Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Silvio Cinquini

Le pseudoestremaloidi dei problemi variazionali di ordine *n*

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 3-4 (1938), p. 195-204

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_195_0>

LE PSEUDOESTREMALOIDI DEI PROBLEMI VARIAZIONALI DI ORDINE n (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

I problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n, in forma ordinaria, nei quali cioè si devono trovare fra le curve

$$C^{[n]}: \quad y=y(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

di una certa classe quelle che rendono minimo l'integrale

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} = \int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

hanno formato oggetto, in questi ultimi anni, di numerose ricerche da parte di diversi Autori.

Fra gli altri, noi, dopo aver constatato che i metodi precedentemente seguiti (1) non avevano dato quei risultati che si desideravano e che erano necessari, perchè questo capitolo del Calcolo delle Variazioni non rimanesse troppo in arretrato, ci siamo proposti di estendere a questi problemi il metodo diretto del TONELLI, ben noto per i brillanti risultati che ha fornito ogniqualvolta è stato applicato.

A tal uopo ci siamo posti nelle condizioni più generali, considerando le curve $C^{[n]}$ tali che la funzione $y(x)$ sia assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini $y'(x)$, $y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$, che ogni punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, $(a \leq x \leq b)$ appartenga ad un campo $A^{[n]}$ ad $n+1$ dimensioni (limitato o illimitato) e che esista finito l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$. Per quanto il nostro studio non sia ancora terminato, un obbiettivo confronto fra i molteplici risultati che noi, superando talvolta notevoli difficoltà, abbiamo già stabilito

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) Per la bibliografia vedi i luoghi citati in: S. CINQUINI: *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. V (1936), pp. 169-190).

Soggiungiamo che nemmeno l'idea, che ha avuto qualche Autore, [vedi per esempio, per $n=2$, C. CARATHÉODORY: *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* (Teubner, 1935, Leipzig), Cap. 18, §§ 446-447, pp. 368-369], di considerare i problemi in questione come particolari problemi di LAGRANGE, avrebbe potuto fornire i risultati desiderati, per quanto la trattazione di questi ultimi problemi sia stata fatta, in questi ultimi anni, in tutta la sua generalità.

in modo definitivo, e quelli ottenuti da altri Autori, mette necessariamente in evidenza che le nostre ricerche hanno arrecato al problema in questione un contributo così notevole, da fornire, fin d'ora, una nuova inconfutabile prova della straordinaria efficacia del metodo del TONELLI.

Nel problema in questione presenta particolare interesse il sapere che la derivata di ordine $n-1$ della funzione da cui è definita una curva minimante è a rapporto incrementale limitato. In uno dei nostri precedenti lavori ([2]) abbiamo dedotto, dalla considerazione delle estremaloidi di ordine n, alcune condizioni sufficienti, affinchè sia verificata tale proprietà: altre ci proponiamo di stabilirne nel presente lavoro.

Nel caso particolare $n=1$ il TONELLI è pervenuto a tale obbiettivo mediante la considerazione delle pseudoestremaloidi ([3]), e noi ci domandiamo se l'idea di tale Autore possa estendersi efficacemente al caso $n>1$. La risposta non è immediata, perchè, premesso che l'equazione integro-differenziale delle pseudoestremaloidi non fornisce alcun suggerimento per il caso $n>1$, se ci proponiamo di estendere il teorema generale con cui il TONELLI ha stabilito che, sotto opportune ipotesi, ogni arco di curva minimante è una pseudoestremaloide, per dedurre, dal risultato a cui si perviene, la definizione cercata, sorgono subito, anche per $n=2$, delle difficoltà, ed altre nuove e maggiori se ne presentano quando sia $n>2$.

Nel caso $n=2$ abbiamo già definito ([4]) delle curve, chiamate pseudoestremaloidi del secondo ordine, giovandoci delle quali abbiamo enunciato un teorema generale che estende quello dato dal TONELLI per $n=1$. Nel presente lavoro affrontiamo il nostro problema in tutta la sua generalità, introducendo delle curve che chiamiamo pseudoestremaloidi di ordine n, le quali, per $n=1$, si riducono alle pseudoestremaloidi del TONELLI, e, per $n=2$, a quelle da noi recentemente definite.

Il teorema generale, che stabiliamo nel presente lavoro, contiene come caso particolare la proposizione enunciata per $n=2$, e la cui dimostrazione è assai meno complicata: avremo quindi cura di indicare al lettore le più notevoli semplificazioni che possono farsi in questo caso particolare.

Da tale teorema generale si deducono immediatamente le nuove proposizioni che stabiliscono, sotto opportune ipotesi, che la derivata di ordine $n-1$ della funzione da cui è definita una curva minimante è a rapporto incrementale limitato.

([2]) S. CINQUINI: *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine n.* (Annali di Matematica pura ed applicata, S. IV, T. XVI (1937), pp. 61-100). Tale lavoro verrà indicato nel seguito con Memoria (E).

([3]) L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. III (1934), pp. 213-237). Cap. II.

Vedi anche: E. J. MCSHANE: *The Du Bois Reymond Relation in the Calculus of Variations.* (Mathematische Annalen, Band 109 (1934), pp. 746-755).

([4]) In una comunicazione, tenuta all'Adunanza XXVI (1937) della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, e in corso di stampa nei relativi Atti.

1. - Generalità.

Supporremo note tutte le generalità ([5]), limitandoci a ricordare che consideriamo le curve

$$C^{[n]}: \quad y = y(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

per le quali la funzione $y(x)$ è assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini $y'(x), y''(x),\ldots, y^{(n-1)}(x)$, ogni punto $(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n-1)}(x))$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ appartiene ad un dato campo $A^{[n]}$ ad $n+1$ dimensioni ed esiste finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} = \int_a^b f(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n)}(x))dx,$$

ove $f(x, y, y',\ldots, y^{(n)})$ è una funzione definita e continua in ogni punto $(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$.

Inoltre, in tutto il presente lavoro, supporremo, salvo avviso contrario, che *la funzione f ammetta finite e continue, in ogni punto di $A^{[n]}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, le derivate parziali f_x, f_y, $f_{y'},\ldots, f_{y^{(n-2)}}$ e la $f_{y^{(n)}}$.*

2. - Definizione.

Una curva

$$y = y(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

tale che la funzione $y(x)$ sia assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini e che ogni punto $(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n-1)}(x))$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ appartenga al campo $A^{[n]}$, si dirà *pseudoestremaloide del problema di ordine n* (o più brevemente *pseudoestremaloide di ordine n*), relativa alla funzione $f(x, y, y',\ldots, y^{(n)})$, se le derivate parziali $f_x(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n)}(x))$, $f_y(\ldots)$, $f_{y'}(\ldots),\ldots, f_{y^{(n-2)}}(\ldots)$, e l'espressione $f(\ldots) - y^{(n)}(x) f_{y^{(n)}}(\ldots)$ sono integrabili in (a, b), e se in tutto tale intervallo è verificata l'uguaglianza

$$(1) \quad \frac{d}{dx}\int_a^x [f(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n)}(x)) - y^{(n)}(x) f_{y^{(n)}}(\ldots)]dx -$$
$$- \int_a^x \left[f_x(\ldots) + \sum_{j=1}^{n-1} y^{(j)}(x) f_{y^{(j-1)}}(\ldots)\right] dx -$$
$$- \int_a^x y^{(n)}(x) \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j-1)!}\int_a^x (t-x)^{j-1} f_{y^{(n-j-1)}}(t, y(t), y'(t),\ldots, y^{(n)}(t))dt\right]dx = \gamma + \int_a^x y^{(n)}(x) P(x) dx,$$

ove $f_{y^{(0)}} \equiv f_y$; γ è una costante, $P(x)$ è una funzione razionale intera di grado $n-2$, e la derivata del primo integrale va intesa come derivata a destra per $x=a$, e come derivata a sinistra per $x=b$.

([5]) Vedi S. CINQUINI, luoghi cit. in ([1]) e in ([2]).

Osservazione. - L'equazione (1) può scriversi in altro modo; ci limitiamo qui a far rilevare la forma che essa può assumere, rispettivamente, per $n=2, 3$:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x [f-y''f_{y''}]dx-\int_a^x f_x dx-y'\int_a^x f_y dx=C_0+C_1y',$$

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\int_a^x [f-y'''f_{y'''}]dx-\int_a^x f_x dx-(y'-xy'')\int_a^x f_y dx-y''\int_a^x (xf_y+f_{y'})dx=$$
$$=C_0+C_1y''+C_2(y'-xy''),$$

ove C_0, C_1, C_2 sono delle costanti.

3. - Teorema.

Se per ogni campo limitato $A_L^{[n]}$, tutto costituito di punti di $A^{[n]}$, è possibile determinare quattro numeri positivi M, N_1, N_2, N_3, tali che, per tutti i punti $(x, y, y',...., y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$, per ogni $y^{(n)}$ finito e per ogni n-pla φ, φ_0, φ_1,...., φ_{n-2}, per la quale sia $\varphi^2+\varphi_0^2+\varphi_1^2+....+\varphi_{n-2}^2\leq M^2$, e $(x+\varphi, y+\varphi_0, y'+\varphi_1,...., y^{(n-2)}+\varphi_{n-2}, y^{(n-1)})$ sia un punto di $A^{[n]}$, sia verificata la disuguaglianza

$$(3)\qquad |f_x(x+\varphi, y+\varphi_0, y'+\varphi_1,...., y^{(n-2)}+\varphi_{n-2}, y^{(n-1)}, y^{(n)})|+$$
$$+|f_y(....)|+|f_{y'}(....)|+....+|f_{y^{(n-2)}}(....)|\leq$$
$$\leq N_1|y^{(n)}|+N_2|f(x, y, y',...., y^{(n)})|+N_3;$$

se $C_0^{[n]}$: $y=y_0(x)$, $(a_0\leq x\leq b_0)$ è una curva minimante per $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ in una classe $K^{[n]}$ di curve $C^{[n]}$; ogni suo arco $\overline{C}_0^{[n]}$, i cui punti $(x, y_0(x), y_0'(x),...., y_0^{(n-1)}(x))$, ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo $A^{[n]}$, e tale che ogni suo arco parziale, completamente interno all'arco $\overline{C}_0^{[n]}$, sia un arco di indifferenza rispetto ad $A^{[n]}$ e a $K^{[n]}$ (6), *è una pseudoestremaloide di ordine n relativa alla funzione f.*

a). Osserviamo innanzi tutto che, se su quasi-tutto l'arco $\overline{C}_0^{[n]}$ è $y_0^{(n)}(x)=0$, il nostro asserto è già provato, perchè il primo membro della (1) si riduce ad una costante e il secondo a γ.

b). In caso contrario, per semplicità di scrittura, sviluppiamo la nostra

---

(6) Un arco parziale $C_1^{[n]}$: $y=y_0(x)$, (a_1, b_1) di $C_0^{[n]}$ dicesi arco di indifferenza rispetto ad $A^{[n]}$ e a $K^{[n]}$, se esiste un numero $\varrho>0$, tale che, sostituendo all'arco $C_1^{[n]}$ un qualunque arco $C^{[n]}$: $y=y(x)$, (a_1, b_1), appartenente all'intorno $(\varrho)^n$ di $C_1^{[n]}$ (ed anche al campo $A^{[n]}$) e tale inoltre che si abbia

$$\left.\begin{array}{ll} y(a_1)=y_0(a_1), & y^{(r)}(a_1)=y_0^{(r)}(a_1) \\ y(b_1)=y_0(b_1), & y^{(r)}(b_1)=y_0^{(r)}(b_1) \end{array}\right\}\quad (r=1, 2,...., n-1),$$

si ottenga ancora una curva della classe $K^{[n]}$.

dimostrazione supponendo $n=3$; il lettore si renderà conto molto facilmente che, se è $n>3$, la dimostrazione è più macchinosa, ma non presenta alcuna nuova difficoltà concettuale.

Si faccia dunque $n=3$, e si proceda come al n.° 7 della Memoria (E), considerando un qualunque arco parziale $C_1^{[n]}$, completamente interno all'arco $\overline{C}_0^{[n]}$, e si indichino con a, b le ascisse dei punti terminali di $C_1^{[n]}$. Si sostituisca nella definizione della funzione $\psi_r(x)$ alla derivata $f_{y'''}$ l'espressione $f-y'''f_{y'''}$, e si abbia l'avvertenza di scegliere i valori x_0, x_1, x_2, x_3, appartenenti all'insieme $\overline{E}_r$, in modo che i minori estratti dalla matrice

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 \\ y_0''(x_j) \\ y_0'(x_j)-x_jy_0''(x_j) \end{matrix} \right\|, \qquad (j=0,\,1,\,2,\,3),$$

non siano tutti nulli. Ciò è sempre possibile, purchè il numero r, di cui al n.° 7 della Memoria (E), sia preso sufficientemente grande, perchè in caso contrario il nostro teorema sarebbe già dimostrato per quanto si è detto in a).

Successivamente, in corrispondenza ad ogni numero reale t, in valore assoluto minore di un certo $\bar{t}$, (positivo e sufficientemente piccolo), determiniamo quattro numeri $B_{r,j,t}$, $(j=0,\,1,\,2,\,3)$, non tutti nulli, tali che ognuno di essi non superi, in valore assoluto, l'unità, e soddisfacenti alle condizioni seguenti

$$(5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{3} B_{r,j,t}=0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{3} B_{r,j,t}\int\limits_{l_{r,j}} y_0''(x)dx=0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{3} B_{r,j,t}\int\limits_{l_{r,j}} [y_0'(x)-xy_0''(x)]dx+ \\ \displaystyle\qquad +t\left\{\sum_{j=0}^{3} B^2_{r,j,t}\int\limits_{l_{r,j}} dx\int\limits_{l_{r,j,x}} y_0''(x)dx+m(l_r)\sum_{j=0}^{2} B_{r,j,t}\Big(\sum_{i=j+1}^{3} B_{r,i,t}\Big)\int\limits_{l_{r,j}} y_0''(x)dx\right\}=0, \end{cases}$$

ove, per ogni x di $l_{r,j}$, si è indicato con $l_{r,j,x}$ l'insieme dei punti di $l_{r,j}$ di ascissa non superiore ad x e $m(l_r)$ indica la misura comune di ciascuno degli insiemi $l_{r,j}$, $(j=0,\,1,\,2,\,3)$ (7).

---

(7) Rileviamo che nel caso $n=2$ la nostra dimostrazione si semplifica notevolmente, perchè, in tal caso, i numeri $B_{r,j,t}$ si possono fissare in modo indipendente da t, perchè le (5) si riducono a

$$\sum_{j=0}^{2} B_{r,j}=0, \qquad \sum_{j=0}^{2} B_{r,j}\int\limits_{l_{r,j}} y_0'(x)dx=0;$$

e quindi le funzioni $i_{r,t}(x)$, $\Omega_{r,t}(x)$ sono indipendenti da t, e ξ diviene funzione lineare di t.

Possiamo renderci conto facilmente che è possibile determinare i numeri $B_{r,j,t}$ in modo che soddisfino alle condizioni indicate e non siano tutti nulli.

A tal uopo, indicati con $B_{r,j}$ i valori che le costanti $B_{r,j,t}$ assumono per $t=0$, abbiamo dalle (5)

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{j=0}^{3} B_{r,j}=0, \\ \sum_{j=0}^{3} B_{r,j}\int_{l_{r,j}} y_0''(x)dx=0, \\ \sum_{j=0}^{3} B_{r,j}\int_{l_{r,j}} [y_0'(x)-xy_0''(x)]dx=0, \end{cases}$$

e da queste si deduce, in modo analogo al n.° 7 della Memoria (E),

$$(7)\qquad \left\{ \sum_{j=0}^{3} B_{r,j}=0, \qquad \sum_{j=0}^{3} B_{r,j}y_0''(x_j)=0, \qquad \sum_{j=0}^{3} B_{r,j}[y_0'(x_j)-x_jy_0''(x_j)]=0. \right.$$

Si potrebbe dunque soddisfare alle (7), prendendo i numeri $B_{r,j}$ proporzionali ai minori estratti dalla matrice (4), ove il fattore di proporzionalità può essere un numero reale di valore assoluto comunque piccolo.

Si comprende allora facilmente che, siccome le derivate $y_0'(x)$, $y_0''(x)$ sono funzioni continue, è possibile scegliere gli x_j', $(j=0, 1, 2, 3)$, di cui al n.° 7 della Memoria (E), sufficientemente prossimi ai rispettivi x_j, con $m(l_r)>0$, in modo che le costanti che debbono soddisfare alle (6) non siano tutte nulle ed abbiano modulo non superiore all'unità. Infine, applicando in modo opportuno il teorema di esistenza per le funzioni implicite, ci si rende conto che per ogni t, di modulo sufficientemente piccolo, è possibile determinare i numeri $B_{r,j,t}$ (che vengono ad essere funzioni di t), in modo che soddisfino alle condizioni richieste e verifichino le (5).

Definita una funzione $i_{r,t}(x)$, ponendo

$$\begin{aligned} &i_{r,t}(x)=B_{r,j,t}, && \text{nei punti di } l_{r,j}, \quad (j=0, 1, 2, 3), \\ &i_{r,t}(x)=0, && \text{in tutti gli altri punti di } (a_0, b_0), \end{aligned}$$

e la funzione

$$\Omega_{r,t}(x)=\int_{a_0}^{x} dx\int_{a_0}^{x} dx\int_{a_0}^{x} i_{r,t}(x)dx,$$

si costruisca una curva $C_{r,t}^{[3]}$, il cui punto corrente si indichi con (ξ, η), ponendo per ogni x di (a_0, b_0),

$$\begin{cases} \xi = x + t\Omega''_{r,t}(x), \\ \eta = y_0(x) + t\int\limits_{a_0}^{x}\Big[y_0'(x)\Omega'''_{r,t}(x) + \int\limits_{a_0}^{x} y_0''(x)\Omega'''_{r,t}(x)dx\Big]dx + \\ \qquad + t^2\int\limits_{a_0}^{x}\Omega'''_{r,t}(x)\Big[\int\limits_{a_0}^{x}\Omega'''_{r,t}(x)y_0''(x)dx\Big]dx, \end{cases}$$

e tenendo presente, per il seguito, che è $\Omega'''_{r,t}(x) = 0$, per $a_0 \leq x < x_0$.

Con considerazioni che tralasciamo si vede facilmente che per ogni t, in valore assoluto sufficientemente piccolo, la curva $C^{[3]}_{r,t}$ può rappresentarsi sotto la forma

$$\eta = \eta_{r,t}(\xi), \qquad a_0 \leq \xi \leq b_0,$$

che la funzione $\eta_{r,t}(\xi)$ risulta assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi due ordini, con

$$\frac{d\eta_{r,t}}{d\xi} = y_0'(x(\xi)) + t\int\limits_{a_0}^{x(\xi)} y_0''(x)\Omega'''_{r,t}(x)dx, \qquad \frac{d^2\eta_{r,t}}{d\xi^2} = y_0''(x(\xi));$$

quasi-dappertutto in (a_0, b_0) è

$$\frac{d^3\eta_{r,t}}{d\xi^3} = \frac{y_0'''(x(\xi))}{1 + t\Omega'''_{r,t}(x(\xi))},$$

e inoltre ogni punto $(\xi, \eta_{r,t}(\xi), \eta'_{r,t}(\xi), \eta''_{r,t}(\xi))$, $(a_0 \leq \xi \leq b_0)$, appartiene al campo $A^{[3]}_L$.

Per la prima delle (5) è

$$\xi(x_0) = x_0, \qquad \xi(x_3) = x_3,$$

e quindi, in virtù delle rimanenti (5), risulta

$$\eta^{(j)}_{r,t}(x_0) = y^{(j)}_0(x_0), \qquad \eta^{(j)}_{r,t}(x_3) = y^{(j)}_0(x_3), \qquad (j = 0, 1, 2;\ \eta^{(0)}_{r,t} \equiv \eta_{r,t},\ y^{(0)}_0 \equiv y_0),$$

e inoltre

$$\eta_{r,t} \equiv y_0, \quad \text{in} \quad (a_0, x_0) \quad \text{e in} \quad (x_3, b_0).$$

Tenendo conto della (3) si prova, senza difficoltà, che esiste finito l'integrale

$$I^{[3]}_{C^{[3]}_{r,t}} = \int\limits_{a_0}^{b_0} f(\xi, \eta_{r,t}(\xi), \eta'_{r,t}(\xi), \eta''_{r,t}(\xi), \eta'''_{r,t}(\xi))d\xi,$$

e si conclude quindi che la curva

$$C^{[3]}_{r,t}: \quad \eta = \eta_{r,t}(\xi), \qquad (a_0 \leq \xi \leq b_0),$$

è una curva $C^{[3]}$ e appartiene alla classe $K^{[3]}$, per tutti i t, in valore assoluto sufficientemente piccoli.

Siccome $C_0^{[3]}$ è una curva minimante per $I^{[3]}_{C^{[3]}}$, per tali valori di t deve essere

$$I^{[3]}_{C^{[3]}_{r,t}} - I^{[3]}_{C^{[3]}_0} \geqslant 0.$$

Indicando con $\Omega_r(x)$ la funzione $\Omega_{r,0}(x)$, abbiamo passando al limite per $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[I^{[3]}_{C^{[3]}_{r,t}} - I^{[3]}_{C^{[3]}_0}\right] = \int_{x_0}^{x_3} \Big\{ \Omega_r''(x) f_x(x, y_0(x), y_0'(x), y_0''(x), y_0'''(x)) + \tag{8}$$
$$+ \left[\int_{x_0}^{x}\left(y_0'(x)\Omega_r'''(x) + \int_{x_0}^{x} y_0''(x)\Omega_r'''(x)dx\right)dx\right] f_y(\ldots.) +$$
$$+ \left[\int_{x_0}^{x} y_0''(x)\Omega_r'''(x)dx\right] f_{y'}(\ldots.) + \Omega_r'''(x)\left[f(\ldots.) - y_0'''(x) f_{y'''}(\ldots.)\right]\Big\}\, dx.$$

Dalla (8), con opportune integrazioni per parti, tenendo conto delle (6), tenendo presente che è

$$\int_{x_0}^{x_3}\left[\Omega_r'''(x)y_0'(x) + \int_{x_0}^{x} y_0''(x)\Omega_r'''(x)dx\right]dx = \int_{x_0}^{x_3} \Omega_r'''(u)\{y_0'(u) + (x_3 - u)y_0''(u)\}\,du,$$

e ponendo

$$F(x) = f(x, y_0, y_0', y_0'', y_0''') - y_0''' f_{y'''}(\ldots.) - \int_a^x f_x(\ldots.)dx - y_0' \int_a^x f_y(\ldots.)dx -$$
$$- y_0''\left[\int_a^x f_{y'}(\ldots.)dx - \int_a^x dx \int_a^x f_y(\ldots.)dx\right],$$

risulta

$$\int_{x_0}^{x_3} \Omega_r'''(x) F(x)dx = 0,$$

cioè

$$\sum_{j=0}^{3} B_{r,j} \int_{i_{r,j}} F(x)dx = 0.$$

Da quest'ultima, in modo analogo al n.° 7 della Memoria (E), si deduce

$$\sum_{j=0}^{3} B_{r,j} F(x_j) = 0. \tag{9}$$

Siccome x_0, x_1, x_2, x_3, sono quattro valori qualunque di $\overline{E}_r$, purchè soddisfacenti alla condizione indicata all'inizio di b), dalle (7) e (9) segue che esistono tre costanti $\gamma_0^{(r)}$, $\gamma_1^{(r)}$, $\gamma_2^{(r)}$, tali che risulta per tutti gli x di $\overline{E}_r$, cioè in quasi-tutto E_r,

$$F(x)=\gamma_0^{(r)}+\gamma_1^{(r)}y_0''(x)+\gamma_2^{(r)}(y_0'(x)-xy_0''(x)). \tag{10}$$

Per concludere che è

$$\gamma_m^{(r)}=\gamma_m^{(r+1)}, \qquad (m=0,\,1,\,2), \tag{11}$$

si tenga presente che le costanti $\gamma_m^{(r)}$, $(m=0, 1, 2)$ sono completamente determinate, quando siano fissati tre qualunque dei 4 valori x_0, x_1, x_2, x_3, per esempio, per fissare le idee, x_0, x_1, x_2, in modo che il relativo determinante estratto dalla matrice (4) sia diverso dallo zero, e non sia

$$F(x_0)=F(x_1)=F(x_2)=0.$$

A tutte queste condizioni si può sicuramente soddisfare, prendendo r abbastanza grande, se non è, in quasi-tutto (a, b), $F(x)=0$. In quest'ultima ipotesi il nostro asserto è già provato e in caso contrario basta scegliere i valori x_0, x_1, x_2 in modo che appartengano sia a $\overline{E}_r$, sia a $\overline{E}_{r+1}$ e che siano soddisfatte le condizioni indicate, per poter concludere facilmente che sono verificate le (11), e quindi che esistono tre costanti γ_0, γ_1, γ_2 tali che in quasi-tutto (a, b), cioè su quasi-tutto l'arco $C_1^{[n]}$, è

$$F(x)=\gamma_0+\gamma_1 y_0''(x)+\gamma_2(y_0'(x)-xy_0''(x)). \tag{12}$$

Con note considerazioni se ne deduce che la (12) è verificata su quasi-tutto l'arco $\overline{C}_0^{[n]}$, e quindi anche che su tutto tale arco è verificata la (2), ossia la (1) per $n=3$, come volevasi provare.

Osservazione. - Le osservazioni I, II e IV, fatte dal TONELLI per $n=1$ ([8]), si estendono immediatamente al teorema del presente numero.

4. - Condizioni sufficienti affinchè una pseudoestremaloide di ordine n abbia la derivata di ordine $n-1$ a rapporto incrementale limitato.

a). Dalle condizioni, date ai n.i 8 e 9 della Memoria (E) per le estremaloidi di ordine n, si deducono immediatamente altrettante condizioni sufficienti, affinchè la derivata di ordine $n-1$ della funzione, da cui è definita una pseudoestremaloide di ordine n, sia a rapporto incrementale superiormente [inferiormente] limitato, e quindi anche a rapporto incrementale limitato, sostituendo alla derivata $f_{y^{(n)}}$ l'espressione $f-y^{(n)}f_{y^{(n)}}$ e supponendo, per quanto riguarda le condizioni analoghe a quelle dei 8, β) e 9, β), che la funzione f dipenda soltanto dalle variabili $y^{(n-1)}$ e $y^{(n)}$.

([8]) Vedi luogo cit. in ([3]), n.° 12.

β). Se poi la funzione f ammette finita e continua, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ e per tutti i valori finiti di $y^{(n)}$, anche la derivata $f_{y^{(n-1)}}$, e se, oltre alle ipotesi del n.° 3, sono verificate le analoghe di quelle del n.° 9, α) o del n.° 9, β) della Memoria (E), ogni arco $\overline{C}_0^{[n]}$ (di cui al n.° 3) è un'estremaloide di ordine n, definita da una funzione la cui derivata di ordine $n-1$ è a rapporto incrementale limitato ([9]).

([9]) Per $n=1$, vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([3]), n.^{i} 13, 14, 15.