Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Géza Grünwald
Paul Turán

Über Interpolation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 7, n° 2 (1938), p. 137-146
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_2_137_0>

ÜBER INTERPOLATION

von GÉZA GRÜNWALD und PAUL TURÁN (Budapest).

§ 1.

Es sei im Intervalle $[-1, +1]$ die « Punktgruppenfolge »

$$\mathfrak{A} \equiv \left\{ \begin{matrix} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, \ldots, & & x_n^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\} \tag{1}$$

gegeben, wo für alle Zeilen

$$1 \geqq x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \ldots > x_n^{(n)} \geqq -1 \tag{2}$$

gilt. Unter der « n-ten Lagrangeschen Interpolationspolynom von $f(x)$ bezogen auf $\mathfrak{A}$ » verstehen wir, wie üblich das Polynom

$$L_n[f(x)] \equiv \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})} \equiv \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x), \tag{3}$$

wo

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}). \tag{4}$$

Es wird zu keinen Missverständnissen führen, wenn wir manchmal die Abhängigkeit der $L_n[f(x)]$-s von $\mathfrak{A}$ nicht explicit ausdrücken und später statt $x_k^{(n)}$ und $\omega_n(x)$ nur x_k und $\omega(x)$ schreiben. Die Polynome $l_k^{(n)}(x)$ sind nach der Bezeichnung von FEJÉR die Grundfunktionen der zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Lagrange-Interpolation; sie sind Polynome vom Grade $(n-1)$ und es gilt offenbar

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(x) \equiv 1, \tag{4$_a$}$$

$$L_{n+k}[\psi(x)] \equiv \psi(x), \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4$_b$}$$

wo $\psi(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade n bedeutet.

Nach einem FABER-BERNSTEINSCHEN Satz [1] ist für *jedes* $\mathfrak{A}$ und $n=1, 2, \ldots$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname*{Max}_{-1\leqq x\leqq+1} \lambda_n(x) = \operatorname*{Max}_{-1\leqq x\leqq+1} \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| > \frac{1}{12}\log n \quad [2],$$

und noch schärfer nach S. BERNSTEIN [3], dass es für jedes $\mathfrak{A}$ ein fester ξ gibt, so dass

$$\text{(6)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n(\xi)}{\log n} \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n} |l_k(\xi)|}{\log n} \geqq \frac{2}{\pi}$$

ist. Aus (6) folgt nach der klassischen Lebesgueschen Konstruktion, dass für jedes $\mathfrak{A}$ eine im Intervalle $-1\leqq x\leqq+1$ stetige Funktion $f(x)$ gibt, für welche

$$\text{(7)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |L_n[f(x)]_{x=\xi}| = +\infty.$$

In dem, in so vieler Beziehung günstigstem Falle, in welchem in (1) die n-te Zeile aus den n Wurzeln des n-te Tschebyscheffschen Polynoms ($T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta = \cos n \arccos x = \omega_n(x)$), besteht, existieren im Intervalle $-1\leqq x\leqq+1$ stetige Funktionen, deren Lagrangeschen Interpolationspolynome in *sämtlichen* Punkten des Intervalls $-1\leqq x\leqq+1$ unbeschränkt sind [4]. Wahrscheinlich gilt dasselbe überhaupt für jede Punktgruppenfolge, wenn man eine Punktmenge vom Masse 0 ausser Acht lässt [5].

Um für eine Punktgruppenfolge $\mathfrak{A}$ Konvergenzsätze aussprechen zu können, muss man also neben Stetigkeit andere Bedingungen fordern. Derartige Konvergenzsätze, die sich auf Puntgruppenfolgen $\mathfrak{A}$ von ziemlich allgemeinem Charakter beziehen, hat zuerst FEJÉR aufgestellt [6]. Er gibt zwei Klassen von

---

(1) G. FABER: *Über interpolatorische Darstellung stetiger Functionen.* Jahresbericht d. D. Math. Ver., 23 (1914). - S. BERNSTEIN: *Quelques remarques sur l'interpolation.* Communications Soc. Math. Charkow, 14 (1914).

(2) Ein besonders einfacher Beweis steht bei L. FEJÉR: *Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkte des Intervalls gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitscher Interpolationsreihen.* Math. Zeitschrift, 32 (1930).

(3) S. BERNSTEIN: *Sur la limitations des valeurs d'un polynome de degrée n sur tout un segment par valeurs en n+1 points du segment.* Bull. de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S., 1931.

(4) G. GRÜNWALD: *Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen.* Annals of Mathematics, 37 (1936). Siehe auch J. MARCINKIEWICZ: *Sur la divergence des polynomes d'interpolations.* Acta, Szeged, 8 (1937).

(5) Die Wahrscheinlichkeit dieser Vermutung zeigen die Untersuchungen von S. BERNSTEIN l. c. (3).

(6) L. FEJÉR: *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte.* Math. Annalen, 106 (1932). - L. FEJÉR: *On the Characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points.* American Math. Monthly 41 (1934).

Punktgruppenfolgen an; die erste, welche er «normal» nannte, umfasst diejenige Punktgruppenfolgen, für welche

$$(8_a)\qquad 1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\geqq 0,\qquad -1\leqq x\leqq +1,\qquad (k=1,2,\dots,n)$$

für $n\geqq n_0$ gilt, die zweite, die «im strengeren Sinne normale» Klasse, für welche

$$(8_b)\qquad 1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\geqq \varepsilon>0$$

$$-1\leqq x\leqq +1,\qquad k=1,2,\dots,n,\qquad n=n_0,\qquad n_0+1,\dots$$

gilt. Neben der Stetigkeit muss die Funktion $f(x)$ im Intervalle $-1\leqq x\leqq +1$ eine Lipschitz Bedingung mit Exponenten $\frac{1}{2}+\delta$, $\delta>0$ gleichmässig erfüllen. Dann besagen die Sätze von FEJÉR, dass bei jeder solchen Punktgruppenfolge die Polynomfolge (3) im Intervalle $[-1+\varepsilon, +1-\varepsilon]$ (Fall (8_a)) bezw. im ganzen Intervalle $[-1, +1]$ (Fall (8_b)) gleichmässig gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $n\to\infty$. Eine Aufzählung einiger interessanten Spezialfällen dieses Satzes geben wir später.

Einen anderen allgemeinen Konvergenzsatz hat SHOHAT [7] gefunden. Um dies zu erörtern definieren wir die p-Punktgruppenfolgen wie folgt. Es sei $p(x)$ im Intervalle $[-1, +1]$ nichtnegativ und Lebesgue-integrabel. Dann existiert bekanntlich eine und nur eine Polynomfolge $R_0(x), R_1(x),\dots, R_n(x),\dots$ (das n-te ist vom Grade n), so dass

$$(9_a)\qquad \text{Koeff}\cdot x^n \text{ in } R_n(x) \text{ gleich } 1,$$

$$(9_b)\qquad \int_{-1}^{+1} R_n(x)R_m(x)p(x)\,dx=0 \quad \text{für}\quad n\neq m.$$

Bekanntlich besitzt $R_n(x)$ im Intervalle $-1\leqq x\leqq +1$ n verschiedene Wurzeln $(n=1,2,\dots)$; die n-te Zeile der p-Punktgruppenfolge ist durch diese Wurzeln gebildet. Diese bilden eine sehr allgemeine Klasse; wir definieren ferner die p_1 bezw. p_2-Unterklassen mit der Zusatzbedingung $p_1(x)\geqq m_1>0$ bezw. $p_2(x)\sqrt{1-x^2}\geqq m_2>0$ im Intervalle $-1\leqq x\leqq +1$. Für $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $p(x)\equiv 1$, $p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ entsteht die Tschebyscheffsche, Legendresche und allgemeiner die Jacobische Punktgruppenfolge; in diesen Fällen sind die Polynome $R_n(x)$ Jacobische Polynome. Für eine p_1-Punktgruppenfolge SHOHAT bewies, dass die Folge der Lagrangeschen Interpolationspolynome der Funktion $f(x)$ gleichmässig im Intervalle $[-1, +1]$ gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $f(x)$ eine stetige Ableitung besitzt; im Intervalle $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ konvergiert $L_n(f)$ gegen $f(x)$, wenn $f(x)$ im Intervalle $-1\leqq x\leqq +1$ gleichmässig eine Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\frac{1}{2}+\delta$, $\delta>0$ erfüllt.

---

(7) I. SHOHAT: *On Interpolation.* Annals of Mathematics, 34 (1933).

Zur Orientierung bemerken wir, dass die Fejérschen und Shohatschen Klassen von Punktgruppenfolgen manche Berührungspunkte haben, z. B. wenn $p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ und $-1<\alpha$, $\beta\leqq 0$, dann sind die p-Punktgruppenfolgen nach FEJÉR normal. Es gibt (p)-Punktgruppenfolgen, die nicht im strengerem Sinne normal und normale Punktgruppenfolgen, die keine (p)-Punktgruppenfolgen sind ([8]); manchmal geben die Shohatschen Sätze schärferes Resultat (z. B. wenn $p(x)\equiv 1$) manchmal die Fejérschen (z. B. wenn $p(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$). Für die Bedeutung der Resultate sei bemerkt, dass bei der klassischen aequidistanten Interpolation, d. h. wo $x_k^{(n)}=1-\frac{2k}{n+1}$ ist, kann nach BOREL ([9]) und RUNGE ([10]) die Folge $L_n(f)$ divergieren auch dann, wenn $f(x)$ im Intervalle analytisch ist.

Der Beweis der Shohatschen Sätze beruht auf einer Ungleichung, welche sich auf $\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|$ bezieht; eine Idee welche zuerst von LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, S. BERNSTEIN und D. JACKSON verwendet wurde. Wahrscheinlich gilt für die (p_1)-Klasse im Intervalle $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, und für die (p_2)-Klasse im Intervalle $[-1, +1]$,

$$\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|\leqq c_1\log(n+1), \qquad n=1, 2,\ldots,$$

wo c_1 und später c_2, $c_3,\ldots$ von n, k und x unabhängig sind ([11]). Durch diese, scheinbar sehr tiefe Ungleichung wäre es möglich alle bisherige Resultate beträchtlich zu verallgemeinern.

In dieser Note geben wir einfachere Beweise für den zweiten Shohatschen Satz und beweisen einen ähnlichen, neuen Satz. Dieser Satz lautet, wie folgt: *Wenn die Grundpunkte der Interpolation eine p_2-Punktgruppenfolge bilden, so konvergiert die Folge der Lagrangeschen Interpolationspolynome der Funktion $f(x)$ gleichmässig im Intervalle $[-1, +1]$ gegen $f(x)$, wenn in demselben Intervalle*

$$|f(x')-f(x'')|<c_2|x'-x''|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad -1\leqq x'<x''\leqq +1$$

([8]) Die Polynome $\int_{-1}^{x}P_{n-1}(t)dt$, wo $P_{n-1}(x)$ das $(n-1)$-te Legendresche Polynom ist, gehören nicht zur Klasse p_1, denn bekanntlich -1 und $+1$ Wurzeln dieser Polynome sind und die Wurzeln eines Polynoms von der Klasse p_1 im Innern des Intervalls $[-1, +1]$ sind.

([9]) Verh. des 3. Math. Kongr. in Heidelberg, 1905, S. 229.

([10]) Zeitschrift f. Math. u. Phys., 46 (1901), S. 229.

([11]) Der erste von uns bewies dies für die Jacobische Polynome d. h. wenn

$$p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

ist, wo α, $\beta>-1$ ist.

gilt, wo $\varepsilon > 0$. Wegen der Allgemeinheit und Wichtigkeit dieser beiden Sätze wird es nicht überflüssig je zwei Beweise mitzuteilen, welche von dem Shohatschen verschieden sind und die Orthogonalität nur durch die Definitionsgleichung (9_b) ausnützen ([12]).

Wir erwähnen ein interessantes Korollar der Shohatschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| < c_3 n$$

gültig für (p_2)-Punktgruppenfolgen.

Es seien die Wurzeln der n-ten, zu $p_1(x)$ gehörigen orthogonalen Polynome

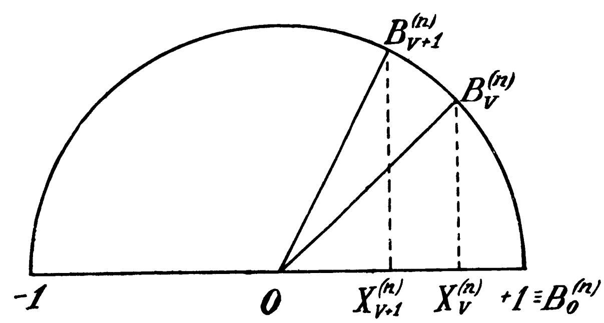

Fig. 1.

$\cos \vartheta_\nu^{(n)}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, wo $0 \leqq \vartheta_1^{(n)} < \vartheta_2^{(n)} < \ldots < \vartheta_n^{(n)} \leqq \pi$ ist. Dann ist offenbar nach dem Rolleschen Satze

$$0 < \frac{1}{\vartheta_{\nu+1}^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)}} = \frac{l_{\nu+1}(\cos \vartheta_{\nu+1}^{(n)}) - l_{\nu+1}(\cos \vartheta_\nu^{(n)})}{\vartheta_{\nu+1}^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)}} = \frac{d l_{\nu+1}(\cos \vartheta)}{d\vartheta}_{\vartheta = \vartheta^*}$$

wo $\vartheta_\nu^{(n)} \leqq \vartheta^+ \leqq \vartheta_{\nu+1}^{(n)}$ ist. Dann ist aber nach einem Satze von S. BERNSTEIN ([13])

$$0 < \frac{1}{\vartheta_{\nu+1}^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)}} \leqq (n-1) \max_{0 \leqq \vartheta \leqq \pi} |l_{\nu+1}(\cos \vartheta)| \leqq (n-1) \operatorname*{Max}_{-1 \leqq x \leqq +1} \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| < c_3 n^2,$$

also

$$\vartheta_{\nu+1}^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)} \geqq \frac{c_4}{n^2}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{10}$$

([12]) Wir könnten auch die Klasse (p_3) mit $p_3(x)(1-x)^\lambda (1+x)^\mu \geqq m_3 > 0$ im Intervalle $[-1, +1]$ definieren. Für diese Klasse ergibt sich (mit beiden Beweismethoden) dass im Intervalle $[-1, +1]$ $\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| \leqq c_8 n^{\max(1-\mu,\, 1-\lambda)}$ gilt. Dies werden wir nicht diskutieren.

([13]) Wenn für ein trigonometrisches Polynom $T(\Theta)$ von der Ordnung m die Ungleichung $|T(\Theta)| \leqq M$, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$ gilt, dann ist $|T'(\Theta)| \leqq mM$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$.

Zu einer geometrischen Deutung von (10) gelangt man folgendermassen: Da $\vartheta_\nu^{(n)} = B_0^{(n)} O B_\nu^{(n)} \sphericalangle$ ist, ist $\vartheta_{\nu+1}^{(n)} - \vartheta_\nu^{(n)} = \text{arc}\, \widehat{B_\nu^{(n)} B_{\nu+1}^{(n)}}$; (10) bedeutet also, dass die $\widehat{B_\nu^{(n)} B_{\nu+1}^{(n)}}$ nicht «sehr klein» sein können. Es ist überhaupt interessant, dass man auf interpolatorischen Wege Resultate über die Verteilung der Grundpunkte erhalten kann; ein Weg, welchen zuerst FEJÉR ([14]) betrat. Weitere in diese Richtung fallende Resultate werden anderswo publiziert ([15]).

§ 2.

Es sei

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{R_n(x)}{R_n'(x_k)(x-x_k)} \right|,$$

wo also $R_n(x)$ das n-te, zu $p_2(x)$ gehörige, orthogonale Polynom bezeichnet; $p_2(x)\sqrt{1-x^2} \geqq m_2 > 0$. Wir beweisen, dass

$$\lambda_n(x) \leqq c_5 \sqrt{n}, \qquad -1 \leqq x \leqq +1. \tag{11}$$

Erster Beweis. - Es sei

$$\operatorname*{Max}_{|x| \leqq +1} \lambda_n(x) = \lambda_n(\xi_0) = \lambda_n(\cos \vartheta_0);$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leqq \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{2}$.

Die Funktion $\varphi(\cos\vartheta)$ sei $+1$, wenn $\vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0 + \frac{1}{5n}$, anderswo 0 und $B(x)$ die Funktion, die in den Punkten $x_k^{(n)}$ die Werte $A_k = \text{sg}\, l_k(\xi_0)$, $(k=1,\dots, n)$ annimmt und in den Intervallen $x_{k-1}^{(n)} \leqq x \leqq x_k^{(n)}$ weise linear ist. Dann ist

$$\int_{-1}^{1} |L_n(B)|\, \varphi(x) p_2(x)\, dx \leqq \sqrt{\int_{-1}^{1} L_n(B)^2 p_2(x)\, dx \int_{-1}^{1} \varphi(x)^2 p_2(x)\, dx}, \tag{12}$$

ferner für $\nu \neq \mu$ infolge der Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} l_\nu(x) l_\mu(x) p_2(x)\, dx = \frac{1}{R_n'(x_\nu) R_n'(x_\mu)} \int_{-1}^{1} \frac{R_n(x)}{(x-x_\mu)(x-x_\nu)} R_n(x) p_2(x)\, dx = 0 \tag{13}$$

und so, wegen $|B(x_k)| = 1$

$$\int_{-1}^{1} L_n(B)^2 p_2(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} B(x_\nu)^2 \int_{-1}^{1} l_\nu(x)^2 p_2(x)\, dx = \tag{14}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-1}^{1} l_\nu(x)^2 p_2(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-1}^{1} l_\nu(x) l_\mu(x) p_2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} p_2(x)\, dx$$

([14]) Siehe ([6]).

([15]) P. ERDÖS-P. TURÁN: *On Interpolation II.* Annals of Mathematics. Unter Druck.

wegen (4_a). Setzen wir (14) in (12) ein; so ist

$$(15)\quad \int_{-1}^{1} |L_n(B)|\,\varphi(x)p_2(x)dx \leqq \sqrt{\int_{-1}^{+1} p_2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_{-1}^{1}\varphi(x)^2 p_2(x)dx} =$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{+1} p_2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\frac{1}{5n}} p_2(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta}.$$

Wegen $|B(x_k)|=1$

$$|L_n(B)| \leqq \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)| \leqq \lambda_n(\xi_0)$$

und, da $L_n(B)$ ein Polynom von höchstens $(n-1)$-tem Grade ist, so gilt nach dem bekannten Satze von S. BERNSTEIN ([16])

$$(16)\qquad \left|\frac{d}{d\vartheta}\left(L_n(B)_{x=\cos\vartheta}\right)\right| \leqq (n-1)\lambda_n(\xi_0).$$

Dann ist aber im Intervalle $\left[\vartheta_0,\ \vartheta_0+\frac{1}{5n}\right]$

$$|\lambda_n(\xi_0)-L_n(B)_{x=\cos\vartheta}| = |L_n(B)_{x=\cos\vartheta_0}-L_n(B)_{x=\cos\vartheta}| \leqq \frac{1}{5n}\cdot n\lambda_n(\xi_0)$$

nach dem Mittelwertsatz und (16); also

$$(17)\qquad L_n(B)_{x=\cos\vartheta} > \frac{4}{5}\lambda_n(\xi_0),\quad \text{für}\quad \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0+\frac{1}{5n}.$$

Daher nach (17)

$$(18)\quad \int_{-1}^{+1} |L_n(B)|\,p_2(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\pi} |L_n(B)|_{x=\cos\vartheta}\,\varphi(\cos\vartheta)p_2(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\frac{1}{5n}} |L_n(B)|_{x=\cos\vartheta}\,p_2(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta \geqq \frac{4}{5}\lambda_n(\xi_0)\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\frac{1}{5n}} p_2(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta.$$

Aus (15) und (18) ergibt sich

$$(19)\qquad \lambda_n(\xi_0) \leqq \frac{5}{4}\sqrt{\int_{-1}^{1} p_2(x)dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\frac{1}{5n}} p_2(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta}}.$$

([16]) Siehe Fussnote ([13]).

Nach Voraussetzung ist

$$p_2(\cos\vartheta)\sin\vartheta \geqq m_2 > 0;$$

also nach (19)

$$\lambda_n(\xi_0) \leqq \frac{5}{4}\sqrt{\int_{-1}^{1} p_2(x)dx}\,\frac{1}{\sqrt{m_2}}\sqrt{5n} \leqq c_5\sqrt{n}.$$

Es sei nun $f(x)$ eine Funktion, für welche

$$|f(x')-f(x'')| \leqq c_6 |x'-x''|^{\frac{1}{2}+\delta}, \qquad -1 \leqq x' < x'' \leqq +1, \qquad \delta > 0$$

gilt. Aus (11) beweisen wir so wie FEJÉR ([17]), dass im Intervalle $[-1, +1]$ gleichmässig

$$L_n(f) \to f(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Bekanntlich existiert ein Polynom $P_{n-1}(x)$ vom Grade $(n-1)$ mit

$$|f(x)-P_{n-1}(x)| < \frac{c_6}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}, \qquad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Dann ist aber nach (4_b)

$$\begin{aligned}|L_n(f)-f(x)| &= |L_n(f-P_{n-1})-(f-P_{n-1})| \leqq \\ &\leqq |L_n(f-P_{n-1})| + |f(x)-P_{n-1}(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu)-P_{n-1}(x_\nu)|\,|l_\nu(x)| + \\ &+ \frac{c_6}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} \leqq \frac{c_6}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}\lambda_n(\xi_0) + \frac{c_6}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} < \frac{c_7}{n^{\delta}}\end{aligned}$$

also für genügend grosses n beliebig klein.

Also gelangen wir zu dem

SATZ: *Es sei $p_2(x)$ eine im Intervalle $[-1, +1]$ Lebesgue-integrable Funktion mit $p_2(x)\sqrt{1-x^2} \geqq m > 0$, wenn $-1 \leqq x \leqq +1$. Die zu der Belegungsfunktion $p_2(x)$ gehörige orthogonale Polynomenfolge sei $R_0(x), R_1(x), \ldots, R_n(x), \ldots$ Die Wurzeln der Polynome $R_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ geben eine Punktgruppenfolge; die auf diesen gebildeten Lagrangeschen Interpolationspolynome der Funktion $f(x)$ konvergieren gleichmässig im Intervalle $[-1, +1]$ gegen $f(x)$, wenn $f(x)$ im Intervalle $[-1, +1]$ gleichmässig eine Lipschitz-Bedingung mit dem Exponent $\frac{1}{2}+\delta$, $\delta > 0$ erfüllt.*

([17]) Siehe Fussnote ([6]).

Wir fordern nun nur, dass $p_1(x) \geqq m_1 > 0$ und Lebesgue-integrabel sei im Intervalle $[-1, +1]$. Dann folgt aus (19), dass

$$\lambda_n(\xi_0) \leqq \frac{5}{4} \sqrt{\int_{-1}^{1} p_1(x)dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\frac{1}{5n}} m_1 \sin \vartheta d\vartheta}} \leqq c_8 n. \tag{20}$$

Da jede, im Intervalle $[-1, +1]$ stetig differentierbare Funktion $f(x)$ sich gleichmässig mit der Genauigkeit $o\left(\frac{1}{n}\right)$ durch ein Polynom approximieren lässt, folgt auch der Shohatsche Satz.

§ 3.

Wir beweisen nun beide Sätze auf einem anderen Wege. Jetzt detailieren wir den Shohatschen Satz, den anderen werden wir nur skizzieren. Es sei

$$L_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n)} P_k(x) \tag{21}$$

wo $P_k(x)$ die Legendre-Polynome bedeuten mit der Normierung $P_k(1) = 1$. Dann ist bekanntlich

$$|P_k(x)| \leqq 1, \qquad -1 \leqq x \leqq +1, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{22$_a$}$$

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)^2 dx = \frac{2}{2k+1}. \tag{22$_b$}$$

Es sei zuerst $f(x)$ eine beliebige, im Intervalle $[-1, +1]$ Riemann-integrable Funktion, für welche dort $|f(x)| \leqq +1$ gilt. Dann ist nach (21) und (22_a)

$$|L_n(f)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} |b_\nu^{(n)}| = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2\nu+1}} \, |b_\nu^{(n)}| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} b_\nu^{(n)^2}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_{-1}^{1} L_n(f)^2 dx} \leqq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{m_1} \int_{-1}^{1} L_n(f)^2 p_1(x) dx} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)^2 \int_{-1}^{1} l_k(x)^2 p_1(x) dx} \leqq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{m_1} \int_{-1}^{1} p_1(x) dx},$$

wie im vorigen §. Wenn $\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$ sein Maximum für $x=x_0$ annimmt und $\psi(x)$ diejenige gebrochene Linie bedeutet, wie oben (in § 2) $B(x)$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} |l_k(x_0)| = |L_n(\psi)|_{x=x_0} \leqq \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{m_1}\int_{-1}^{1} p_1(x)dx}.$$

Wenn wir den Satz für die Klasse p_2 beweisen wollen, müssen wir nur $L_n(f)$ in der Gestalt

$$L_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} T_k(x)$$

schreiben, wo $T_k(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$ die Tschebyscheffschen Polynome sind, und dann ebenso verfahren, wie oben.