar ist.

Wir schliessen hieraus, dass erstens die Homomorphie $A = \{A'\}$ *masstreu* ist, weil (10.5) gilt. Zweitens dass die Masskörper $\boldsymbol{K}'$ und $\boldsymbol{K}$ der beiden Massfunktionen $\mu^* A'$ und $\mu^* A$ durch die Homomorphie auf einander abgebildet werden und dass die Nullkörper $\boldsymbol{K}_0'$ und $\boldsymbol{K}_0$ dieselbe Eigenschaft haben.

Eine spezielle masstreue Homomorphie erhält man, indem man $\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{K}_0'$ wählt. Dann hat die Massfunktion $\mu^* A$ die Eigenschaft, kein Nullsoma zu besitzen, das vom leeren Soma O verschieden ist.

Sind also in diesem Falle insbesondere A und B zwei verschiedene Somen, so kann nicht gleichzeitig

$$\mu(A - AB) = 0, \qquad \mu(B - AB) = 0$$

sein. Denn man hätte sonst $A - AB = O$ und $B - AB = O$ und folglich entgegen der Voraussetzung $A = B$.

Satz 6. - *Jeder normalen Massfunktion $\mu^* A'$ entspricht eine Homomorphie $A = \sigma A'$, die durch folgende Eigenschaften eindeutig definiert ist. Erstens wird durch die Gleichung*

$$\mu^* A = \mu^* A'$$

auf dem Körper der Bildsomen A eine normale Massfunktion bestimmt, und zweitens ist immer $A = B$, wenn die Somen $A - AB$ und $B - AB$ Nullsomen dieser letzten Massfunktion sind.

KAPITEL II.

Masstreue Abbildung und Multiplikation von Inhaltsfunktionen.

11. - Inhaltsfunktionen. — In diesem Kapitel werden wir nicht die allgemeinsten Inhaltsfunktionen betrachten, die im § 21 meiner unter ([1]) zitierten Arbeit definiert worden sind, sondern nur solche, deren Masskörper eine abzählbare Basis besitzen. Die Lebesgueschen Masse und die Lebesgue-Stieltjesschen Integrale in Euklidischen oder in Hilbertschen Räumen fallen beispielsweise unter diese Kategorie.

Es sei

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \ldots \tag{11.1}$$

eine abzählbare Menge von Somen. Wir betrachten die Menge $\boldsymbol{A}$ der Somen A, die Teile der Vereinigung aller Somen (11.1) sind. Ferner bezeichnen wir mit $\boldsymbol{M}$ den kleinsten abzählbaren Körper von Somen, der alle Somen (11.1) enthält ([10]), mit $\boldsymbol{M}_\sigma$ die Gesamtheit der Somen, die man als Vereinigung von endlich oder abzählbar vielen Somen aus $\boldsymbol{M}$ darstellen kann, und schliesslich mit $\boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$ die Gesamtheit der Somen, die man als Durchschnitt von endlich oder abzählbar vielen Somen aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ darstellen kann. Jedes Soma aus $\boldsymbol{M}$ ist dann ein Soma von $\boldsymbol{M}_\sigma$ und jedes Soma aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ ein Soma von $\boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$.

Wir betrachten Massfunktionen $\mu^* A$, die auf dem Körper $\boldsymbol{A}$ definiert sind, und nehmen ferner an, dass alle U_j messbar für $\mu^* A$ sind und dass alle μU_j *endliche* Werte haben. Alle Somen aus $\boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$ sind dann im Masskörper $\boldsymbol{K}$ von $\mu^* A$ enthalten. Die Massfunktion $\mu^* A$ heisat eine *Inhaltsfunktion*, wenn jedem Soma A mindestens eine massgleiche Hülle $\bar{A}$ aus $\boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$ zugeordnet werden kann.

Es soll also erstens $A \subseteqq \bar{A}$ sein und zweitens $\mu^* A = \mu \bar{A}$ sein.

Ist A selbst ein messbares Soma, also ein Soma von $\boldsymbol{K}$, so muss man haben $\mu(\bar{A} - A) = 0$, d.h. jedes messbare Soma unterscheidet sich lediglich um ein Nullsoma von einem geeignet gewählten Soma aus $\boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$.

12. - Wir nehmen nun an, wir hätten eine derartige Inhaltsfunktion $\mu^* A'$ vor uns, die für einen Körper von Somen $\boldsymbol{A}'$ definiert ist, so dass die Basis ihres Masskörpers nicht durch die Folge (11.1), sondern durch die Folge

$$U_1', \quad U_2', \quad U_3', \ldots \tag{12.1}$$

gebildet wird.

Wir betrachten die Homomorphie

$$A = \sigma A', \tag{12.2}$$

([10]) L. c. ([1]), § 12.

durch welche alle Nullsomen der Inhaltsfunktion $\mu^* A'$ auf das leere Soma O abgebildet werden. Durch diese Homomorphie wird der Masskörper $\boldsymbol{K}'$ der ursprünglichen Inhaltsfunktion auf den Masskörper $\boldsymbol{K}$ der transformierten Inhaltsfunktion abgebildet. Ebenso wird der abzählbare Körper $\boldsymbol{M}'$ in den kleinsten abzählbaren Körper $\boldsymbol{M}$ übergeführt, der alle Somen $U_j = \sigma U_j'$ der transformierten Basis enthält, und die Somenmengen $\boldsymbol{M}'_\sigma$, $\boldsymbol{M}'_{\sigma\delta}$ gehen in $\boldsymbol{M}_\sigma$, $\boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$ über. Nach der Bemerkung am Ende des letzten Paragraphen entspricht jedem Soma aus $\boldsymbol{K}'$ mindestens ein Soma aus $\boldsymbol{M}'_{\sigma\delta}$, welches auf *dasselbe* Soma abgebildet wird, und hieraus folgt, dass

$$\boldsymbol{M}_{\sigma\delta} = \boldsymbol{K} \tag{12.3}$$

sein muss.

Durch unsere Homomorphie wird also unsere Inhaltsfunktion wieder in eine Inhaltsfunktion transformiert, aber in eine solche, für welche die Somen des Masskörpers $\boldsymbol{K}$ aus den Somen der Basis durch höchstens zwei Grenzübergänge gewonnen werden. Solche Inhaltsfunktionen, die ausser dem leeren Soma kein Nullsoma besitzen, wollen wir *reduzierte Inhaltsfunktionen* nennen.

13. - Darstellung des Masskörpers einer reduzierten Inhaltsfunktion durch lineare Punktmengen. — Um den kleinsten abzählbaren Körper zu erhalten, der die Somen der Basis (11.1) enthält, bilden wir eine Folge von Somen U_{kj}, die denselben Körper $\boldsymbol{M}$ erzeugen, nach folgender Vorschrift:

$$\begin{aligned}
&U_{11} = U_1, \\
&U_{21} = U_{11} U_2, \quad U_{22} = U_{11} - U_{11} U_2, \quad U_{23} = U_2 - U_{11} U_2 \\
&U_{31} = U_{21} U_3, \quad U_{32} = U_{21} - U_{21} U_3, \ldots, \quad U_{37} = U_3 - (U_{21} + U_{22} + U_{23}) U_3 \\
&U_{41} = U_{31} U_4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn wir also die Anzahl der auf diese Weise gebildeten Somen U_{k1}, $U_{k2}, \ldots$ mit n_k bezeichnen, so hat man

$$n_1 = 1 = 2 - 1, \quad n_2 = 2n_1 + 1 = 2^2 - 1, \ldots, \quad n_k = 2n_{k-1} + 1 = 2^k - 1. \tag{13.1}$$

Hat man die $(2^k - 1)$ Somen

$$U_{k1}, \quad U_{k2}, \ldots, \quad U_{kn_k} \tag{13.2}$$

bestimmt, so berechnet man die $(2^{k+1} - 2)$ ersten Somen $U_{(k+1)j}$ durch die Gleichungen

$$U_{(k+1)(2m-1)} = U_{km} U_{(k+1)} \tag{13.3}$$

$$U_{(k+1)2m} = U_{km} - U_{km} U_{(k+1)} \tag{13.4}$$

und hierauf das letzte Soma dieser Reihe durch die Formel

$$U_{(k+1)n_{k+1}} = U_{k+1} - (U_{k1} + \ldots + U_{kn_k}) U_{k+1}. \tag{13.5}$$

Die Somen U_{kj} haben folgende Eigenschaften: irgend zwei unter diesen Somen, falls sie nicht leer sind, sind entweder einander fremd, oder das eine ist Teil des anderen. Ist endlich U_{pq} ein echter Teil von U_{rs}, so kann man die Differenz $U_{rs}-U_{pq}$ als Summe von *endlich vielen* paarweise fremden Somen U_{kj} darstellen.

Die Gesamtheit derjenigen Somen U, die man auf letztere Weise darstellen kann, bildet den kleinsten abzählbaren Körper $\boldsymbol{M}$, der sämtliche Somen U_j unserer Basis enthält ([11]).

14. - Für jedes Soma U_{kj}, das vom leeren Soma O verschieden ist, muss immer $\mu U_{kj}>0$ sein, weil die Massfunktion $\mu^* A$ eine reduzierte Inhaltsfunktion ist; einem solchen Soma ordnen wir auf der positiven Achse $x>0$ ein Intervall u_{kj} zu. Die Länge mu_{kj} eines jeden dieser Intervalle wird durch die Gleichung

$$mu_{kj}=\mu U_{kj} \tag{14.1}$$

definiert. Für jeden Wert von k werden die Intervalle

$$u_{k1}, \quad u_{k2}, \ldots, \quad u_{kn_k}, \tag{14.2}$$

insofern sie existieren, hintereinander und lückenlos aneinandergereiht und zwar so, dass der Anfangspunkt des ersten nicht verschwindenden Intervalls (14.2) immer der Punkt $x=0$ sein muss.

Man bemerke, dass immer gilt

$$U_{kj}=U_{(k+1)(2j-1)}+U_{(k+1)2j}, \tag{14.3}$$

selbst wenn einige dieser Somen leer sind. Aus der Messbarkeit der Somen U_{kj} folgt also nach der obigen Konstruktion, dass jedes Intervall u_{kj} entweder in die zwei Teilintervalle $u_{(k+1)(2j-1)}$ und $u_{(k+1)2j}$ zerlegt wird, oder dass es mit einem dieser Intervalle zusammenfällt, wenn das andere leer ist ([12]).

Sind ferner U_{pq} und U_{rs} zwei nicht leere Somen, denen die Intervalle u_{pq} und u_{rs} entsprechen, so hat man immer gleichzeitig

$$U_{pq} \circ U_{rs} \quad \text{und} \quad u_{pq} \circ u_{rs}; \tag{14.4}$$

desgleichen folgt jede der Relationen

$$U_{pq} \subseteqq U_{rs} \quad \text{und} \quad u_{pq} \subseteqq u_{rs} \tag{14.5}$$

aus der anderen.

([11]) L. c. ([1]), § 12.

([12]) Man beachte, dass die den Gleichungen (14.3) entsprechenden Gleichungen für die Intervalle u_{kj} nicht richtig sind. Man könnte allerdings das Analogon der Gleichung (14.3) auch für diese Intervalle erzwingen, indem man die offenen Intervalle durch halbgeschlossene ersetzt. Dies würde aber die Theorie nur komplizierter machen und keine Vorteile bieten.

15. - Wir betrachten ein beliebiges Soma U aus $\boldsymbol{M}_\sigma$, das somit als Vereinigung von abzählbar vielen U_{kj} angesehen werden kann. Selbstverständlich kann man — wir werden sogar weiter unten eine besonders einfache Konstruktion hierfür geben — das Soma U gleich der Summe von *paarweise fremden* U_{kj} setzen. Die offene lineare Punktmenge u, die gleich der Summe der entsprechenden Intervalle u_{kj} ist, wollen wir, um uns kurz zu fassen, eine *Darstellung* von U nennen. Die Gleichung (14.3) zeigt dann, dass jedem Soma U aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ auf diese Weise unendlich viele Darstellungen u zugeordnet werden können. Für jede dieser Darstellungen ist aber immer, wegen (14.1),

$$\mu U = mu. \tag{15.1}$$

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 1. - *Sind u, v zwei Darstellungen von Somen U, V aus $\boldsymbol{M}_\sigma$, so ist auch der Durchschnitt uv eine Darstellung des Durchschnitts UV.*

Die Darstellungen u, v entsprechen den Zerlegungen

$$U = \sum_i U_{p_i q_i}, \qquad V = \sum_j U_{r_j s_j} \tag{15.2}$$

der entsprechenden Somen. Dann hat man

$$UV = \sum_{ij} U_{p_i q_i} U_{r_j s_j}, \tag{15.3}$$

und in dieser letzten Summe ist jedes Glied, das vom leeren Soma verschieden ist, immer gleich dem einen seiner Faktoren $U_{p_i q_i}$ oder $U_{r_j s_j}$. Also ist

$$uv = \sum_{ij} u_{p_i q_i} u_{r_j s_j} \tag{15.4}$$

eine Darstellung von UV.

Satz 2. - *Bezeichnet man mit v_1, v_2,.... beliebige Darstellungen der Somen V_1, V_2,.... aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ und setzt man*

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots, \tag{15.5}$$

so ist

$$v = v_1 \dotplus v_2 \dotplus \ldots \tag{15.6}$$

eine Darstellung von V.

Die gegebene Darstellung v_k des Somas V_k entspricht einer Zerlegung von V_k in endlich oder abzählbar viele Somen U_{ij}. Wir schreiben alle diese abzählbar vielen U_{ij} für alle V_1, V_2,.... in eine Reihe auf, deren Glieder wir mit W_1, W_2,.... bezeichnen und erhalten

$$V = W_1 \dotplus W_2 \dotplus \ldots, \qquad W_k = U_{p_k q_k}. \tag{15.7}$$

Man beachte, dass jedem Soma U_{pq} nur *endlich viele* verschiedene Somen U_{rs} zugeordnet werden können, für welche $U_{pq} \subseteqq U_{rs}$ ist. In jeder der Folgen

$$W_p, \quad W_{p+1}, \quad W_{p+2}, \ldots \qquad (p=1, 2, \ldots) \tag{15.8}$$

gibt es also ein erstes Soma

$$W_{p+k_p} \supseteqq W_p \qquad (k_p \geqq 0) \tag{15.9}$$

derart, dass für alle Somen W_{p+m} der Reihe (15.8) aus $W_{p+m} \supseteqq W_p$ folgt $W_{p+m} \subseteqq W_{p+k_p}$.

Wir setzen dann

$$W_{p+k_p} = W_p', \qquad (p=1, 2, \ldots) \tag{15.10}$$

und erhalten

$$V = W_1' \dotplus W_2' \dotplus W_3' \dotplus \ldots \tag{15.11}$$

Vergleichen wir nun ein beliebiges Soma W_p' mit einem der vorhergehenden W_k' $(k<p)$, so ist entweder $W_p' \circ W_k'$ oder $W_p' \subseteqq W_k'$.

Es ist also immer auch

$$\text{entweder } W_p' \circ (W_1' \dotplus \ldots \dotplus W'_{p-1}) \text{ oder } W_p' \subseteqq (W_1' \dotplus \ldots \dotplus W'_{p-1}). \tag{15.12}$$

Wir streichen alle W_p' weg, für welche das zweite der Fall ist, und führen für die übrig bleibenden W_p' die ursprünglichen Bezeichnungen wieder ein. Wir erhalten auf diese Weise

$$V = W_{m_1} + W_{m_2} + \ldots, \tag{15.13}$$

d.h. eine Zerlegung des Somas V, der die Darstellung

$$v = w_{m_1} + w_{m_2} + \ldots \tag{15.14}$$

entspricht. Selbstverständlich ist nach dieser Konstruktion

$$v \subseteqq v_1 \dotplus v_2 \dotplus \ldots$$

Andererseits ist jedes der Intervalle u_{kj}, das in einer der Darstellungen v_p vorkommt, Teilmenge von mindestens einem der Intervalle w_{m_k}. Es ist also auch $v_p \subseteqq v$ und daher

$$v = v_1 \dotplus v_2 \dotplus \ldots,$$

was ja gerade bewiesen werden sollte.

Satz 3. - *Einer monoton abnehmenden Folge*

$$V_1 \supseteqq V_2 \supseteqq \ldots \tag{15.15}$$

von Somen V_k aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ kann man Darstellungen v_k zuordnen, die ebenfalls eine monoton abnehmende Folge

$$v_1 \supseteqq v_2 \supseteqq \ldots \tag{15.16}$$

bilden.

Jedem V_k ordnen wir eine beliebige Darstellung zu, die wir mit v_k' bezeichnen. Dann ist nach Satz 2 die Punktmenge

$$v_k = v_k' \dotplus v'_{k+1} \dotplus \ldots$$

ebenfalls eine Darstellung won V_k und für diese Darstellung gilt (15.16).

16. - Es sei nun A ein beliebiges Soma aus dem Masskörper $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}_{\sigma\delta}$ unserer reduzierten Inhaltsfunktion; wir setzen ausserdem voraus, dass $\mu A < +\infty$ sein möge. Es gibt dann monoton abnehmende Folgen

$$V_1 \supseteqq V_2 \supseteqq \ldots, \qquad V_k \supseteqq A \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{16.1}$$

von Somen V_k aus $\boldsymbol{M}_\sigma$, für welche

$$\mu V_1 < +\infty, \qquad \lim_{k=\infty} \mu V_k = \mu A \tag{16.2}$$

ist. Jedem Soma V_k ordnen wir mit Benutzung des letzten Satzes eine Darstellung v_k zu, für welche (15.16) gilt.

Wir bezeichnen mit a den Durchschnitt aller dieser v_k und nennen diese messbare lineare Punktmenge a eine *Darstellung* von A. Man hat jedenfalls

$$ma = \lim_{n=\infty} mv_n = \lim_{n=\infty} \mu V_n = \mu A. \tag{16.3}$$

Einem zweiten Soma B aus $\boldsymbol{K}$ ordnen wir in gleicher Weise eine monoton abnehmende Folge von Somen W_k aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ zu, die gegen B konvergiert. Ferner ordnen wir der Folge W_k eine monoton abnehmende Folge von Darstellungen w_k zu, die gegen eine Darstellung b von B konvergiert.

Bemerkt man nun, dass einerseits die Durchschnitte $V_n W_n$ gegen AB und die Durchschnitte $v_n w_n$ gegen ab konvergieren, dass andererseits aber nach dem § 15 die Punktmengen $v_n w_n$ Darstellungen von $V_n W_n$ sind, so folgt, dass die Punktmenge ab eine Darstellung des Somas AB ist. Man hat also insbesondere.

$$mab = \mu AB. \tag{16.4}$$

Nun sind die Somen A, B und die Punktmengen a, b messbar, und aus (16.4) folgt

$$m(a - ab) = \mu(A - AB), \qquad m(b - ab) = \mu(B - AB). \tag{16.5}$$

17. - Es seien $A_1, A_2, \ldots$ beliebige Somen aus $\boldsymbol{K}$ und $a_1, a_2, \ldots$ Darstellungen dieser Somen.

Wir setzen

$$V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \tag{17.1}$$

$$v = a_1 \dotplus a_2 \dotplus \ldots \tag{17.2}$$

und nehmen an, dass $\mu V < +\infty$ ist.

Es gibt dann Somen

$$W_{k1} \supseteqq W_{k2} \supseteqq \ldots; \qquad W_{km} \supseteqq A_k \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{17.3}$$

aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ mit den Darstellungen

$$w_{k1} \supseteqq w_{k2} \supseteqq \ldots; \qquad w_{km} \supseteqq a_k \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{17.4}$$

für welche gilt

$$\lim_{m=\infty} W_{km} = A_k, \qquad \lim_{m=\infty} w_{km} = a_k \tag{17.5}$$

und ausserdem

$$\mu(W_{km} - A_k) = m(w_{km} - a_k) \leqq \frac{1}{2^{k+m}}. \tag{17.6}$$

Setzt man dann

$$W_m = W_{1m} \dotplus W_{2m} \dotplus \ldots, \tag{17.7}$$

$$w_m = w_{1m} \dotplus w_{2m} \dotplus \ldots, \tag{17.8}$$

so ist $W_m \supseteqq V$ und $w_m \supseteqq v$ und ausserdem

$$W_m - V \subseteqq (W_{1m} - A_1) \dotplus (W_{2m} - A_2) \dotplus \ldots \tag{17.9}$$

Aus (17.6) und (17.9) folgt nun

$$\mu(W_m - V) \leqq \frac{1}{2^m} \tag{17.10}$$

und genau ebenso findet man

$$m(w_m - v) \leqq \frac{1}{2^m}. \tag{17.11}$$

Aus (17.10) folgt nun, dass der Durchschnitt aller W_m gleich V sein muss, weil die Inhaltsfunktion μA eine reduzierte Inhaltsfunktion ist. Ausserdem ist nach dem § 15 die Punktmenge w_m eine Darstellung von W_m und der Durchschnitt w aller w_m ist mithin eine Darstellung von V. Endlich hat man, wenn man (17.11) berücksichtigt

$$w \supseteqq v, \qquad m(w - v) = 0. \tag{17.12}$$

18. - Ist die Punktmenge a eine Darstellung des Somas A aus dem Masskörper $\boldsymbol{K}$ und ist $\mu A < +\infty$, so folgt aus dem § 16, dass für alle Somen U_{kj}

und die ihnen entsprechenden Intervalle u_{kj} immer auch die Punktmenge au_{kj} eine Darstellung des Somas AU_{kj} sein muss. Wir führen jetzt folgende Definition ein:

Definition. - *Ist A ein beliebiges Soma des Masskörpers* **K**, *also auch möglicherweise ein solches, für welches $\mu A = +\infty$ ist, so soll die Punktmenge a eine Darstellung von A genannt werden, wenn für alle zugeordneten Somen U_{kj} und Punktmengen u_{kj} immer die Punktmenge $u_{kj}a$ eine Darstellung des Somas $U_{kj}A$ nach der Definition des § 16 ist.*

Mit dieser Definition gelten dann, nach den Resultaten der beiden letzten Paragraphen, die Sätze:

Satz 4. - *Sind A und B zwei beliebige Somen des Masskörpers* **K** *und sind a und b zwei Darstellungen dieser Somen, so ist der Durchschnitt ab eine Darstellung des Somas AB.*

Satz 5. - *Sind a_k $(k=1, 2....)$ Darstellungen von beliebigen Somen A_k aus* **K** *und setzt man*

$$V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus ...., \qquad v = a_1 \dotplus a_2 \dotplus ....,$$

so gibt es eine Darstellung w des Somas V, für welche die Relationen

$$w \geqq v, \qquad m(w-v) = 0$$

gleichzeitig bestehen.

19. - Der Körper *k* von linearen Punktmengen. — Wir bezeichnen mit e die abzählbar vielen Endpunkte der Intervalle u_{kj}, die im § 14 definiert worden sind, und mit $\bar{e}$ die abgeschlossene Hülle von e.

Ferner sei ω die obere Grenze aller Punkte von $\bar{e}$. Falls $\omega = +\infty$ ist, bezeichnen wir mit Ω die Gesamtheit der Punkte $x \geqq 0$; und falls ω endlich ist, soll Ω das abgeschlossene Intervall $0 \leqq x \leqq \omega$ sein. Es kann nun die Punktmenge e überall dicht auf Ω liegen und man hat dann $\Omega = \bar{e}$. Im allgemeinen ist aber die Punktmenge

$$\Delta = \Omega - \Omega\bar{e} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ...$$

eine offene Punktmenge, die gleich einer Summe von paarweise fremden Intervallen δ_k gesetzt werden kann. Nun liegt kein Endpunkt eines beliebigen u_{pq} in Δ. Jede Darstellung u eines Somas U aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ wird folglich als Summe von Intervallen u_{kj} immer dass *ganze* Intervall δ_p enthalten, sobald sie diesem Intervall nicht fremd ist. Und dasselbe wird daher auch für jede Darstellung a eines beliebigen Somas A aus **K** der Fall sein. Die Teilintervalle δ_p der offenen Punktmenge Δ müssen daher als *unzerlegbare Stücke* angesehen werden, die im Tiegel unserer Grenzprozesse nicht eingeschmolzen werden können und höchstens als Ganzes ausgeschieden werden.

Wir bezeichnen jetzt mit $\boldsymbol{k}$ die Gesamtheit der linearen Teilmengen von Ω, die als Summe von endlich oder unendlich vielen δ_p mit einer nach *Lebesgue* messbaren Teilmenge von $\Omega - \Delta$ gebildet werden.

Man verifiziert unmittelbar, dass $\boldsymbol{k}$ ein vollkommener Körper von linearen Punktmengen ist.

Jede Darstellung eines Somas A aus $\boldsymbol{K}$ gehört, wie wir soeben sahen, dem Körper $\boldsymbol{k}$ an. Wir wollen aber auch alle Punktmengen aus $\boldsymbol{k}$ überhaupt — also auch diejenigen, die keine Darstellungen von Somen A sind — auf Somen des Masskörpers $\boldsymbol{K}$ abbilden.

20. - Es sei a eine beliebige Punktmenge, die zum Körper $\boldsymbol{k}$ gehört, und von der wir vorläufig annehmen, dass $ma < +\infty$ ist.

Wir bezeichnen mit f die höchstens abzählbar vielen Endpunkte der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots$, die alle in $\bar{e}$ enthalten sind, und setzen

$$a_0 = a - a(e + f). \tag{20.1}$$

Man hat dann

$$ma_0 = ma. \tag{20.2}$$

Und man kann, wenn ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, eine Umgebung von a_0 finden, die man als Summe

$$\eta_1' + \eta_2' + \ldots$$

von paarweise fremden Intervallen darstellen kann, für welche

$$m(\eta_1' + \eta_2' + \ldots) < ma + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist.

Es sei $x_q' < x < x_q''$ das Intervall η_q'. Ist zufällig der Anfangspunkt x_q' dieses Intervalls in Δ enthalten, also z.B. ein Punkt des Teilintervalls δ_p, so darf dieses letzte Intervall keinen Punkt von a_0 enthalten; denn es enthält den Punkt x_q', der nicht zu a_0 gehört. Man kann also, ohne einen Punkt von a_0 zu verlieren, ein Stück von η_q' abschneiden, indem man x_q' durch den rechten Endpunkt von δ_p ersetzt. Ähnlich kann man mit x_q'' verfahren und nachdem man diese Operation für alle η_q' ausgeführt hat, erhält man neue Intervalle $\eta_1, \eta_2, \ldots$, für welche einerseits immer noch

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots \supseteqq a_0 \tag{20.3}$$

gilt, andererseits aber

$$m(\eta_1 + \eta_2 + \ldots) < ma + \frac{\varepsilon}{2} \tag{20.4}$$

ist.

Die Endpunkte ξ_q', ξ_q'' dieser neuen Überdeckungsintervalle η_q sind nun alle in $\bar{e}$ enthalten und sind also Punkte oder Häufungspunkte von e.

Wir konstruieren nun neue Intervalle $\zeta_q \supseteqq \eta_q$ nach folgender Vorschrift: Liegt im abgeschlossenen Intervall

$$\xi_q' - \frac{\varepsilon}{2^{q+2}} \leqq x \leqq \xi_q' \tag{20.5}$$

mindestens ein Punkt von e, so ersetzen wir ξ_q' durch einen dieser Punkte. Sonst behalten wir ξ_q' bei. Ähnlich verfahren wir mit dem anderen Endpunkt ξ_q''. Dann ist jedentalls

$$a_0 \subseteqq \zeta_1 \dotplus \zeta_2 \dotplus \zeta_3 \dotplus \ldots \tag{20.6}$$

$$m(\zeta_1 \dotplus \zeta_2 \dotplus \ldots) < ma + \varepsilon. \tag{20.7}$$

Jeder Endpunkt eines Intervalls ζ_q ist entweder ein Punkt von e selbst, oder ein Häufungspunkt von Punkten von e, die im *Inneren* von ζ_q liegen. Sind die beiden Endpunkte eines Intervalls ζ_q Punkte von e, so kann man $\zeta_q a_0$ mit endlich vielen Intervallen u_{kj} überdecken, die durch Zerschneidung von ζ_q gewonnen werden. Sonst kann man dasselbe mit abzählbar vielen u_{kj} erreichen. Die Vereinigung aller dieser Teilintervalle von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ bildet eine offene Punktmenge u_ε, die man als Darstellung eines Somas U_ε aus $\boldsymbol{M}_\sigma$ ansehen kann, und für welche

$$a_0 \subseteqq u_\varepsilon, \qquad mu_\varepsilon < ma + \varepsilon \tag{20.8}$$

ist. Lässt man jetzt ε durch abzählbar viele Schritte gegen Null konvergieren, so erhält man als Durchschnitt aller u_ε eine lineare Punktmenge b, die die Darstellung eines Somas A ist, und für welche die Beziehungen

$$a_0 \subseteqq b, \qquad mb = ma \tag{20.9}$$

gleichzeitig bestehen, und es ist dann auch

$$m(a - ab) = 0, \qquad m(b - ab) - 0. \tag{20.10}$$

21. - Die Konstruktion des vorigen Paragraphen kann auf unendlich viele Weisen durchgeführt werden. Hat man aber eine Darstellung b_1 eines Somas A_1 gefunden, für welche

$$m(a - b_1 a) = 0, \qquad m(b_1 - b_1 a) = 0 \tag{21.1}$$

ist, so folgt aus (20.10)

$$m(b - bb_1) = 0, \qquad m(b_1 - bb_1) = 0. \tag{21.2}$$

Nach dem § 16 muss man daher haben

$$\mu(A - AA_1) = 0, \qquad \mu(A_1 - AA_1) = 0,$$

und da unsere Massfunktion eine reduzierte Massfunktion sein sollte, folgt daraus

$$A = A_1.$$

Genau zu demselben Resultat kommt man mit Hilfe der Definition des § 18 für den Fall, dass $ma = ma_0 = +\infty$ ist, und man erhält den

Sazt 6. - *Jeder Punktmenge a aus dem vollkommenen Körper $\boldsymbol{k}$ wird eindeutig ein Soma A des Masskörpers $\boldsymbol{K}$ zugeordnet.*

Die Abbildung

$$A = \tau a$$

wird dadurch charakterisiert, dass Darstellungen a' von A existieren, die sich von a nur um Nullmengen unterscheiden.

22. - Es bleibt noch zu zeigen, dass die gefundene Abbildung eine Homomorphie ist.

Es seien a und b zwei Punktmengen aus $\boldsymbol{k}$, die sich nur um Nullmengen unterscheiden, d.h. es sei

$$m(a - ab) = 0, \qquad m(b - ab) = 0. \tag{22.1}$$

Wir setzen

$$A = \tau a, \qquad B = \tau b \tag{22.2}$$

und bemerken, dass es mit Hilfe der Definition des § 18 Darstellungen a' von A und b' von B gibt, die sich von a bzw. von b nur um Nullmengen unterscheiden. Es muss also auch sein

$$m(a' - a'b') = 0, \qquad m(b' - a'b') = 0 \tag{22.3}$$

und daher auch

$$\mu(A - AB) = 0, \qquad \mu(B - AB) = 0. \tag{22.4}$$

Hieraus folgt aber

$$A = B. \tag{22.5}$$

Zwei einander äquivalente Punktmengen werden also immer auf dasselbe Soma abgebildet.

Es seien jetzt a und b zwei beliebige Punktmengen aus $\boldsymbol{k}$, ferner A und B ihre Bilder aus $\boldsymbol{K}$ und a', b' zwei Darstellungen von A und B, die sich von a bzw. von b nur um Nullmengen unterscheiden. Dann ist auch der Durchschnitt ab äquivalent dem Durchschnitt $a'b'$, der nach dem Satze 4 des § 18 eine Darstellung des Somas AB ist. Hieraus folgt aber nach dem soeben bewiesenen Resultat

$$\tau(ab) = \tau(a'b') = AB = \tau a \cdot \tau b.$$

Genau ebenso beweist man mit Hilfe des Satzes 5 von § 18, dass aus

$$v = a_1' \dotplus a_2' \dotplus \ldots$$

folgt

$$\tau v = \tau a_1 \dotplus \tau a_2 \dotplus \ldots$$

Endlich ist die Abbildung masstreu, d.h. man hat

$$\mu(\tau a) = ma$$

und jede Nullmenge aus $\boldsymbol{k}$ wird auf das leere Soma abgebildet. Alle Forderungen für die Homomorphie (§ 4) sind also erfüllt.

Satz 7. - (Hauptsatz). *Hat der Masskörper* $\boldsymbol{K}$ *einer reduzierten Inhaltsfunktion* μA *eine abzählbare Basis, so gibt es Körper* $\boldsymbol{k}$ *von linearen Punktmengen* a, *die man homomorph und eindeutig durch die Relation*

$$A = \tau a$$

auf $\boldsymbol{K}$ *abbilden kann, so dass der gewöhnliche Lebesguesche Inhalt* ma *von* a *gleich dem Masse* μA *der Bildmenge* A *ist.*

Man bemerke, dass bei der soeben besprochenen Homomorphie den « unteilbaren » Intervallen δ_p der x-Achse Somen

$$D_p = \tau \delta_p$$

zugeordnet werden, die keine echten Teile besitzen. Es sind dies die einzigen Somen, die diese Eigenschaft baben.

Satz 8. - *Besitzt der Masskörper einer reduzierten Inhaltsfunktion eine abzählbare Basis, so enthält er höchstens abzählbar viele Somen, die keine echten Teile besitzen.*

23. - Die Multiplikation der Inhaltsfunktionen. — Es seien

$$\nu' A' \quad \text{und} \quad \nu'' A'' \tag{23.1}$$

zwei reduzierte Inhaltsfunktionen von Somen, deren Masskörper $\boldsymbol{K}'$ und $\boldsymbol{K}''$ je eine abzählbare Basis haben. Wir konstruieren auf einer x-Achse einen Körper $\boldsymbol{k}'$ von nach Lebesgue messbaren Punktmengen a' und auf einer y-Achse einen Körper $\boldsymbol{k}''$ von ebensolchen Punktmengen a'', für welche der Satz 7 des vorigen Paragraphen gilt. Es gibt also zwei Homomorphieen

$$A' = \sigma' a' \quad \text{und} \quad A'' = \sigma'' a'', \tag{23.2}$$

für welche immer

$$\nu' A' = m_x a', \qquad \nu'' A'' = m_y a'' \tag{23.3}$$

ist, wolei $m_x a'$, $m_y a''$ die gewöhnlichen Lebesgueschen Inhalte auf der x- bzw der y-Achse bedeuten.

Wir nehmen an, dass die x- und die y-Achse in einer Ebene ein rechtwinkeliges Cartesisches Koordinatensystem bilden.

Bedeutet dann a' eine Punktmenge aus $\boldsymbol{k}'$ auf der x-Achse und a'' eine Punktmenge aus $\boldsymbol{k}''$ auf der y-Ache, so bezeichnen wir mit

$$a = a' \times a'' \tag{23.4}$$

die Punktmenge der xy-Ebene, die aus allen Punkten besteht, deren Abscisse auf a' und deren Ordinate auf a'' liegt. Die zweidimensionale Punktmenge a ist nach Lebesgue messbar und ihr Inhalt $m_{xy}a$ wird durch die Formel berechnet

$$m_{xy}a = m_x a' \cdot m_y a''. \tag{23.5}$$

Die Punktmengen (23.4) sind spezielle Punktmengen der Ebene, die wir, um uns kurz zu fassen, *Rechtecksmengen* nennen wollen. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{k}$ den kleinsten vollkommenen Körper von ebenen Punktmengen, der alle Rechtecksmengen enthält und der ausserdem mit jeder Punktmenge auch alle zu dieser äquivalenten Punktmengen enthält.

Man bestätigt sofort, dass jede Punktmenge a aus $\boldsymbol{k}$ sich nur um Nullmengen von einer Punktmenge a_0 unterscheidet, die folgendermassen gebaut ist: Erstens ist a_0 als zweidimensionale Menge messbar. Zweitens projiziert sich jeder Durchschnitt von a_0 mit einer Parallelen zu einer der Koordinatenachsen auf eine messbare Punktmenge dieser Achse. Drittens ist mit jedem Punkt (x, y) von a_0, dessen Abscisse x in das Innere eines der unteilbaren Intervalle δ_p' des Körpers $\boldsymbol{k}'$ fällt, die ganze zu δ_p' parallele Strecke, die den Punkt (x, y) enthält und die auf δ_p' projiziert wird, eine Teilmenge von a_0; ähnliches muss für die Intervalle δ_q'' aus $\boldsymbol{k}''$ gelten.

Jeder Punktmenge a, die dem soeben beschriebenen Körper $\boldsymbol{k}$ angehört, ordnen wir den gewöhnlichen Lebesgueschen zweidimensionalen Inhalt $m_{xy}a$ zu. Nun führen wir die masstreue Homomorphie

$$A = \sigma a$$

aus, für welche die Nullmengen aus $\boldsymbol{k}$ auf das leere Soma eines Körpers $\boldsymbol{K}$ von Somen A abgebildet werden. Wir definieren für alle Somen A aus $\boldsymbol{K}$ eine reduzierte Inhaltsfunktion durch die Gleichung

$$\nu A = m_{xy}a.$$

Die Inhaltsfunktion νA wird das *kombinatorische Produkt* der beiden Inhaltsfunktionen $\nu' A'$ und $\nu'' A''$ genannt. Diese Konstruktion ist im wesentlichen identisch mit derjenigen, die H. HAHN in der unter ([4]) zitierten Arbeit erfunden und untersucht hat.