ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Salvatore Pincherle

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 1 (1937), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_1_1_0>

SALVATORE PINCHERLE

Il 10 luglio dello scorso anno, mentre il sole volgeva al tramonto, moriva in Bologna Salvatore Pincherle.

Matematico insigne, Egli aveva dedicato tutta la vita alla famiglia, alla scuola, alla scienza; ed esempio costante di mirabile operosità, aveva atteso, fino all'ultimo giorno, agli studi prediletti. Aveva sempre avuto a norma della Sua vita il dovere, la giustizia, la bontà; e la Sua scomparsa ha lasciato inconsolabili i congiunti, ha colpito dolorosamente e profondamente amici, colleghi e discepoli — ai quali Egli fu Maestro di scienza e di virtù civili — ed è stata una gravissima perdita per la matematica.

Nato a Trieste l'11 marzo 1853, frequentò le scuole medie a Marsiglia, ove la Sua famiglia erasi trasferita. Nel 1870 si inscrisse all'Università di Pisa ed entrò nella R. Scuola Normale Superiore, nella quale restò fino al 1874, anno in cui conseguì la laurea in scienze fisico-matematiche, discutendo una tesi « Sulle superficie di capillarità », che venne subito pubblicata nel «Nuovo Cimento». Dopo pochi mesi ottenne anche il diploma di abilitazione all'insegnamento.

Nel 1875 ebbe la cattedra di matematica nel R. Ginnasio-Liceo di Pavia, in cui insegnò con molta passione e con grande efficacia sino al 1880. Vinto un posto di perfezionamento all'estero, durante l'anno scolastico 1877-78 lasciò temporaneamente l'insegnamento per recarsi a Berlino, ove seguì con particolare interesse i corsi di E. Kummer, L. Kronecker e C. Weierstrass; e furono sopra tutto le lezioni del Weierstrass che suscitarono in Lui quelle idee e quelle tendenze che dovevano poi dominare tutta la Sua attività di ricercatore e di Maestro.

In seguito a concorso, nella primavera del 1880 ottenne la cattedra universitaria e fu nominato professore di analisi algebrica e geometria analitica nell'Università di Palermo. Sul finire dello stesso anno fu trasferito, conservando lo stesso insegnamento, all'Università di Bologna, alla quale restò poi devotamente fedele per tutta la vita. Nel 1912 passò alla cattedra di calcolo infinitesimale, che lasciò nel 1928 per collocamento a riposo avendo raggiunti i limiti di età.

Del Suo fervore per la scuola si ebbero subito a Bologna segni manifesti. La sezione matematica dell'Ateneo bolognese non possedeva ancora, nel 1881, tutti gli insegnamenti necessari per la laurea; ma Egli, insieme con l'Arzelà, seppe ottenere che questi insegnamenti venissero istituiti. E con Sua grande soddisfazione, nel 1882 l'Università di Bologna conferì per la prima volta una laurea in matematiche pure. Dopo il completamento della sezione matematica, Egli ebbe successivamente vari incarichi di geometria superiore, analisi superiore, matematiche complementari; e fu anche incaricato di conferenze per quella scuola di magistero che, per gli attuali ordinamenti, ora non esiste più.

Della nuova scuola matematica bolognese, Egli fu uno dei maggiori Maestri. Salito assai presto in alta fama come scienziato, fu Maestro autorevole e instancabile; e seppe insegnare con arte finissima e con grande abilità didattica le dottrine più astruse, rendendole accessibili anche agli allievi di intelligenza meno pronta. Negli insegnamenti del primo biennio della sezione fisico-matematica, che sono comuni agli allievi ingegneri ed a coloro che si avviano per la scienza pura, seppe tener sempre un giusto equilibrio, soddisfacendo il più possibile alle esigenze degli uni e degli altri; e fu sempre profondamente convinto che anche gli ingegneri, se vogliono esser veramente tali, devono possedere una solida cultura matematica.

Preparava le Sue lezioni con minuziosa cura, e le dettava poi senza esitazioni, senza pentimenti, e in modo tale che si sarebbero potute senz'altro raccogliere e pubblicare. Nei corsi superiori, destinati ai matematici puri, profondeva i tesori della Sua vasta cultura. Ogni anno cambiava l'argomento delle lezioni, che svolgeva dense di pensiero, ricche di contenuto, cercando di far conoscere ai Suoi scolari numerosi e vasti capitoli dell'analisi e della geometria, di condurli verso i più recenti risultati raggiunti in questi campi, e di suscitare in essi il desiderio del sapere ed anche quello della ricerca e della conquista personale.

Ma la Sua attività di Maestro non si limitava alle lezioni. Fuori della scuola era sempre a disposizione dei Suoi allievi, ben felice quando qualcuno ricorreva a Lui per delucidazioni, per consigli o per porGli delle questioni da risolvere. Ed ai giovani che, anche dopo la laurea, si tenevano vicini a Lui, suggeriva continuamente nuovi argomenti di studio e di ricerca; li guidava nei loro tentativi, li incitava a perseverare nei loro sforzi quando qualche grave difficoltà minacciava di scoraggiarli, e faceva sì che essi si giovassero largamente della Sua grande erudizione.

Da questa Sua opera di Maestro Egli trasse molte soddisfazioni e potè alla fine vantarsi di aver condotto alla cattedra universitaria numerosi discepoli. Ma potè anche avere la certezza di esser sempre stato seguito da tutti i Suoi scolari con ammirazione ed amore; perchè, sebbene Egli si fosse sempre tenuto lontano da eccessive indulgenze e nonostante la giusta severità dei Suoi giudizi, tutti i Suoi allievi videro sempre in Lui non soltanto lo scienziato ma anche l'educatore e l'Uomo dal cuor d'oro che sapeva ricambiare il loro affetto con altrettanto affetto. Ed essi tutti serberanno sempre per il venerato Maestro imperitura riconoscenza.

Del Suo attaccamento alla scuola diede nuova prova quando, allontanato dall'insegnamento ufficiale per collocamento a riposo, volle continuare con lezioni e conferenze la Sua preziosa collaborazione ai lavori del Suo Istituto di Matematica, Istituto che Egli aveva diretto per tanti anni e che l'Università di Bologna, in riconoscimento delle Sue alte benemerenze, aveva già intitolato al Suo Nome.

Anche la Sua operosità scientifica Gli procurò vive soddisfazioni e molteplici riconoscimenti. Ancor giovane, nel 1889 ebbe, diviso in parti uguali con Luigi Bianchi, il premio reale dell'Accademia dei Lincei per la matematica, premio che allora veniva dato per la prima volta; e nel 1928, quando dovette lasciare la cattedra che aveva illustrata per tanti anni, Gli fu assegnato dal Comune di Bologna il cospicuo premio Sacchetti. Fu uno dei XL della Società Italiana delle Scienze; socio della R. Accademia dei Lincei; accademico benedettino della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Torino, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio straniero della Royal Society di Edinburgo, dell'Accademia delle Scienze di Baviera, e di quella di Coimbra; membro onorario della Società Elvetica delle Scienze, delle società matematiche di Mosca e di Calcutta; dottore « honoris causa » dell'Università di Oslo; membro del Consiglio Nazionale delle Ricerche e del Consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo. Fu più volte Preside di Facoltà e Presidente dell'Accademia delle Scienze di Bologna; e fu pure membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione e condirettore degli « Annali di Matematica ».

Nel 1922 fondò l'Unione Matematica Italiana, di cui fu presidente sino a tutto il 1932; e contemporaneamente fondò anche il « Bollettino dell'Unione », che diresse sino alla Sua morte.

Nel 1924, durante il Congresso internazionale dei matematici di Toronto, fu eletto con magnifica votazione Presidente dell'Unione Matematica Internazionale, carica che lasciò spontaneamente nel 1928 dopo aver presieduto il Congresso internazionale dei matematici di Bologna. A questo Congresso, che era stato da Lui organizzato superando abilmente molteplici difficoltà, intervennero, per la prima volta dopo la guerra mondiale, scienziati di tutti i paesi; e l'importanza dei lavori che vi si svolsero è ampiamente documentata nei sei grandi volumi, pubblicati per Sua cura, che ne raccolgono le discussioni ed i risultati.

Nel febbraio 1929 il Suo giubileo accademico venne celebrato con un'indimenticabile manifestazione da discepoli, amici, ammiratori, i quali vollero farGli palesi i loro sentimenti di venerazione e di affetto. E più tardi, nel 1934, in occasione del Suo 60° anno di laurea, l'Accademia delle Scienze di Monaco e l'Università e la Scuola Normale Superiore di Pisa Gli inviavano messaggi di ammirazione e di augurio. Ed Egli ne rimaneva commosso. Erano degli estimatori lontani che si ricordavano a Lui e rendevano omaggio allo scienziato illustre; ed era anche la Scuola nella quale Egli aveva mosso i primi passi nella ricerca scientifica che si dimostrava orgogliosa dell'antico allievo. Il quale, precisamente in quella Scuola, aveva imparato che la vera cultura non può restringersi alla conoscenza di un solo ramo del sapere. Egli, infatti, di ingegno pronto e dotato di grande facilità di assimilazione, non soltanto seguì sempre con molto interesse gli sviluppi delle scienze più strettamente affini alla matematica e tutte le scienze naturali, ma conobbe assai bene la letteratura, la storia, la filosofia, le scienze sociali. Ebbe pure una larga cultura artistica e amò in modo particolare la musica, sì che fu, sino agli ultimi Suoi giorni, un appassionato e fine esecutore al pianoforte.

Di animo estremamente sensibile, e sempre incline alla bontà, fu esempio di domestiche e civili virtù. La Sua innata gentilezza, la signorilità dei Suoi modi, la Sua grande modestia, la Sua arguta parola, il sorriso con cui accoglieva amici e conoscenti non potranno mai essere dimenticati da quanti ebbero la fortuna di avvicinarLo. Fermo nelle Sue convinzioni, non tentò mai di imporle agli altri; evitò sempre gli aspri contrasti e non ebbe nemici. Di sentimenti italianissimi, sospirò lungamente la redenzione della Sua terra; e quando nei primi giorni del novembre 1918 potè rientrare nella Sua Trieste, finalmente italiana, parve trasfigurato, ringiovanito. Negli anni della grande guerra, Egli si rammaricava continuamente di non poter essere, per la Sua età avanzata, un soldato fra i soldati d'Italia; ma seppe ugualmente rendersi utile, dedicandosi alle opere di assistenza civile, cosicchè fu uno dei benemeriti della Casa del Soldato di Bologna.

La Sua attività di ricercatore ebbe inizio con la tesi di laurea (1874), dedicata alla determinazione della forma delle superficie libere di capillarità di vari liquidi e delle relative costanti di capillarità; determinazione proseguita poi in altro lavoro, pubblicato anch'esso nel «Nuovo Cimento». Da queste indagini, riguardanti più la fisica che la matematica e che diedero subito una buona prova delle Sue attitudini alla ricerca scientifica, Egli passò agli studi di matematica pura pubblicando alcune Note sulle superficie d'area minima e sulle equazioni algebrico-differenziali ed entrando poi subito in uno dei campi dell'Analisi che Egli ebbe a coltivare, in seguito, brillantemente per tutta la vita: la teoria delle funzioni. Mostrò così come nello studio delle funzioni doppiamente periodiche possa esser vantaggioso il prendere le mosse dalle funzioni a moltiplicatore; e poco dopo sviluppò in un apprezzatissimo saggio i fondamenti della teoria delle funzioni analitiche secondo i principi di C. Weierstrass. Era questa la prima volta che le idee del Weierstrass, che il Nostro aveva sentite esporre a Berlino dal grande analista, venivano fatte conoscere in Italia. Da queste idee Egli trasse succo vitale per tutte le Sue ulteriori ricerche; pur tuttavia, e nonostante l'incondizionata ammirazione da Lui sempre conservata per il Weierstrass, non si rese mai schiavo delle idee del Maestro, riconoscendo sempre l'importanza e l'utilità, nella teoria delle funzioni analitiche, anche di altri indirizzi.

Questi primi lavori, subito apprezzati, Gli fruttarono la cattedra universitaria.

Giunto a Bologna, allargò immediatamente il campo delle Sue ricerche, le quali, continuate senza interruzione per oltre mezzo secolo, Gli procurarono sicura e larga rinomanza. Tali ricerche, che si svolsero prevalentemente nel dominio della variabile complessa e che si orientarono in gran parte verso gli sviluppi in serie ed il calcolo funzionale, riguardano (tralasciando gli argomenti minori) i sistemi di funzioni e gli sviluppi in serie ordinati secondo le funzioni di un dato sistema, l'interpolazione, gli ordini di infinito e le singolarità delle funzioni, i sistemi ricorrenti, le equazioni alle differenze finite, le frazioni continue e loro generalizzazioni, i problemi di iterazione, l'inversione degli integrali definiti e le trasformazioni di Heine, di Eulero, di Laplace-Abel, le funzioni determinanti, la teoria sintetica delle operazioni funzionali distributive.

Merita di essere subito rilevato che in alcuni fra i più antichi Suoi lavori trovansi delle considerazioni di carattere generale, riguardanti i fondamenti dell'Analisi, che sono poi diventate di uso corrente. Così in una Memoria del 1881 è dato il concetto di sistema di funzioni limitate nel loro insieme, e, in un'altra del 1893, quello di funzione dei punti di un dato insieme. E nel lavoro « *Sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni analitiche* » (1881) viene pure stabilita una proposizione generale (della quale il Pincherle ha anche indicato alcune importanti applicazioni) equivalente all'ormai classico teorema di copertura, da molti ricordato sotto il nome di teorema di Heine-Borel-Lebesgue.

Considerate le serie della forma $\sum \varphi_\nu(x) f_\nu(x)$, sotto svariate ipotesi per i due sistemi di funzioni analitiche $\varphi_\nu(x)$ e $f_\nu(x)$, Egli cerca quali siano le funzioni regolari per $x=0$ che ammettono uno sviluppo di questa forma, e ne studia i punti singolari in relazione con quelli delle $f_\nu(x)$. Più tardi, generalizzando una proprietà degli sviluppi in serie di polinomi di Legendre, mette in evidenza la relazione esistente tra le curve di convergenza delle serie ordinate secondo le funzioni di una successione data $\psi_n(x)$ e la natura della funzione generatrice delle $\psi_n(x)$. E, in queste ricerche, ottiene dei sistemi di relazioni che rappresentano una prima estensione all'infinito della teoria dei determinanti; rileva la possibilità degli sviluppi dello zero, già incontrati dal Frobenius in un caso particolare; stabilisce per la prima volta i rapporti fra le proprietà della serie $\sum a_n x^n$ e quelle dell'altra $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$.

Passando a sviluppi di altra natura e precisamente a quelli in serie di fattoriali e loro generalizzazioni immediate, stabilisce molte interessanti proprietà degli sviluppi

$$\sum c_n x(x-1) \ldots (x-n+1), \qquad \sum \frac{c_n}{x(x+1) \ldots (x+n)},$$

particolarmente per quanto riguarda le condizioni di convergenza, gli sviluppi dello zero, i rapporti con la serie $\sum \frac{c_n}{t^{n+1}}$; e poi estende parte di queste proprietà alle serie più generali

$$\sum c_n(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n), \qquad \sum \frac{c_n}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)},$$

sotto opportune condizioni per la successione $a_1, a_2, \dots$, ottenendo risultati che generalizzano quelli precedentemente conseguiti dal Frobenius e da altri autori.

Studia anche gli sviluppi in serie procedenti secondo le derivate successive di una data funzione, e mostra che essi, contrariamente a quanto potrebbe a prima vista ritenersi, si estendono a classi assai estese di funzioni; mostra pure che tali sviluppi permettono di rappresentare l'integrale di un'equazione differenziale lineare a coefficienti analitici e con secondo membro, il quale dà, insieme con le sue derivate successive il sistema delle funzioni con cui lo sviluppo si forma.

Allargando il campo delle indagini relative agli sviluppi in serie ordinati secondo le funzioni di un dato sistema, è condotto a riconoscere che fra le proprietà essenziali, le quali caratterizzano quei sistemi che consentono di meglio approfondire lo studio degli sviluppi indicati, è la *ricorrenza lineare.* In conseguenza di ciò, Egli esamina ampiamente le proprietà generali dei sistemi ricorrenti, per potere poi affrontare e risolvere le questioni fondamentali di questa teoria. Trattato rapidamente il caso della ricorrenza lineare del primo ordine, nello studio di quella del secondo ordine viene a trovarsi in presenza dell'algoritmo delle frazioni continue algebriche, il quale Gli impone particolari ricerche. Passa poi al caso più complesso e più interessante delle relazioni ricorrenti di ordine qualunque; e nell'esame di questo caso Egli giunge ad un'importante generalizzazione delle frazioni continue algebriche, generalizzazione ottenuta poco dopo anche da un grande analista francese, C. Hermite. Nella discussione di questi problemi sottopone ad una minuziosa indagine l'equazione alle differenze del terzo ordine (dalla quale si passa senza nuove serie difficoltà all'equazione di ordine qualunque) e per essa pone un concetto fondamentale, quello di *integrale distinto*, che si presenta come generalizzazione del *valore* di una frazione continua e che è caratterizzato dal fatto che il suo rapporto ad ogni altro integrale dell'equazione tende a zero per $n \to \infty$.

Da queste ricerche Egli è indotto a studiare ripetutamente alcuni operatori, fra i quali quello che il Casorati aveva proposto di indicare col simbolo θ e che i matematici francesi avevano già chiamato l'« état varié »; ed è pure portato a lumeggiare l'importanza delle equazioni differenziali nella generazione dei sistemi ricorrenti.

Assai più tardi e seguendo un ordine d'idee molto diverso, si rivolge ai problemi d'iterazione, considerati sia nel campo reale sia in quello complesso. Studia in tal modo le equazioni funzionali di Babbage e di Schroeder; ma risultati più interessanti ottiene in alcuni particolari problemi d'iterazione « in grande » delle funzioni razionali, coi quali precorre le ricerche più generali del Julia, del Fatou e del Ritt. E degno sopra tutto di nota è il fatto, da Lui messo in luce, che i polinomi V_n di Serret, i quali risolvono l'equazione $V_n - xV_{n-1} + V_{n-2} = 0$, sono le iterate d'indice $r = \log_2 n$ della funzione $x^2 - 2$.

Per quanto le ricerche di cui si è fatto cenno sin qui siano notevoli e valgano da sole ad assicurare al Pincherle un posto molto onorevole fra i matematici degli ultimi cinquant'anni, pure i risultati di gran lunga più importanti, da Lui ottenuti, si riferiscono al calcolo funzionale, sia per quanto riguarda particolari operazioni funzionali, sia per la Sua teoria sintetica delle operazioni funzionali distributive, alla quale dedicò molte Memorie ed anche un'opera fondamentale, scritta in collaborazione con Ugo Amaldi: « *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi* ». Per questi Suoi lavori Egli è riconosciuto come uno dei fondatori del calcolo funzionale; il quale è andato in questi ultimi anni e va sempre più affermandosi vittoriosamente e costituirà in avvenire, secondo quanto è oggi possibile prevedere, una delle parti più essenziali della matematica.

Nel 1885 il Pincherle cominciò ad occuparsi del problema dell'inversione degli integrali definiti che, secondo la terminologia moderna, è quello dell'equazione integrale di prima specie

$$\int_{(c)} K(x, y)\varphi(y)dy = f(x),$$

nella quale $K(x, y)$ e $f(x)$ sono elementi dati, mentre l'incognita è rappresentata dalla funzione $\varphi(y)$. E qui portò una nuova veduta considerando il primo membro dell'equazione scritta come un *operatore*, ossia come una *trasformazione funzionale* o (più semplicemente) un *funzionale* applicato all'elemento $\varphi(y)$. Tale operatore stabilisce una corrispondenza fra $\varphi(y)$ e $f(x)$, che gode della proprietà distributiva; e la soluzione dell'equazione vien fatta dipendere dallo studio di questa corrispondenza. Al quale studio Egli si dedicò mantenendosi sempre nel campo complesso e supponendo dapprima il nucleo $K(x, y)$ della forma $\frac{1}{y-x}$ oppure dell'altra $\frac{x}{y}$, e poi considerando (più generalmente) i nuclei razionali.

Dalle questioni di carattere generale riguardanti l'operatore sopra indicato, passò allo studio di alcune fra le più importanti trasformazioni funzionali classiche. Così trattò delle trasformazioni di Heine e di Eulero, mostrando, fra l'altro, che le equazioni della classe di Fuchs hanno delle trasformate (di Eulero) della stessa classe, aventi i medesimi punti singolari; il che ha notevole importanza perchè permette di integrare mediante integrali definiti numerosi tipi di equazioni non omogenee.

Altre ricerche dedicò alla trasformazione di Laplace-Abel, tanto importante per le sue molteplici applicazioni, trasformazione che potè definire, indipendentemente da ogni espressione analitica, mediante le sue proprietà caratteristiche, consistenti nella trasformazione della moltiplicazione per la variabile nella derivazione, e nella trasformazione della derivazione nella moltiplicazione per la variabile, cambiata di segno. Della trasformazione di Laplace-Abel si servì abilmente in una classica Memoria (pubblicata dapprima, nel 1888, presso l'Accademia di Bologna e poi, nel 1926, riprodotta negli « Acta Mathematica ») sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\sum h_\nu \varphi(x+a_\nu)=f(x)$ a coefficienti costanti, nella quale si intravvede il metodo di sommazione esponenziale ed il relativo poligono di sommabilità che costituiscono uno dei grandi meriti di E. Borel.

A questi studi si riattacca anche un'altra Memoria, pure essa ormai classica: « *Sull' inversione degli integrali definiti* », pubblicata nel 1907, nella quale, fra l'altro, Egli risolve il problema dell'integrazione di un'equazione differenziale lineare non omogenea, a coefficienti costanti e d'ordine infinito, e pure risolve un notevole sistema di infinite equazioni lineari ad infinite incognite. Infine, sempre a proposito della trasformazione di Laplace-Abel, vanno menzionate le Sue ricerche sulle funzioni determinanti, con le quali, oltre ad ottenere risultati nuovi, riuscì a completare, coordinare e sistemare uno dei più importanti capitoli della teoria delle funzioni.

Dallo studio di particolari operazioni funzionali lineari, il Pincherle passò a quello sintetico delle operazioni distributive, fondando una teoria generale la quale, mentre si riattacca a quella dell'antico calcolo simbolico, porta molta luce su numerose questioni, trova applicazione alle equazioni lineari differenziali, alle differenze finite e alle sostituzioni, offre elementi che sembrano essenziali nelle teorie della fisica moderna, e lascia anche intravvedere un metodo per giungere ad una graduale classificazione delle trascendenti analitiche.

I concetti fondamentali di questa teoria il Pincherle stesso li espose con grande chiarezza nella prefazione al libro: « *Le operazioni distributive* ». « In primo luogo — Egli scrisse — osservando che ogni funzione analitica di una variabile è individuata dai valori attribuiti ad un numero generalmente infinito ma numerabile di parametri, si possono considerare quelle classi di funzioni che contengono tutte le combinazioni lineari dei loro elementi, ad esempio la totalità delle funzioni regolari nell'intorno di uno stesso punto, come spazi ad un numero generalmente infinito, ma numerabile di dimensioni. Le operazioni distributive applicabili alle funzioni di una simile classe si presentano allora come una generalizzazione naturale di ciò che sono le omografie negli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni; e questo concetto, tanto più se sussidiato da una notazione semplice ed espressiva, permetterà di intuire in modo sintetico, e colla guida di continuate analogie colla geometria, molteplici relazioni di composizione, di scomposizione, di classificazione in gruppi, di trasformazioni di siffatte operazioni.

» In secondo luogo, si può notare che i problemi di natura puntuale, quelli cioè in cui si tratta di determinare uno o più numeri e di studiarne le variazioni, si trattano per mezzo delle operazioni fondamentali dell'aritmetica, addizione, moltiplicazione e divisione, dove non è escluso, mediante l'aggiunzione del concetto di passaggio al limite, che queste operazioni si possano ripetere un numero infinito di volte, dando così luogo ai noti algoritmi convergenti e alla ricerca dei quozienti differenziali. Ma nei problemi di indole *funzionale*, in cui l'ente incognito o variabile non è più un numero, bensì una funzione, la derivazione si presenta non più come una ricerca di limite, ma invece come un'operazione che si viene ad *aggiungere*, come elemento fondamentale di calcolo, a quelli già menzionati. Questi, in unione alla derivazione applicata un numero finito od una infinità numerabile di volte, bastano alla costruzione di tutte le operazioni distributive che, applicate a funzioni analitiche, generano funzioni del pari analitiche: operazioni studiate già, ma ordinariamente sotto la forma di integrali definiti curvilinei ».

Il calcolo funzionale creato dal Pincherle è dunque ben diverso da quello del Volterra. Mentre il secondo si pone da un punto di vista *quantitativo*, il primo si pone invece da quello *qualitativo*.

Nel calcolo funzionale del Pincherle ha valore fondamentale la *permutabilità* delle operazioni, e lo *scarto* dalla permutabilità di un operatore generico rispetto ad uno speciale operatore fisso (quello della moltiplicazione per la variabile) dà la *derivata funzionale*, concetto estremamente importante. Il quale, insieme con quello di *spazio funzionale*, costituisce la base della teoria e conduce ad uno sviluppo delle operazioni distributive, del tutto analogo alla serie del Taylor del calcolo differenziale. Questa *serie funzionale del Taylor* si presenta nella forma

$$A(\alpha\varphi)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{(n)}(\alpha)D^{n}\varphi,$$

dove $A^{(n)}$ è la derivata funzionale n^{esima} dell'operazione A e D^n è il simbolo della n^{esima} derivata ordinaria; e da essa, ponendovi $\alpha=1$, si deduce

$$A(\varphi)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{(n)}(1)D^{n}\varphi,$$

e cioè che, se un'operazione distributiva è definita nell'intorno di una funzione μ, quest'operazione può rappresentarsi mediante una serie procedente secondo le potenze intere positive del simbolo D di derivazione.

Nello studio delle omografie generalizzate ad uno spazio a infinite dimensioni, che con la Sua teoria Egli venne a compiere, fu condotto fin dal 1897 (nella Memoria: « *Appunti di calcolo funzionale distributivo* ») ad un'osservazione fondamentale sulla degenerescenza, ritrovata poi, nel 1910, da Hellinger e Toeplitz. Mentre in uno spazio ad un numero finito di dimensioni un'omografia degenere ha delle radici e trasforma lo spazio su cui opera in un sottospazio, in uno spazio ad infinite dimensioni si possono anche avere delle omografie degeneri che ammettono delle radici pur riproducendo l'intero spazio, ed altre che, pur non ammettendo radici, trasformano l'intero spazio in un sottospazio. Nello stesso lavoro in cui fu fatta quest'osservazione si trova anche, in un caso assai notevole, il determinante infinito che, nel caso generale, ha poi assunto nelle ricerche del Fredholm tanta importanza; vi si dimostra altresì che questo determinante è una funzione intera del parametro e si ottengono quegli elementi che poi furono chiamati dai matematici tedeschi *Eigenwerte* e *Eigenfunktionen.*

Alla teoria sintetica delle operazioni distributive è pure dedicato l'ultimo lavoro lasciato manoscritto dal Nostro e che figurerà negli « Annali di Matematica » col titolo: « *Contributo alla teoria degli operatori lineari* ». Questa Memoria, della quale l'ultimo capitolo è rimasto incompiuto, ed a cui Egli ha lavorato sino all'ultimo giorno, rappresenta una definitiva sistemazione delle ricerche da Lui stesso compiute in questi ultimi anni ed un completamento di quelle anteriori sul medesimo soggetto. In essa, dopo aver trattato, in una prima parte, degli operatori lineari in uno spazio ad infinite dimensioni i cui elementi sono vettori definiti mediante le loro componenti rispetto ad una base opportunamente scelta; e dopo aver studiato in modo particolare gli operatori normali, mostrando che quelli di rango n sono decomponibili in un prodotto di operatori di rango uno; si specifica, nella seconda parte, lo spazio funzionale scegliendo come suoi elementi le serie di potenze. Si considera più specialmente l'operatore xD, si ottengono notevoli sviluppi non soltanto in via formale ma anche in condizioni di validità effettiva, e si studiano diffusamente gli operatori normali dei vari ranghi.

A queste vaste indagini di natura strettamente scientifica, il Pincherle associò sempre una larga ed apprezzata attività dedicata ai trattati, scritti per la scuola con scrupolosa cura e con grande limpidezza; trattati che vanno dagli elementi dell'aritmetica, dell'algebra, della geometria e della trigonometria, all'algebra complementare o analisi algebrica, al calcolo infinitesimale, alla teoria delle funzioni analitiche; e dei quali alcuni ebbero molte edizioni.

Questa, nelle sue linee essenziali, è l'opera di **Salvatore Pincherle.** Ad essa la Sua fama resta sicuramente affidata.

LEONIDA TONELLI