

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ANTONIO MAMBRIANI

**Determinazione della soluzione polinomiale dell'equazione**

$$(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$$

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 7, n° 3-4 (1938), p. 189-194*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1938\\_2\\_7\\_3-4\\_189\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_189_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**DETERMINAZIONE DELLA SOLUZIONE POLINOMIALE  
DELL'EQUAZIONE  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$**

di ANTONIO MAMBRIANI (Bologna).

Consideriamo l'equazione differenziale

$$(E) \quad (a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0,$$

con  $a_0, a_1, b_0, b_1$  costanti date,  $a_0$  e  $a_1$  non contemporaneamente nulle,  $b_1 \neq 0$  ed  $n$  intero non negativo: una tale equazione ha fra le sue soluzioni un polinomio  $y_n(x)$  di grado  $n$ .

Nel caso  $a_0, a_1, b_0, b_1$  costanti *reali*, il prof. P. BURGATTI, nel Vol. I di questi « Annali » (1), si è occupato della realtà degli zeri del polinomio  $y_n(x)$  e poi, contemporaneamente e indipendentemente, i proff. B. LEVI, nello stesso Vol. I di questi « Annali » (2), e G. SANSONE, nei « Rend. dei Lincei » (3), hanno completato i risultati del BURGATTI. Le acute analisi di questi Autori sono fatte tutte senza conoscere un'espressione di  $y_n(x)$ .

Nel presente lavoro, applicando un procedimento già da me indicato (4) per la risoluzione di equazioni differenziali lineari, determino rapidamente per la soluzione polinomiale  $y_n(x)$ , di (E), la seguente espressione

$$(1) \quad y_n(x) = (b_1x + b_0)^n + \binom{n}{2} a_0 b_1 (b_1x + b_0)^{n-2} + \\ + \binom{n}{4} 1 \cdot 3 (a_0 b_1)^2 (b_1x + b_0)^{n-4} + \binom{n}{6} 1 \cdot 3 \cdot 5 (a_0 b_1)^3 (b_1x + b_0)^{n-6} + \dots$$

(1) P. BURGATTI: *Sull'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$  e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di  $y_n(x) = 0$* . Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. I (1932), pp. 165-172.

(2) B. LEVI: *Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomiale dell'equazione differenziale  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$* . Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. I (1932), pp. 255-261.

(3) G. SANSONE: *Sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$* . Nota I. Rend. R. Accad. Naz. Lincei, S. VI, Vol. XV (1932), pp. 125-130. — *Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione  $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$* . Nota II. Idem, pp. 194-197.

(4) A. MAMBRIANI: *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*. Atti I° Congresso Naz. dei Matematici di Firenze, aprile 1937 (in corso di stampa).

nel caso  $a_1=0$ , la seguente altra

$$(2) \quad y_n(x) = b_1^n (a_1 x + a_0)^n + n(\delta + (n-1)a_1^2) b_1^{n-1} (a_1 x + a_0)^{n-1} + \\ + \binom{n}{2} (\delta + (n-1)a_1^2) (\delta + (n-2)a_1^2) b_1^{n-2} (a_1 x + a_0)^{n-2} + \\ \dots + \binom{n}{n-1} (\delta + (n-1)a_1^2) (\delta + (n-2)a_1^2) \dots (\delta + a_1^2) b_1 (a_1 x + a_0) + \\ + \binom{n}{n} (\delta + (n-1)a_1^2) (\delta + (n-2)a_1^2) \dots (\delta + a_1^2) \delta$$

nel caso  $a_1 \neq 0$ , avendo posto col BURGATTI  $\delta = a_1 b_0 - a_0 b_1$ . Possiamo notare subito che la (2) si può anche scrivere (indicando con  $D$  la derivazione rispetto ad  $x$ ):

$$(2') \quad y_n(x) = a_1^n (a_1 x + a_0)^{1 - \frac{\delta}{a_1^2} - \frac{b_1}{a_1} x} D^n \left\{ (a_1 x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2} + n - 1} \frac{b_1}{e^{a_1 x}} \right\},$$

ed ancora, quando sia in particolare  $\delta = \nu a_1^2$  ( $\nu = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ),

$$(3) \quad y_n(x) = a_1^{n+\nu-1} b_1^{-\nu+1} e^{-\frac{b_1}{a_1} x} D^{n+\nu-1} \left\{ (a_1 x + a_0)^n e^{\frac{b_1}{a_1} x} \right\},$$

qualora si precisi  $D^{-1}$  ponendo  $D^{-1} e^{a_1 x} = \frac{b_1}{a_1} e^{\frac{b_1}{a_1} x}$ .

Il polinomio  $y_n(x)$  è dunque un *polinomio di APPELL* <sup>(5)</sup> o ha molte analogie con un simile polinomio; in particolare, quando è  $a_0=0, a_1=1, b_0=a+1, b_1=-1$  esso è il noto *polinomio di TCHEBYCHEFF-LAGUERRE*, quando è  $a_0=1, a_1=0, b_0=0, b_1=-1$  esso è il noto *polinomio di HERMITE*.

La conoscenza delle eleganti espressioni precedenti di  $y_n(x)$  permette poi, fra l'altro, di giungere con facilità alle sopra accennate conclusioni del BURGATTI, del LEVI e del SANSONE <sup>(6)</sup>.

<sup>(5)</sup> Con denominazione introdotta dal PINCHERLE, si chiamano *polinomi di Appell* in una variabile  $t$  e relativi ad una successione  $a_0, a_1, a_2, \dots$  i polinomi

$$a_0 t^n + n a_1 t^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 t^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} t + \binom{n}{n} a_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

<sup>(6)</sup> Nel periodo dalla presentazione del manoscritto di questo lavoro per la stampa alla correzione delle bozze, il ch.<sup>mo</sup> prof. B. LEVI e l'amico prof. L. ONOFRI mi hanno osservato, molto gentilmente, che la risoluzione dell'equazione, anche più generale di (E),  $(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' + c y = 0$  era già stata fatta in antico. Si confronti, ad esempio:

J. DIENGER: *Die Differential-und Integralrechnung*, Bd. II, Stuttgart, 1868; in particolare, pp. 119-122.

HJ. HOLMGREN: *Sur l'intégration de l'équation différentielle*  $(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$ . Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 7, n. 9 (1869), pp. 1-58.

Questi autori, però, — seguendo vie che mi sembrano avere poco i caratteri di procedimento di ricerca — non danno pel polinomio  $y_n(x)$  espressioni di forma semplice quale, ad esempio, si richiede ora per rispondere ai quesiti posti dal BURGATTI.

Rimando ad altro lavoro la deduzione di conclusioni di carattere più generale che discendono dal metodo qui seguito.

**1. - Trasformazione dell'equazione (E).**

Incominciamo coll'osservare che, essendo  $a_0, a_1$  delle costanti ( $a_1 \neq 0$ ), si ha (7):

$$(4) \quad \underline{(a_1x + a_0)^{n+1} D(a_1x + a_0)^{-n} y} = (a_1x + a_0)y' - na_1y.$$

Consideriamo dapprima il caso — più semplice — in cui nella (E) sia  $a_1 = 0$ , cioè il caso dell'equazione

$$(E_0) \quad a_0y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0, \quad (a_0 \neq 0, b_1 \neq 0).$$

In virtù di (4) quest'equazione si può scrivere:

$$(E_0') \quad a_0D^2y + \underline{(b_1x + b_0)^{n+1} D(b_1x + b_0)^n y} = 0.$$

Di qua nel numero seguente dedurremo la (1).

Nel caso  $a_1 \neq 0$  osserviamo che (E) si può scrivere:

$$(a_1x + a_0)y'' + \left\{ \frac{b_1}{a_1} (a_1x + a_0) + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_1} \right\} y' - nb_1y = 0$$

od anche, ponendo col BURGATTI  $a_1b_0 - a_0b_1 = \delta$ ,

$$\left\{ (a_1x + a_0)y'' + \frac{\delta}{a_1} y' \right\} + \frac{b_1}{a_1} \{ (a_1x + a_0)y' - na_1y \} = 0.$$

Quest'equazione, tenendo presente la (4), si può quindi scrivere nella forma

$$\underline{(a_1x + a_0)^{1 - \frac{\delta}{a_1^2}} D(a_1x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} y'} + \frac{b_1}{a_1} \underline{(a_1x + a_0)^{n+1} D(a_1x + a_0)^{-n} y} = 0$$

od anche

$$(E') \quad \underline{(a_1x + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}} D(a_1x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} Dy} + \frac{b_1}{a_1} \underline{(a_1x + a_0)^n D(a_1x + a_0)^{-n} y} = 0.$$

Di qua nel numero seguente dedurremo la (2).

**2. - Determinazione della soluzione  $y_n(x)$ .**

1°). Partiamo da  $(E_0')$  ed applichiamo ad ambo i membri di essa un'operazione inversa di  $\underline{(b_1x + b_0)^{n+1} D(b_1x + b_0)^{-n}}$  quale  $\underline{(b_1x + b_0)^n I(b_1x + b_0)^{-n-1}}$ , dove  $I$

---

(7) Sul significato — del resto molto naturale — della scrittura nel primo membro di (4) e di altre analoghe, si confronti loc. cit. in (4).

indica « determinazione di una primitiva particolare ». S'ottiene:

$$(5) \quad \underline{a_0(b_1x + b_0)^n I(b_1x + b_0)^{-n-1} D^2 y + y = c(b_1x + b_0)^n}$$

con  $c$  costante arbitraria. Quest'equazione ha la *soluzione formale*

$$(6) \quad y = c \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_0^\nu \{ \underline{a_0(b_1x + b_0)^n I(b_1x + b_0)^{-n-1} D^2} \}^\nu (b_1x + b_0)^n.$$

Se ora precisiamo  $I$  ponendo  $I(b_1x + b_0) = \frac{1}{2b_1} (b_1x + b_0)^2$ , si vede facilmente, eseguendo i semplici calcoli indicati nel secondo membro di (6), che la (6) ci dà una *soluzione effettiva* in quanto la serie precedente si riduce ai suoi primi  $n+1$  termini, essendo nulli tutti gli altri. Calcolando successivamente questi termini non nulli e facendo, in (6),  $c=1$  si ottiene proprio l'espressione di  $y_n(x)$  data da (1).

2°). Partiamo ora dalla (E') ed applichiamo ad ambo i membri di essa un'operazione inversa di  $\frac{b_1}{a_1} \underline{a_1(a_1x + a_0)^n D(a_1x + a_0)^{-n}}$  quale  $\frac{a_1}{b_1} \underline{a_1(a_1x + a_0)^n I(a_1x + a_0)^{-n}}$ .

Risulta:

$$(7) \quad \frac{a_1}{b_1} \underline{a_1(a_1x + a_0)^n I(a_1x + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n} D(a_1x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} D y + y = c(a_1x + a_0)^n}$$

con  $c$  costante arbitraria. Quest'equazione ha la *soluzione formale*

$$(8) \quad y = c \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{a_1^\nu}{b_1^\nu} \{ \underline{a_1(a_1x + a_0)^n I(a_1x + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n} D(a_1x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} D} \}^\nu (a_1x + a_0)^n.$$

Se ora precisiamo  $I$  ponendo  $I(a_1x + a_0) = \frac{1}{2a_1} (a_1x + a_0)^2$ , si vede facilmente, eseguendo i semplici calcoli indicati nel secondo membro di (8), che la (8) ci dà una *soluzione effettiva* in quanto la serie precedente si riduce ai suoi primi  $n+1$  termini, essendo nulli tutti gli altri. Calcolando successivamente questi termini non nulli e facendo, in (8),  $c=1$  si ottiene proprio l'espressione di  $y_n(x)$  data da (2).

### 3. - Osservazioni.

1<sup>a</sup>). In modo del tutto analogo alla (E<sub>0</sub>) si tratta l'equazione

$$a_0 y^{(m)} + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0, \quad (m > 2).$$

Così pure, in modo del tutto analogo alla (E) con  $a_1 \neq 0$  si tratta l'equazione

$$(a_1x + a_0)y^{(m)} + hy^{(m-1)} + k \cdot (a_1x + a_0)y' - nka_1 = 0,$$

con  $h, k$  costanti ( $k \neq 0$ ). Si possono però fare delle generalizzazioni molto più estese ed interessanti, come indicherò in altro lavoro.

2<sup>a</sup>). Circa l'altra soluzione  $\bar{Y}(x)$  di (E), linearmente indipendente da  $y_n(x)$ , risulta quindi la seguente espressione:

$$Y(x) = y_n(x) \int_{x_0}^x y_n^{-2}(t) e^{-\frac{t}{a_0} \left( \frac{b_1}{2} t + b_0 \right)} dt$$

nel caso  $a_1 = 0$ , la seguente altra

$$Y(x) = y_n(x) \int_{x_0}^x y_n^{-2}(t) (a_1 t + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}} e^{-\frac{b_1}{a_1} t} dt$$

nel caso  $a_1 \neq 0$ . Si può anche osservare <sup>(8)</sup> che, derivando  $n$  volte la (E) e risolvendo l'equazione così ottenuta, si ha:

$$(9) \quad Y^{(n+1)}(x) = A e^{-\frac{x}{a_0} \left( \frac{b_1}{2} x + b_0 \right)}$$

nel caso  $a_1 = 0$  e

$$(10) \quad Y^{(n+1)}(x) = B \cdot (a_1 x + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2} - n} e^{-\frac{b_1}{a_1} x}$$

nel caso  $a_1 \neq 0$ , dove  $A$  e  $B$  sono costanti convenienti se si vuole proprio la  $Y(x)$  precedente. Ne segue, nel caso  $a_1 = 0$ ,

$$Y(x) = \frac{A}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n e^{-\frac{t}{a_0} \left( \frac{b_1}{2} t + b_0 \right)} dt$$

ossia

$$Y(x) = \frac{A}{n!} \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} x^{n-v} \int_{x_0}^x t^v e^{-\frac{t}{a_0} \left( \frac{b_1}{2} t + b_0 \right)} dt$$

e, nel caso  $a_1 \neq 0$ ,

$$Y(x) = \frac{B}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n (a_1 t + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2} - n} e^{-\frac{b_1}{a_1} t} dt$$

ossia

$$Y(x) = \frac{B}{n! a_1^n} \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} \binom{n}{v} (a_1 x + a_0)^v \int_{x_0}^x (a_1 t + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2} - v} e^{-\frac{b_1}{a_1} t} dt.$$

Per la determinazione in forma di serie di  $Y(x)$  servono le (9) e (10) ed

<sup>(8)</sup> Cfr. loc. cit. in <sup>(4)</sup>, pp. 171-172.

anche egregiamente le (E<sub>0</sub>'), (E') precedenti; ed utile è notare che la (E) nel caso  $a_1 \neq 0$  si può anche scrivere:

$$(E'') \quad \frac{(a_1x + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}} D(a_1x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} D\left(e^{\frac{b_1}{a_1}x} y\right) -}{-\frac{b_1}{a_1} (a_1x + a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2} - n} D(a_1x + a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2} + n} \left(e^{\frac{b_1}{a_1}x} y\right)} = 0,$$

da cui discende un'interessante espressione asintotica di  $Y(x)$ ; ma su ciò non indugiamo per non uscire dall'argomento del presente lavoro.