ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI RICCI

Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann (prima memoria)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 6, n° 1 (1937), p. 71-90

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_1_71_0>

SU LA CONGETTURA DI GOLDBACH E LA COSTANTE DI SCHNIRELMANN

(PRIMA MEMORIA)

di GIOVANNI RICCI (Pisa).

Introduzione.

Le lettere latine minuscole, ad eccezione di e e o, denotano numeri razionali interi, le lettere p numeri primi, le lettere K costanti assolute.

Per ogni $n \geqq 2$, esistono interi positivi g pei quali

$$n = p' + p'' + \ldots + p^{(g)} \tag{1}$$

($p', p'', \ldots$ uguali o distinti) e il minimo intero g per il quale vale una relazione di questo tipo è una funzione $G(n)$ di n.

È ovvio che esistono infiniti n pei quali $G(n)=1$ e anche pei quali $G(n)=2$ ($G(p)=1$, $G(2p)=2$); esistono anche infiniti n pei quali $G(n) \geqq 3$: infatti per $n=6h+5$, non primo, non può essere $G(n)=1$ e neppure $G(n)=2$ poichè, essendo $6h+5$ dispari >5, uno dei termini dovrebbe essere $p=2$ mentre $6h+5-2$ è divisibile per 3.

CHR. GOLDBACH congetturò [1]

$$G(2n)=2, \qquad (n \geqq 2). \tag{2}$$

e anche (conseguenza immediata di questa)

$$1 \leqq G(n) \leqq 3, \qquad (n \geqq 2). \tag{3}$$

La verità su questa congettura è ancor oggi un mistero; e fino a poco tempo fa neppure si sapeva se $G(n)$ fosse superiormente limitata per $n \to +\infty$. Si deve a L. SCHNIRELMANN la notevolissima proposizione

Esiste K tale che $G(n) \leqq K$.

Qual'è il minimo valore $\overline{G}$ della costante K per cui vale questa proposizione? L. SCHNIRELMANN non l'ha determinato, tuttavia ha fatto un passo in questo senso. Posta la proposizione precedente nella forma equivalente

---

[1] Veramente la classica congettura di GOLDBACH è espressa da (2) e (3) quando in (1) si ammettono anche addendi della forma $p=1$; anche in questa forma leggermente più debole (2) e (3) permangono congetture e, seguendo l'uso moderno, supponiamo p primo (quindi $\geqq 2$).

Esistono K_1 *e* K_2 *tali che per* $n > K_1$ *è* $G(n) \leqq K_2$,

ci possiamo chiedere quale sia il minimo valore S (*costante di* SCHNIRELMANN) delle costanti K_2 per le quali esista l'opportuna K_1; in altre parole, ci possiamo chiedere quale sia il numero S tale che: ogni intero razionale abbastanza grande si può ripartire nella somma di al più S numeri primi, mentre esistono infiniti interi razionali positivi che non si possono ripartire nella somma di al più $S-1$ numeri primi; cioè, ci possiamo chiedere quale sia il numero

$$S = \overline{\lim_{n \to +\infty}} G(n), \qquad (3 \leqq S \leqq \overline{G}).$$

La ricerca di L. SCHNIRELMANN e, al seguito di questa, altre recentissime (2) sono destinate a questo problema, che è fondamentale per la valutazione di $\overline{G}$. Le varie tappe si possono riassumere nel modo seguente

$S \leqq 800.000$ (L. SCHNIRELMANN, 1930),
$S \leqq 2208$ (N. P. ROMANOFF, 1935),
$S \leqq 71$ (H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK, 1936).

Più precisamente l'ultimo risultato si può enunciare così: « Ogni intero n abbastanza grande ammette almeno una partizione del tipo

$$n = p' + p'' + \ldots + p^{(68)} + v, \qquad 0 \leqq v \leqq 1019 \text{ »}$$

(ed essendo $2 \leqq v+2 \leqq 1021$, $1 \leqq G(v+2) \leqq 3$, passando da n a $n+2$ ricaviamo $S \leqq 71$).

Il lavoro di H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5] procede, con accurata raffinatezza, sulla base del classico *metodo di* BRUN-SCHNIRELMANN (3) innestandovi un'idea di N. P. ROMANOFF e facendo uso di una proposizione di A. KHINTCHINE.

Noi, riprendendo tale lavoro e introducendo alcune modificazioni nella parte che riguarda il classico *metodo di* BRUN, dimostreremo che

$$S \leqq 67,$$

cioè

TEOREMA (*A*). - *Ogni intero abbastanza grande si può rappresentare come somma di al più 67 numeri primi.*

Le modificazioni in parola si basano sulle due seguenti osservazioni che per ora ci limitiamo ad accennare:

---

(2) Per notizie su questo argomento, con objezioni ai lavori precedenti, rimandiamo il lettore alla memoria H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5] che noi prendiamo come base, essendoci stato impossibile vedere i lavori russi. I numeri entro [] si riferiscono alla bibliografia collocata alla fine di questa introduzione.

(3) Vedi E. LANDAU [8].

1°). Nel procedimento di V. BRUN conviene « fare i passi di lunghezza decrescente » (4).

2°). Detta $S^{(n)}$ la funzione simmetrica elementare di grado n dei numeri $\frac{1}{p}$ con $a<p\leqq a^{\theta}$ $(\theta>1)$, per il fatto che la serie $\sum_{p}\frac{1}{p^2}$ converge, abbiamo

$$S^{(n)}=\frac{(S^{(1)})^n}{n!}+o(1) \qquad (n \text{ e } \theta \text{ fissi, } a\to+\infty)$$

e questa relazione viene da noi usata per limitare inferiormente la funzione $S^{(n)}$, in unione a quella consueta

$$S^{(n)}\leqq\frac{(S^{(1)})^n}{n!}$$

che la limita superiormente.

Nella Parte II di questa memoria esponiamo una rappresentazione del fecondo metodo di V. BRUN (5) notomizzandolo e suddividendo i suoi strumenti secondo la loro natura (di analisi combinatoria, di algebra, di aritmetica); apparirà chiaramente come la sua radice si trovi in una proposizione di natura combinatoria. Questa esposizione risulta opportuna, perchè il nostro scopo è di impiccolire il valore di certe costanti a cui il metodo conduce, introducendo al momento giusto le modificazioni accennate; inoltre essa apparisce pronta per eventuali più generali applicazioni.

E noi, seguendo l'esempio di H. RADEMACHER [10], come facemmo in [11], ne abbiamo fatta applicazione allo studio aritmetico della successione dei valori interi assunti da un polinomio (a valori interi), e abbiamo ottenuto, tra l'altro, proposizioni che migliorano risultati noti, col precisare confini per certe costanti di cui era nota l'esistenza oppure col restringere confini preesistenti.

I risultati conseguiti si trovano esposti nella Parte I^a e discendono da alcuni teoremi generali (i Teoremi I, II, III, IV) le cui dimostrazioni sono svolte nella Parte III.

In questa *Introduzione* ci limitiamo a citare, oltre al Teorema (*A*) (che ci ha fornito l'occasione di questa ricerca), i seguenti

TEOREMA (*B*). - *In ogni progressione aritmetica*

$$ax+b \quad (x=1, 2, 3,....), \qquad ((a, b)=1)$$

---

(4) Per orientare sul significato di questa locuzione grossolana diremo che i « passi » sono misurati dai numeri θ_1, θ_2, θ_3,.... definiti al n.° 1 (vedi (1.4)). Una accurata indagine sulle ragioni del successo conseguito in TH. ESTERMANN [3] rispetto alle ricerche precedenti, ci mostra che esso è dovuto all'accorgimento del « primo passo più lungo dei successivi ». Noi abbiamo già applicato in [11] tale accorgimento, e qui siamo indotti, in modo naturale, a graduare la lunghezza per alcuni passi iniziali.

(5) Ci siamo largamente serviti delle esposizioni precedenti: V. BRUN [1], [2], H. RADEMACHER [10], E. LANDAU [7] pp. 71-78, [8], TH. ESTERMANN [3], G. RICCI [11], H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5].

1°) *esistono infiniti interi n composti con al più* **due** *fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di* $n^{\frac{1}{3}}$;

2°) *esistono infiniti interi n composti con al più* **tre** *fattori primi, tutti* **distinti** *e tutti maggiori di* $n^{\frac{1}{4}}$.

Questo teorema si accosta a quello classico di P. G. L.-DIRICHLET; il suo interesse consiste nel fatto che la sua dimostrazione richiede esclusivamente mezzi elementari e che inoltre esso rientra come caso particolare nel seguente Teorema (*C*). Il Teorema (*B*) segna un progresso sui risultati conseguiti nel tentare di dimostrare elementarmente il classico teorema della progressione aritmetica (5 fattori primi V. BRUN (1919) [1] p. 26, 3 fattori primi H. RADEMACHER (1924) [10], 4 fattori primi distinti G. RICCI (1933) [11] p. 446).

TEOREMA (*C*). - *Sia* $D \cdot F(x)$ *un polinomio in x di grado g a coefficienti interi, primitivo, irriducibile, e sia D il suo divisore fisso* (6). *Nella successione di interi*

$$F(1),\quad F(2),\quad F(3),....$$

1°) *ne esistono infiniti* $F(n)$ *compostî con al più* $3g-1$ *fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di* $n^{\frac{1}{3}}$;

2°) *ne esistono infiniti* $F(n)$ *composti con al più*

$$\left[\frac{2sg-1}{s-g}\right], \qquad (g+1 \leqq s \leqq 3g)$$

fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di $n^{\frac{s-g}{2s}}$, *ciascun fattore primo figurando con un esponente* $<s$.

Detto $B(\xi;\ F(x))$ *il numero degl'interi* $n \leqq \xi$ *pei quali sono soddisfatte le condizioni in* 1°), *è*

$$a_1 \frac{\xi}{\log \xi} < B(\xi;\ F(x)) < a_2 \frac{\xi}{\log \xi}, \quad \text{per } \xi > a_3$$

(a_1, a_2, a_3 *dipendenti soltanto da* $F(x)$); *lo stesso vale per le condizioni in* 2°).

Anche questo teorema migliora risultati precedenti: $4g-1$ fattori primi (H. RADEMACHER [10]), $[3{,}025g]$ fattori primi, $\left[\frac{sg2{,}025}{s-g}\right]$ fattori primi (uguali o distinti) ciascuno con un esponente $<s$ (G. RICCI [11]).

Citiamo infine anche il seguente risultato

---

(6) Ricordiamo che D divide $g!$. Ad esempio: per $D \cdot F(x) = x^3 + x + 14$ è $D = 2$, per $D \cdot F(x) = x(x-1)....(x-g+1) = g!\binom{x}{g}$ è $D = g!$, $F(x) = \binom{x}{g}$.

TEOREMA (*D*). - *Siano*

$$m \neq 0,\ a>0,\ b>0 \text{ interi},\ N>0 \text{ intero pari.}$$

Denotiamo con $Z(\xi)$ *il numero degl'interi* x *soddisfacenti alle seguenti condizioni*

1°) $0<x\leqq\xi$,

2°) x *è composto con al più* a *fattori primi* (*uguali o distinti*) *ciascuno maggiore di* $x^{\frac{1}{a+1}}$,

3°) $x+2m$ *è composto con al più* b *fattori primi* (*uguali o distinti*) *ciascuno maggiore di* $x^{\frac{1}{b+1}}$.

Denotiamo con $W(N)$ *il numero delle partizioni*

$$N=A+B \qquad (A,\ B \text{ interi positivi})$$

nelle quali A *è composto con al più* a *fattori primi, ciascuno maggiore di* $N^{\frac{1}{a+1}}$ *e* B *è composto con al più* b *fattori primi, ciascuno maggiore di* $N^{\frac{1}{b+1}}$.

Per

$$(a=6,\ b=6) \text{ (TH. ESTERMANN [3])}$$

$$(a=5,\ b=7), \quad (a=4,\ b=9), \quad (a=3,\ b=15), \quad (a=2,\ b=366)$$

risulta

$$\frac{\xi}{\log^2\xi}=O(Z(\xi)), \qquad Z(\xi)=O\left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right) \qquad \text{per } \xi\to+\infty$$

$$\frac{N}{\log^2 N}=O(W(N)). \qquad \text{per } N\to+\infty$$

Questa proposizione per $a=b=1$, tolte evidentemente le condizioni supplementari, prende la forma delle due classiche congetture di GOLDBACH e dei numeri primi gemelli ($m=1$).

La validità di una proposizione di questo tipo fu dimostrata la prima volta da V. BRUN [1919] [2] ($a=b=9$); successivamente si ebbe per $a=b=7$ H. RADEMACHER (1924) [10], per $a=b=6$ TH. ESTERMANN (1932) [3].

BIBLIOGRAFIA

[1]. V. BRUN: *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach.* [Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 168 (1919, 1.° sem.), pp. 544-546], e anche [Videnskap Skrifter, I. Mat. Nat. Klasse, 1920, n.° 3, Kristiania].

[2]. — *La série* $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\ldots.$ *est convergente ou finie* [Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 43 (1919), pp. 100-104, 124-128].

[3]. TH. ESTERMANN: *Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo-Brunschen Methode* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, 168 Bd. (1932), pp. 106-116].

[4]. H. HEILBRONN: *Über die Verteilung der Primzahlen in Polynomen* [Mathematische Annalen, 104 Bd. (1931), pp. 794-799].

[5]. H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK: *Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen.* [Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky, 65 (1936), pp. 117-140].

[6]. E. LANDAU: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig, 1909].

[7]. — *Vorlesungen über Zahlentheorie* [Leipzig, 1927].

[8]. — *Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1930, pp. 255-276].

[9]. T. NAGEL: *Généralisation d'un théorème de Tchebycheff* [Journal de Mathématiques, 8e s., t. 4 (1921), pp. 343-356].

[10]. H. RADEMACHER: *Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie* [Abhandlungen Math. Sem. Hamburg, 3 Bd. (1924), pp. 12-30].

[11]. G. RICCI: *Ricerche aritmetiche sui polinomi* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 57 (1933), pp. 433-475].

PARTE I.

Risultati.

1. - **Notazioni e definizioni.** — Ogni somma vuota di termini significa 0; ogni prodotto vuoto di fattori significa 1.

$C=0{,}5772....$ è la costante di EULER-MASCHERONI.

$p_1, p_2, p_3, ...$ è la successione crescente degl'interi primi razionali.

Sia

$$F(x)=a_0+a_1x+....+a_gx^g \qquad (g\geqq 1,\ a_g>0)$$

un polinomio in x di grado $g\geqq 1$, *a valori interi* (quindi a coefficienti razionali) e divisore fisso 1, e sia D il minimo comune multiplo dei denominatori dei coefficienti $a_0, a_1, ..., a_g$ (il polinomio $DF(x)$ risulta a coefficienti interi primitivo con divisore fisso D; ricordiamo che D divide $g!$ e quindi $g!\,a_g\geqq 1$).

Sia inoltre

$$DF(x)=D_1F_1(x)\cdot D_2F_2(x)\cdot ....\cdot D_fF_f(x) \qquad (f\geqq 1) \tag{1.1}$$

la decomposizione del polinomio $DF(x)$ nei suoi f fattori irriducibili a coefficienti interi e primitivi $D_1F_1(x)$, $D_2F_2(x)$,...., $D_fF_f(x)$, che supponiamo *distinti*, dei gradi $g_1, g_2, ..., g_f$ e divisori fissi rispettivi $D_1, D_2, ..., D_f$. I polinomi $F_1(x)$, $F_2(x)$,...., $F_f(x)$ risultano a valori interi e inoltre abbiamo

$$g=g_1+g_2+....+g_f, \qquad D=D_0D_1....D_f \qquad (D_0 \text{ intero}\leqq g!) \tag{1.2}$$ (7).

Denotiamo con Δ il discriminante di $DF(x)$; $\Delta\neq 0$.

Denotiamo con $h(m)$ il numero delle radici distinte secondo (mod m) della congruenza

$$F(x)\equiv 0 \pmod m \tag{1.3}$$

(per $m\geqq 2$ risulta $0\leqq h(m)<m$).

Se $f\geqq 2$ e p divide ambedue gl'interi $F_i(x_0)$ e $F_j(x_0)$ $(i\neq j)$ esso divide anche il risultante dei due polinomî $D_iF_i(x)$, $D_jF_j(x)$; si conclude che per $f\geqq 2$ esiste un p' conveniente (dipendente da $F(x)$) tale che ogni $p>p'$ divide al più uno solo degl'interi $F_1(x_0)$, $F_2(x_0)$,...., $F_f(x_0)$ qualunque sia l'intero x_0.

Definizione di $\tau(f)$, σ, $\bar{\sigma}$, μ_F.

Consideriamo la successione non crescente (e definitivamente costante)

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, ..., \quad \theta_{a+1}, ... \qquad (a\geqq 0) \tag{Θ}$$

---

(7) Per esempio:

$DF(x)=x(x+1)$, $D=2$, $F_1(x)=x$, $F_2(x)=x+1$, $D_0=2$, $D_1=1$, $D_2=1$.

con

$$\theta_1 \geqq \theta_2 \geqq \theta_3 \geqq \ldots\ldots \geqq \theta_a \geqq \theta_{a+1} = \theta_{a+2} = \ldots\ldots = \theta > 0 \tag{1.4}$$

dove θ soddisfa alle condizioni

$$e^{\theta}\left(\frac{\theta e}{2}\right)^2 < 1 < e^{\theta} \tag{1.5}$$

(e con questo le serie

$$\sum_{b=1}^{\infty} \frac{(\theta^2 e^{\theta})^b b^{2b}}{(2b+1)!}, \qquad \sum_{b=1}^{\infty} \frac{(\theta^2 e^{\theta})^b b^{2b-1}}{(2b)!}$$

risultano ambedue convergenti, poichè

$$\frac{(\theta^2 e^{\theta})^b b^{2b}}{(2b+1)!} < \frac{(\theta^2 e^{\theta})^b b^{2b-1}}{(2b)!} < \left(\frac{4}{e^2}\right)^b \frac{1}{b} \cdot \frac{b^{2b}}{(2b)!} < \left(\frac{4}{e^2}\right)^b \frac{1}{b} \cdot \frac{b^{2b} e^{2b}}{(2b)^{2b}\sqrt{4\pi b}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} b^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Poniamo

$$\tau(f) = \tau(f, \Theta) = \sum_{b=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_b}{f}\right) = \tag{1.6}$$

$$= \sum_{b=1}^{a-1} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_b}{f}\right) + \frac{\exp\left(-\dfrac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_a}{f}\right)}{1 - \exp\left(-\dfrac{\theta}{f}\right)},$$

$$E(a, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } a = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2a} (-1)^i \sum_{J(a,i)} \frac{\theta_1^{j_1} \theta_2^{j_2} \ldots\ldots \theta_a^{j_a}}{j_1!\, j_2! \ldots\ldots j_a!} & \text{per } a > 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\overline{E}(a, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } a = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2a-1} (-1)^i \sum_{\overline{J}(a,i)} \frac{\theta_1^{j_1} \theta_2^{j_2} \ldots\ldots \theta_a^{j_a}}{j_1!\, j_2! \ldots\ldots j_a!} & \text{per } a > 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

dove $j \geqq 0$ e i campi $J(a, i)$, $\overline{J}(a, i)$ sono definiti per $a > 0$ dalle condizioni seguenti

$$\begin{cases} J(a,i) \equiv \begin{cases} j_1 + j_2 + \ldots\ldots + j_a = i \\ j_1 + j_2 + \ldots\ldots + j_r \leqq 2r \end{cases} & \text{per } 1 \leqq r < a \\ \overline{J}(a,i) \equiv \begin{cases} j_1 + j_2 + \ldots\ldots + j_a = i \\ j_1 + j_2 + \ldots\ldots + j_r \leqq 2r - 1 \end{cases} & \text{per } 1 \leqq r < a, \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma(a, \Theta) = e^{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_a}\left\{ E(a, \Theta) + \dfrac{\theta_1^2 \theta_2^2 \ldots\ldots \theta_a^2}{\theta^{2a-1} e^{a\theta}} \displaystyle\sum_{b=a+1}^{\infty} \beta_b \right\} & (a \geqq 0) \\ \beta_b = \dfrac{b^{2b}}{(2b+1)!} (\theta^2 e^{\theta})^b, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \overline{\sigma} = \overline{\sigma}(a, \Theta) = e^{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_a}\left\{ \overline{E}(a, \Theta) - \dfrac{\theta_1 \theta_2^2 \ldots\ldots \theta_a^2}{\theta^{2a-1} e^{a\theta}} \displaystyle\sum_{b=a+1}^{\infty} \overline{\beta}_b \right\} & (a \geqq 0) \\ \overline{\beta}_b = \begin{cases} \dfrac{\theta^2 e^{\theta}}{2} & \text{per } b = 1 \\ (\theta^2 e^{\theta})^b \left(\dfrac{b^{2b-1}}{(2b)!} - \dfrac{1}{2^b} \left\{ \dfrac{1}{b} + \dfrac{5}{6}(b-2) + \dfrac{7}{20}(b-2)(b-3) \right\} \right) & \text{per } b > 1. \end{cases} \end{cases} \tag{1.11}$$

È noto che (8)

$$\prod_{p\leqq\xi}\left(1-\frac{h(p)}{p}\right)\sim\frac{\mu_F}{\log^f\xi}\quad\text{per }\xi\to+\infty\quad\text{(T. NAGEL)}\tag{1.12}$$

dove μ_F è un numero dipendente soltanto da $F(x)$.

2. - Calcoli numerici. — Calcoliamo particolari valori numerici delle funzioni

$$\tau(f,\Theta),\qquad \sigma(a,\Theta),\qquad \bar\sigma(a,\Theta),$$

assumendo $a=3$; valori numerici che ci saranno utili per trarre le nostre conclusioni.

Per la funzione $\tau(f,\Theta)$ assegnata in (1.6) abbiamo

$$\tau(1)=\tau(1,\Theta)=e^{-\theta_1}+e^{-(\theta_1+\theta_2)}+e^{-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(1-e^{-\theta})^{-1}$$

$$\tau(2)=\tau(2,\Theta)=e^{-\frac12\theta_1}+e^{-\frac12(\theta_1+\theta_2)}+e^{-\frac12(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(1-e^{-\frac12\theta})^{-1}\qquad\text{ecc.}$$

Assumendo

$$\theta_1=0{,}70,\qquad \theta_2=0{,}58,\qquad \theta_3=0{,}54,\qquad \theta=0{,}532\tag{2.1}$$

risulta

$$\tau(1)=\tau(1,\Theta)<1{,}168,\qquad \tau(2)=\tau(2,\Theta)<2{,}9555.\tag{2.2}$$

Assumendo

$$\theta_1=0{,}90,\qquad \theta_2=0{,}56,\qquad \theta_3=0{,}52,\qquad \theta=0{,}50\tag{2.3}$$

risulta

$$\tau(1)=\tau(1,\Theta)<0{,}9898,\quad \tau(2)=\tau(2,\Theta)<2{,}7994,\quad \tau(3)=\tau(3,\Theta)<4{,}7223.\tag{2.4}$$

La funzione $\sigma(a,\Theta)$, assegnata in (1.10), prende per $a=3$ la forma

$$\sigma(3,\Theta)=e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\left\{E(3,\Theta)+\frac{\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2}{\theta^5e^{3\theta}}\sum_{b=4}^{\infty}\beta_b\right\},$$

e per la sua valutazione osserviamo

$$\sum_{b=7}^{\infty}\beta_b<\sum_{b=7}^{\infty}(\theta^2e^{\theta})^b\left(\frac{e^2}{4}\right)^b\frac{1}{4\sqrt{\pi}b^{\frac32}}<\frac{1}{4\sqrt{7\pi}}\sum_{b=7}^{\infty}\frac{\lambda^b}{b}\qquad\left(\text{con }\lambda=\frac{\theta^2e^{\theta+2}}{4}\right)$$

$$<\frac{1}{4\sqrt{7\pi}}\int_6^{\infty}\frac{\lambda^u}{u}\,du=\frac{1}{4\sqrt{7\pi}}\int_{6\log\frac1\lambda}^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}\,dv,$$

$$\sum_{b=4}^{\infty}\beta_b<\beta_4+\beta_5+\beta_6+\frac{1}{4\sqrt{7\pi}}\int_{6\log\frac1\lambda}^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}\,dv;$$

---

(8) Per questa proposizione vedi n.° 27. Come esempio: per $F(x)=ax+b$, $(a,b)=1$ e per $F(x)=x^2+1$ abbiamo rispettivamente (nozioni classiche!)

$$\mu_F=e^{-C}\prod_{p/a}\frac{p}{p-1},\qquad \mu_F\sim\prod_{\substack{p\leqq\xi\\ p\equiv1\pmod4}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\cdot\frac{\log\xi}{2}.$$

dalle definizioni (1.7) e (1.9) risulta

$$E(3,\,\Theta)=\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\sum_{J(3,\,i)}\ldots=\sum_{i=0}^{6}(-1)^iE_3^{(i)}$$

dove

$$E_3^{(0)}=1$$

$$E_3^{(1)}=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$

$$E_3^{(2)}=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^2$$

$$E_3^{(3)}=\frac{1}{6}\{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^3-\theta_1^3\}$$

$$E_3^{(4)}=\frac{1}{24}\{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^4-\theta_1^4-4\theta_1^3(\theta_2+\theta_3)\}$$

$$E_3^{(5)}=\frac{1}{120}\{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^5-\theta_1^5-5\theta_1^4(\theta_2+\theta_3)-10\theta_1^3(\theta_2+\theta_3)^2-$$
$$-\theta_2^3(\theta_2^2+5\theta_1\theta_2+10\theta_1^2)\}$$

$$E_3^{(6)}=\frac{\theta_3^2}{720}\{15\theta_1^2(6\theta_2^2+4\theta_2\theta_3+\theta_3^2)+6\theta_1(10\theta_2^3+10\theta_2^2\theta_3+5\theta_2\theta_3^2+\theta_3^3)+$$
$$+(15\theta_2^4+20\theta_2^3\theta_3+15\theta_2^2\theta_3^2+6\theta_2\theta_3^3+\theta_3^4)\}.$$

Assumendo come in (2.1)

$$\theta_1=0{,}70,\qquad \theta_2=0{,}58,\qquad \theta_3=0{,}54,\qquad \theta=0{,}532$$

risulta

$$e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}<6{,}171859$$

$$E(3,\,\Theta)<0{,}186722$$

$$\frac{\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2}{\theta^5e^{3\theta}}<0{,}228639$$

$$\sum_{b=4}^{\infty}\beta_b<0{,}0404263$$

(2.5) $$\sigma=\sigma(3,\,\Theta)<1{,}20948.$$

La funzione $\bar\sigma(a,\,\Theta)$ assegnata in (1.11) prende per $a=3$ la forma analoga

$$\bar\sigma=\bar\sigma(3,\,\Theta)=e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\left\{\bar E(3,\,\Theta)-\frac{\theta_1\theta_2^2\theta_3^2}{\theta^5e^{3\theta}}\sum_{b=4}^{\infty}\bar\beta_b\right\}$$

e per la sua valutazione osserviamo

$$\sum_{b=8}^{\infty}\bar\beta_b<\sum_{b=8}^{\infty}(\theta^2e^\theta)^b\left(\frac{e^2}{4}\right)^b\frac{1}{2\sqrt{\pi}b^{\frac{5}{2}}}<\frac{1}{2\sqrt{8\pi}}\int_{7\log\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}\,dv\qquad\left(\lambda=\frac{\theta^2e^{\theta+2}}{4}\right)$$

$$\sum_{b=4}^{\infty}\bar\beta_b<\bar\beta_4+\bar\beta_5+\bar\beta_6+\bar\beta_7+\frac{1}{2\sqrt{8\pi}}\int_{7\log\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}\,dv;$$

dalle definizioni (1.8) e (1.9) risulta

$$\overline{E}(3,\Theta)=\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\sum_{\overline{J}(3,i)}\ldots=\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\overline{E}_3^{(i)}$$

dove

$$\overline{E}_3^{(0)}=1$$

$$\overline{E}_3^{(1)}=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$

$$\overline{E}_3^{(2)}=\frac{1}{2}\{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^2-\theta_1^2\}$$

$$\overline{E}_3^{(3)}=\frac{1}{6}\{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^3-\theta_1^3-3\theta_1^2(\theta_2+\theta_3)\}$$

$$\overline{E}_3^{(4)}=\frac{\theta_3}{24}\{4\theta_1(3\theta_2^2+3\theta_2\theta_3+\theta_3^2)+2\theta_2(2\theta_2^2+3\theta_2\theta_3+2\theta_3^2)+\theta_3^3\}$$

$$\overline{E}_3^{(5)}=\frac{\theta_3^2}{120}\{5\theta_1(6\theta_2^2+4\theta_2\theta_3+\theta_3^2)+5\theta_2(2\theta_2^2+2\theta_2\theta_3+\theta_3^2)+\theta_3^3\}.$$

Assumendo come in (2.3)

$$\theta_1=0{,}90,\qquad \theta_2=0{,}56,\qquad \theta_3=0{,}52,\qquad \theta=0{,}50$$

risulta

$$e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}>7{,}24274$$

$$\overline{E}(3,\Theta)>0{,}0122847$$

$$\frac{\theta_1\theta_2^2\theta_3^2}{\theta^5 e^{3\theta}}<0{,}5449213$$

$$\sum_{b=4}^{\infty}\overline{\beta}_b<0{,}0223742$$

(2.6) $$\overline{\sigma}=\overline{\sigma}(3,\Theta)>0{,}00066\ \ (>0).$$

3. - TEOREMA I. - *Denotiamo con $A(z,\xi)$ il numero degl'interi x, pei quali sono soddisfatte le condizioni seguenti*

1°) $z<x\leqq z+\xi$,

2°) *ogni divisore primo di $F(x)$ è maggiore di p_t,*

3°) *ogni eventuale divisore quadrato di $F(x)$ è maggiore di p_r^2* (9).

Fissato $\varepsilon>0$ arbitrario, esiste un numero $\gamma=\gamma(\varepsilon,F,\Theta)$ dipendente soltanto da ε, F, Θ tale che per

(3.1) $$r\geqq t\geqq\gamma(\varepsilon,F,\Theta)$$

risulta

(3.2) $$(\overline{\sigma}-\varepsilon)\mu_F\frac{\xi}{\log^f p_t}-p_r p_t^{2\tau(f)+\varepsilon}<A(z,\xi)<(\sigma+\varepsilon)\mu_F\frac{\xi}{\log^f p_t}+p_r^2 p_t^{2\tau(f)+\varepsilon}.$$

Osservazione. - I membri estremi di questa limitazione sono indipendenti da z.

(9) È ovvio che si fa eccezione del divisore quadrato 1. Questa eccezione resta sottintesa anche per tutto il seguito.

4. - Conseguenze del Teorema I. — Il Teorema I si presenta in una forma molto generale e da esso possiamo trarre proposizioni interessanti, le quali non sono altro che suoi aspetti particolari.

Ci limitiamo qui ad enunciarne alcune.

TEOREMA. - *Sia* $\omega>0$. *Denotiamo con* $C_\omega(\xi;\ F(x))$ *il numero degl'interi* x, *con* $0<x\leqq\xi$, *pei quali ogni divisore primo di* $F(x)$ *è maggiore di* x^ω. *Risulta*

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}}\, C_\omega(\xi;\ F(x))\,\frac{\log^f\xi}{\xi}\leqq\begin{cases}\dfrac{\sigma\mu_F}{\omega^f} & \text{per } 0<\omega\leqq\dfrac{1}{2(1+\tau(f))}\\[2ex] 2^f(1+\tau(f))^f\sigma\mu_F & \text{per } \omega>\dfrac{1}{2(1+\tau(f))}.\end{cases}$$

Dimostrazione. - Poichè

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}}\, C_\omega(\xi;\ F(x))\,\frac{\log^f\xi}{\xi}$$

è funzione non crescente di ω, e il secondo membro è funzione continua di ω, basta evidentemente dimostrare il teorema per

$$0<\omega<\frac{1}{2(1+\tau(f))}.$$

Sia $\eta>0$; poniamo $p_r=p_t\leqq\xi^{(1-\eta)\omega}<p_{t+1}$. Da (3.2) ricaviamo

$$\begin{aligned}C_\omega(\xi;\ F(x))&\leqq\xi^{1-\eta}+A([\xi^{1-\eta}],\ \xi-[\xi^{1-\eta}])\leqq\\&\leqq\xi^{1-\eta}+(\sigma+\varepsilon)\mu_F\frac{\xi}{\log^f p_t}+p_r^2p_t^{2\tau(f)+\varepsilon}\leqq\\&\leqq\xi^{1-\eta}+\frac{(\sigma+\varepsilon)\mu_F}{(1-\eta)^f\omega^f}\frac{\xi}{\log^f\xi}+\xi^{(1-\eta)\omega(2+2\tau(f)+\varepsilon)+o(1)}.\end{aligned}$$

Da cui

$$C_\omega(\xi;\ F(x))\,\frac{\log^f\xi}{\xi}\leqq\frac{\log^f\xi}{\xi^\eta}+\frac{(\sigma+\varepsilon)\mu_F}{(1-\eta)^f\omega^f}+\xi^{(1-\eta)\omega(2+2\tau(f)+\varepsilon)+o(1)-1}\log^f\xi.$$

Per l'arbitrarietà di ε e di η possiamo assumere $(1-\eta)\omega(2+2\tau(f)+\varepsilon)<1$, e ne segue l'asserto.

In particolare si ha

TEOREMA. - *Sia* $F(x)$ *irriducibile. Denotiamo con* $\pi(\xi;\ F(x))$ *il numero degl'interi* x, *con* $0<x\leqq\xi$, *pei quali* $F(x)$ *risulta primo. Allora*

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}}\,\pi(\xi;\ F(x))\,\frac{\log\xi}{\xi}\leqq2(1+\tau(1))\sigma\mu_F.$$

I valori calcolati (n.° 2, (2.2) e (2.5)) $\tau(1)<1{,}168$, $\sigma<1{,}210$ ci dànno

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}}\,\pi(\xi;\ F(x))\,\frac{\log\xi}{\xi}<\frac{29}{4}\,\mu_F.$$

Si precisa così un teorema di H. HEILBRONN [4] che afferma

$$\pi(\xi;\ F(x))=O\left(\frac{\xi}{\log\xi}\right).$$

Dal Teorema I seguono immediatamente i Teoremi (B) e (C) dell'Introduzione. Ci limitiamo a considerare il Teorema (C) come più generale; anzi la parte 1°) del Teorema (C) è contenuta come caso particolare nella successiva parte 2°) poichè facendo in questa $s=3g$ risulta

$$\frac{s-g}{2s}=\frac{1}{3}, \qquad \left[\frac{2sg-1}{s-g}\right]=3g-1,$$

e ci limiteremo a dimostrare questa parte 2°).

Per la limitazione a destra basta invocare il primo teorema di questo numero, col porre in esso $\omega=\frac{s-g}{2s}$; dalla definizione di $C_\omega(\xi;\ F(x))$ segue immediatamente (essendo $F(x)$ irriducibile è da porre $f=1$)

$$B(\xi;\ F(x))\leqq C_\omega(\xi;\ F(x))<a_2\frac{\xi}{\log\xi}, \quad \text{per } \xi\geqq\xi_0 \text{ (conveniente).}$$

Veniamo a dimostrare la limitazione a sinistra. Poichè, per $\xi\geqq\xi_1$ conveniente, da $0<x\leqq\xi$ segue $|F(x)|<F(\xi)<(a_g+1)\xi^g$, ci conviene assumere nella formulazione del Teorema I

$$p_t\leqq(a_g+1)\xi^{\frac{s-g}{2s}}<p_{t+1}, \qquad p_r\leqq(a_g+1)\xi^{\frac{g}{s}}<p_{r+1}$$

e allora risulta evidentemente $B(\xi;\ F(x))\geqq A(0,\xi)$ e la questione è ricondotta a limitare di sotto la funzione $A(0,\xi)$. Dalle posizioni precedenti abbiamo

$$p_r p_t^{2\tau(1)+\varepsilon}\leqq(a_g+1)^{1+2\tau(1)+\varepsilon}\xi^{1-\varkappa},$$

dove

$$\frac{g}{s}+\frac{s-g}{2s}(2\tau(1)+\varepsilon)=\frac{g}{s}+\left(1-\frac{g}{s}\right)\left(\tau(1)+\frac{\varepsilon}{2}\right)=1-\left(1-\tau(1)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g}{s}\right)=1-\varkappa.$$

Per $\varepsilon>0$ abbastanza piccolo è $\varkappa>0$, poichè $\tau(1)<0{,}99$ (vedi (2.4)), $1-\frac{g}{s}\geqq\frac{1}{g+1}>0$. Essendo

$$\log p_t=\frac{s-g}{2s}\log\xi+o(1),$$

dal Teorema I risulta

$$A(0,\xi)>(\bar\sigma-\varepsilon)\mu_F\frac{\xi}{\frac{s-g}{2s}\log\xi+o(1)}-\xi^{1-\varkappa}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue l'asserto poichè $\bar\sigma>0$, $\varkappa>0$.

Dal Teorema I ricaviamo anche la proposizione seguente che ci limitiamo ad enunciare ([10]).

TEOREMA. - *Siano*

$$a_1x+b_1, \quad a_2x+b_2,\ldots, \quad a_fx+b_f \qquad ((a_i,\ b_i)=1,\ i=1,2,\ldots,f)$$

([10]) Vedi G. RICCI [11], p. 445.

f progressioni aritmetiche distinte ($f \geqq 1$) *ciascuna colla ragione e il termine iniziale primi tra loro; sia D il divisore fisso del polinomio*

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots\ldots(a_fx+b_f)$$

e poniamo

$$a_1x+b_1=d_1P_1, \quad a_2x+b_2=d_2P_2,\ldots\ldots, \quad a_fx+b_f=d_fP_f,$$

con $d_1d_2\ldots\ldots d_f=D$.

Il numero degl'interi positivi $x \leqq \xi$ *pei quali ciascuno degli f interi* $P_1, P_2,\ldots\ldots, P_f$ *si compone di al più* $[1+2\tau(f)]$ *fattori primi* (*uguali o distinti*) *tutti maggiori di* $\xi^{\frac{1}{1+2\tau(f)}}$ *ha l'ordine di grandezza* $\frac{\xi}{\log^f \xi}$.

Lo stesso ordine di grandezza ha altresì il numero degl'interi positivi $x \leqq \xi$ *pei quali ciascuno degli f interi* $P_1, P_2,\ldots\ldots, P_f$ *si compone di al più* $[4\tau(f)]$ *fattori primi* **tutti distinti** *e tutti maggiori di* $\xi^{\frac{1}{4\tau(f)}}$.

Per $f=1, 2, 3,\ldots\ldots$ si ottiene rispettivamente dai valori (2.4)

$$[1+2\tau(f)]=2, 6, 14,\ldots\ldots \qquad [4\tau(f)]=3, 11, 18,\ldots\ldots$$

Ricaviamo anche le proposizioni seguenti:

TEOREMA. - *Denotiamo con* $T(\xi)$ *il numero dei coefficienti binomiali* $\binom{x}{g}$ *con* $0<x \leqq \xi$ *composti di al più* $g[1+2\tau(g)]$ *fattori primi* (*uguali o distinti*) *tutti maggiori di* $\xi^{\frac{1}{1+2\tau(g)}}$ (oppure: *composti di al più* $g[4\tau(g)]$ *fattori primi tutti distinti e tutti maggiori di* $\xi^{\frac{1}{4\tau(g)}}$).

Esistono tre numeri a_1, a_2, a_3, *dipendenti soltanto da g pei quali*

$$a_1 \frac{\xi}{\log^g \xi} < T(\xi) < a_2 \frac{\xi}{\log^g \xi} \quad \text{per } \xi \geqq a_3.$$

TEOREMA. - *Sia* $F(x)$ *di grado g, irriducibile, a valori interi e divisore fisso* 1; *consideriamo gl'interi*

$$F(x+1), \quad F(x+2),\ldots\ldots, \quad F(x+[x^\theta]) \qquad 0<\theta \leqq 1. \tag{4.1}$$

Per $x \geqq \xi_0$ *conveniente, fra gl'interi* (4.1) *se ne trova almeno uno composto con al più* $[2{,}98g/\theta]$ *fattori primi* (*uguali o distinti*) *tutti maggiori di* $x^{\frac{\theta}{2{,}98}}$.

Se $\frac{g}{\theta} < s \leqq \left[\frac{2{,}98g}{\theta}\right]$, *per* $x \geqq \xi_1$ *conveniente, fra gl'interi* (4.1) *se ne trova almeno uno composto con al più* $\left[\frac{1{,}98sg}{s\theta-g}\right]$ *fattori primi* (*uguali o distinti*) *tutti maggiori di* $x^{\frac{s\theta-g}{1{,}98s}}$ *e ciascuno ripetuto al più* $s-1$ *volte.*

Nel caso particolare $g=1$, $\theta=\frac{1}{2}$ otteniamo:

Per $x \geqq \xi_0$ conveniente, fra gl'interi

$$a(x+1)+b, \quad a(x+2)+b,\ldots, \quad a(x+[\sqrt{x}])+b \qquad (a, b=1)$$

ne esiste almeno uno composto con al più 5 fattori primi uguali o distinti tutti maggiori di $x^{\frac{1}{6}}$ (11); e ne esiste almeno uno privo di divisori cubici e composto con al più 11 fattori primi tutti maggiori di $x^{\frac{1}{12}}$.

Nel caso particolare $g=2$, $\theta=\frac{1}{2}$ otteniamo:

Per $x \geqq \xi_0$ conveniente, fra gl'interi ay^2+by+c $(y=x+1, x+2,\ldots, x+[\sqrt{x}])$ ne esiste almeno uno composto con al più 5 fattori primi (uguali o distinti).

5. - TEOREMA II. — *Sia $N>0$ intero e $D(N)$ l'intero (divisore di $(2g)!$) per il quale il polinomio*

$$H(x)=\frac{F(x)F(x-N)}{D(N)}$$

risulta a valori interi e divisore fisso 1. *Denotiamo con $h_N(m)$ il numero delle radici distinte della congruenza*

$$H(x) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Denotiamo con $B(z, \xi)$ il numero degl'interi x pei quali sono soddisfatte le condizioni seguenti

1°) $z<x \leqq z+\xi$,

2°) *ogni divisore primo di $H(x)$ è maggiore di p_t,*

3°) *ogni eventuale divisore quadrato di $H(x)$ è maggiore di p_r^2.*

Fissato $\varepsilon>0$ arbitrario, esiste un numero $\gamma=\gamma(\varepsilon, F, \Theta)$ dipendente soltanto da ε, F, Θ tale che per

$$r \geqq t \geqq \gamma(\varepsilon, F, \Theta)$$

risulta

$$B(z, \xi) \begin{cases} > \xi(\bar{\sigma}-\varepsilon) \prod_{p \leqq p_t} \left(1-\frac{h_N(p)}{p}\right) - p_r p_t^{2\tau(f)+\varepsilon} \\ < \xi(\sigma+\varepsilon) \prod_{p \leqq p_t} \left(1-\frac{h_N(p)}{p}\right) + p_r^2 p_t^{2\tau(f)+\varepsilon}. \end{cases}$$

6. - Conseguenze del Teorema II.

TEOREMA. - *Sia $F(x)$ irriducibile. Poniamo*

$$z_1+z_2=N \quad (z_1>0, z_2>0), \qquad F(z_1)=d_1P, \qquad F(z_2)=d_2Q, \qquad d_1d_2=D(N).$$

---

(11) Vedi V. BRUN [1], p. 24; ivi si trova questa proposizione per 11 fattori primi.

Per $N \geqq N_0$ conveniente esistono coppie (z_1, z_2) tali che ciascuno dei due interi P, Q risulta composto con al più [6,6g] *fattori primi uguali o distinti tutti maggiori di* $N^{\frac{1}{7}}$ (oppure: *risulta composto con al più* $\left[\frac{5,6gs}{s-g}\right]$ *fattori primi uguali o distinti maggiori di* $N^{\frac{s-g}{5,6gs}}$, *ciascuno ripetuto al più* $s-1$ *volte, dove* $g+1 \leqq s \leqq 6,6g$).

Questo teorema si ricava dal Teorema II con una dimostrazione analoga a quella che ha servito per ricavare il Teorema (*C*) dal Teorema I (vedi n.° 4). La sola novità è costituita dall'osservazione

$$0 < h(p) \leqq h_N(p) \leqq 2h(p)$$

$$1 - \frac{h_N(p)}{p} \geqq 1 - \frac{2h(p)}{p} = \left(1 - \frac{h(p)}{p}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{h(p)}{p-h(p)}\right)^2\right\}$$

ed essendo il prodotto infinito $\Pi \left\{1 - \left(\frac{h(p)}{p-h(p)}\right)^2\right\}$ convergente, risulta (vedi 1.12)

$$\frac{1}{\log^{2f} p_t} = O\left(\prod_{p \leqq p_t} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right)\right).$$

Si assuma quindi $\xi = N$, ecc.

Per $F(x) = x$, N pari, $s=2$ risulta $\left[\frac{5,6gs}{s-g}\right] = 11$ e perveniamo al seguente

TEOREMA. - *Ogni intero N pari, maggiore di un conveniente* N_0, *si può ripartire nella somma di due interi positivi ciascuno composto con al più* 11 *fattori primi tutti distinti e tutti maggiori di* $N^{\frac{1}{12}}$.

7. - Per dimostrare il Teorema (*A*) ci sarà utile la proposizione seguente che ricaviamo come conseguenza del Teorema II.

TEOREMA. - *Sia*

$$j = p_1 p_2 \ldots p_v \geqq 2, \qquad (a, j) = 1.$$

Denotiamo con q gl'interi liberi da quadrati e primi con j.

Poniamo

$$\varphi(j) = (p_1 - 1)(p_2 - 2) \ldots (p_v - 1), \quad (\textit{indicatore di } \text{EULER})$$

$$\beta(j) = \prod_{p > p_v} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2},$$

$$\psi(q) = \prod_{p/q} (p-2).$$

Denotiamo con L(N) il numero degl'interi positivi $x \leqq N$ *tali che il prodotto*

$$H(x) = (jx + a)(jx + a - jN)$$

si compone di divisori primi tutti maggiori di $N^{\frac{1}{2}}$.

Risulta

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{L(N)}{\frac{N}{\log^2 N}\sum_{q/N}\frac{1}{\psi(q)}} \leqq 16e^{-2C}\frac{j^2\beta(j)}{\varphi^2(j)}(1+\tau(2))^2\sigma.$$

Dimostrazione. - Poniamo nel Teorema II

$$F(x)=jx+a, \qquad z=0, \qquad \xi=N, \qquad p_r=p_t\leqq N^{\frac{1}{2(1+\tau(2)+\varepsilon)}}<p_{t+1}.$$

Risulta

$$h_N(p)=\begin{cases} 0 & \text{per } p\leqq p_v \\ 1 & \text{per } p>p_v, \quad p/N \\ 2 & \text{per } p>p_v, \quad p\nmid N, \end{cases}$$

$$\prod_{p\leqq p_t}\left(1-\frac{h_N(p)}{p}\right)=\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p/N}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p\nmid N}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=$$

$$=\prod_{p_v<p\leqq p_t}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p\nmid N}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p\nmid N}}\frac{1-\frac{2}{p}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}=$$

$$=\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p/N}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p_v<p\leqq p_t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\prod_{p_v<p\leqq p_t}\frac{1-\frac{2}{p}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p/N}}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{p}\right)}=$$

$$=\prod_{p_v<p\leqq p_t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\cdot\prod_{p_v<p\leqq p_t}\frac{1-\frac{2}{p}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}\cdot\prod_{\substack{p_v<p\leqq p_t \\ p/N}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right).$$

Si conclude

$$\prod_{p\leqq p_t}\left(1-\frac{h_N(p)}{p}\right)\sim\frac{j^2}{\varphi^2(j)}\beta(j)e^{-2C}\sum_{q/N}\frac{1}{\psi(q)}\cdot\frac{1}{\log^2 p_t}.$$

Essendo per la scelta di p_t

$$\log N\sim 2(1+\tau(2)+\varepsilon)\log p_t \qquad \text{per } N\to+\infty$$

risulta

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{B(0,N)}{\frac{N}{\log^2 N}\sum_{q/N}\frac{1}{\psi(q)}}\leqq(1+\eta)16e^{-2C}\frac{j^2\beta(j)}{\varphi^2(j)}(1+\tau(2))^2\sigma$$

con $\eta\to 0$ per $\varepsilon\to 0$. Questa limitazione vale a maggior ragione se in luogo di $B(0,N)$ si sostituisce $L(N)$, essendo evidentemente $L(N)\leqq B(0,N)$. Data l'arbitrarietà di ε il teorema risulta dimostrato.

8. - TEOREMA III. - *Fissato* $\omega \geqq 0$, *sia*

$$\omega = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{d-1} + \lambda\theta_d}{f} \qquad (d \geqq 1,\ 0 \leqq \lambda < 1)$$

$$\log p_v \leqq e^{-\omega} \log p_t < \log p_{v+1}.$$

Conserviamo le notazioni del Teorema II.

Denotiamo con $C(z, \xi)$ *il numero degl'interi* x *pei quali sono soddisfatte le condizioni seguenti*

1°) $z < x \leqq z + \xi$,

2°) *ogni divisore primo di* $F(x)$ *è maggiore di* p_t,

3°) *ogni divisore primo di* $F(x-N)$ *è maggiore di* p_v,

4°) *ogni eventuale divisore quadrato di* $H(x)$ *è maggiore di* p_r^2.

Fissato $\varepsilon > 0$ *arbitrario, esiste un numero* $\gamma = \gamma(\varepsilon, F, \Theta, \omega)$ *dipendente soltanto da* ε, F, Θ, ω *tale che per*

$$r \geqq t \geqq \gamma(\varepsilon, F, \Theta, \omega)$$

risulta

$$C(z, \xi) \begin{cases} > \xi(\bar\sigma - \varepsilon) \dfrac{\log^f p_v}{\log^f p_t} \prod\limits_{p \leqq p_v} \left(1 - \dfrac{h_N(p)}{p}\right) - p_r p_t^{2\bar\tau + \varepsilon}, \\ < \xi(\sigma + \varepsilon) \dfrac{\log^f p_v}{\log^f p_t} \prod\limits_{p \leqq p_v} \left(1 - \dfrac{h_N(p)}{p}\right) + p_r^2 p_t^{2\bar\tau + \varepsilon}, \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$\bar\tau = \sum_{i=1}^{d-1} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_i}{f}\right) + \exp\left(-\frac{\omega}{2}\right) \sum_{i=d}^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_i}{f}\right).$$

9. - Conseguenze del Teorema III.

Da questo teorema ricaviamo subito il Teorema (*D*) (vedi Introduzione). Tanto per fissare le idee, dimostriamo per esempio:

$$\frac{N}{\log^2 N} = O(W(N)).$$

Assumiamo $F(x) = x$, $z = 0$, $\xi = N$ pari, $p_r = p_t$; allora risulta $f = 1$, $D(N) = 1$, $H(x) = x(x-N)$, $1 \leqq h_N(p) \leqq 2$ e anche

$$C(0, N) \geqq N(\bar\sigma - \varepsilon) \frac{\log p_v}{\log p_t} \cdot \frac{1}{2} \prod_{2 < p \leqq p_v} \left(1 - \frac{2}{p}\right) - p_t^{1 + 2\bar\tau + \varepsilon}.$$

Da questa limitazione, tenendo conto che

$$\frac{1}{\log^2 p_v} = O\left(\prod_{2 < p \leqq p_v} \left(1 - \frac{2}{p}\right)\right), \qquad \frac{\log p_v}{\log p_t} = e^{-\omega} + o(1) \quad \text{per } t \to +\infty$$

e assumendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da avere $\bar\sigma - \varepsilon > 0$ otteniamo

$$\frac{N}{\log^2 p_v} = O(C(0, N) + p_t^{1 + 2\bar\tau + \varepsilon}).$$

Adesso siamo ricondotti a scegliere opportunamente $\omega \geqq 0$ costante, $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo e p_t come funzione di N: basterà che una tale scelta sia fatta in guisa da avere

$$p_t^{1+2\bar{\tau}+2\varepsilon} \leqq N < p_{t+1}^{1+2\bar{\tau}+2\varepsilon}$$

$$[1+2\bar{\tau}]=[1+2\bar{\tau}+2\varepsilon] \leqq a, \qquad [e^{\omega}(1+2\bar{\tau})]=[e^{\omega}(1+2\bar{\tau}+2\varepsilon)] \leqq b.$$

Infatti per ogni tale scelta risulta evidentemente

$$p_t^{1+2\bar{\tau}+\varepsilon} = o\left(\frac{N}{\log^2 N}\right) \quad \text{per } N \to +\infty, \qquad p_v \leqq N,$$

e, riflettendo sulle definizioni di $C(0, N)$ e $W(N)$, anche

$$C(0, N) \leqq W(N).$$

Si conclude

$$\frac{N}{\log^2 N} \leqq \frac{N}{\log^2 p_v} = O\left(C(0, N) + o\left(\frac{N}{\log^2 N}\right)\right) = O(C(0, N) = O(W(N)),$$

cioè l'asserto.

La possibiltà della scelta di ε, quando siano soddisfatte tutte le altre condizioni, è evidente. Per scendere al caso numerico assumiamo come al n.° 2 (2.3)

$$\theta_1 = 0{,}90, \qquad \theta_2 = 0{,}56, \qquad \theta_3 = 0{,}52, \qquad \theta_4 = \theta_5 = \ldots = \theta = 0{,}50$$

e con questo risulta (vedi (2.6)) $\bar{\sigma}(3, \Theta) > 0$. I diversi valori di ω con i qual si conclude li scegliamo come segue

1°) $\omega = 0$,

$$d=1, \qquad \lambda=0, \qquad \bar{\tau}=\tau(2)<2{,}8 \quad \text{(vedi (2.4))}, \qquad a=6, \qquad b=6.$$

2°) $\omega = \log\frac{4}{3}$,

$$0 < \omega < \theta_1, \qquad d=1,$$

$$\bar{\tau} = e^{-\frac{1}{2}\omega}\left\{e^{-\frac{1}{2}\theta_1} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta})^{-1}\right\},$$

$$\bar{\tau}<2{,}43, \qquad a=5, \qquad b=7.$$

3°) $\omega = \log 2$,

$0 < \omega < \theta_1$, $\quad d=1$, $\quad \bar{\tau}$ si esprime come nel caso precedente,

$$\bar{\tau}<1{,}98, \qquad a=4, \qquad b=9.$$

4°) $\omega = \log 4$,

$$\theta_1 < \omega < \theta_1+\theta_2, \qquad d=2,$$

$$\bar{\tau} = e^{-\theta_1} + e^{-\frac{1}{2}\omega}\left\{e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(1-e^{-\frac{1}{2}\theta})^{-1}\right\},$$

$$\bar{\tau}<1{,}49, \qquad a=3, \qquad b=15.$$

5°) $\omega = 5{,}21 < \log 183{,}1$,

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+6\theta<\omega<\theta_1+\theta_2+\theta_3+7\theta, \qquad d=9,$$

$$\bar{\tau}=e^{-\theta_1}+e^{-(\theta_1+\theta_2)}+e^{-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}\frac{1-e^{-6\theta}}{1-e^{-\theta}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}(\omega+\theta_1+\theta_2+\theta_3+6\theta)}}{1-e^{-\frac{1}{2}\theta}},$$

$$\bar{\tau}<1, \qquad a=2, \qquad b=366.$$

10. - TEOREMA IV (L. SCHNIRELMANN, N. P. ROMANOFF, H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK). - *Sia*

$$j=p_1p_2\ldots p_v$$

$$\varrho(j)=\prod_{p>p_v}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

$$k=\left[\frac{16}{3}e^{-2C}\varrho(j)(1+\tau(2))^2\sigma\right]+1.$$

Ogni intero abbastanza grande ammette almeno una partizione del tipo

$$n=p'+p''+\ldots+p^{(2k)}+w, \qquad 0\leqq w\leqq jk-1. \tag{10.1}$$

Osservazione. - Il nostro lavoro è stato indirizzato a costruire nuove più convenienti forme per le funzioni σ e $\tau(2)$ (vedi n.° 1, (1.6), (1.10)); nel senso che un'opportuna scelta dei parametri ci desse un valore più piccolo per il prodotto $(1+\tau(2))^2\sigma$ in guisa da impiccolire l'intero k. Inoltre i valori numerici ottenuti ci hanno consigliato di impiccolire anche $\varrho(j)$ coll'assumere $j=210$ anzichè $j=30$ come in H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5].

Calcoli numerici. - Assumiamo

$$j=2\cdot3\cdot5\cdot7=210$$

Risulta

$$\frac{16}{3}e^{-2C}<1{,}6813, \qquad \varrho(j)<1{,}003$$

e coi valori (2.2) e (2.5) calcolati al n.° 2

$$(1+\tau(2))^2\sigma<18{,}9227,$$

da cui

$$k=32.$$

La partizione (10.1) è dunque della forma

$$n=p'+p''+\ldots+p^{(64)}+w, \qquad 0\leqq w\leqq 6719.$$

Poichè ogni intero $w+2$ si può rappresentare come somma di al più tre numeri primi, ne segue il Teorema (A) dell'Introduzione.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 7 gennaio 1937 - XV.