

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LEONIDA TONELLI

**Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 5, n° 3-4 (1936), p. 315-320*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1936\\_2\\_5\\_3-4\\_315\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_315_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SULLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI GENERALMENTE A VARIAZIONE LIMITATA

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

La definizione di funzione di due variabili a variazione limitata, da me introdotta per le ricerche sulla quadratura delle superficie, si è mostrata molto utile negli studi sugli sviluppi in serie, e in particolare sugli sviluppi in serie doppia di FOURIER <sup>(1)</sup>. Nel caso delle funzioni discontinue, la mia definizione è stata generalizzata <sup>(2)</sup>; ma questa generalizzazione, per quanto riguarda gli sviluppi in serie, è risultata semplicemente illusoria. L. CESARI <sup>(3)</sup>, infatti, ha provato che ogni funzione quasi-continua che soddisfi alla definizione generalizzata risulta anche a variazione limitata se si trascurano i valori che essa assume in un certo insieme di misura (superficiale) nulla, valori che non hanno nessuna influenza sui coefficienti (per esempio) dello sviluppo in serie doppia di FOURIER della funzione.

Il CESARI ha pure dimostrato che, quando non si tenga alcun conto dei valori che una funzione quasi-continua  $f(x, y)$  assume in opportuni insiemi di misura (superficiale) nulla, la proprietà per essa di essere a variazione limitata risulta indipendente dalla direzione degli assi  $x$  e  $y$ ; ed ha così esteso alle funzioni quasi-continue quanto io avevo già stabilito per le funzioni continue (per le quali non occorre trascurare alcun valore). Per giungere a questo risultato, il CESARI ha messo in luce una proprietà caratteristica di quelle funzioni quasi-continue che, quando si trascurino i loro valori in un opportuno insieme di misura nulla, risultano a variazione limitata; ed ha espresso tale proprietà dicendo che le corrispondenti superficie  $z=f(x, y)$  sono ad *area generalizzata finita* (nel senso che sarà spiegato fra poco).

La dimostrazione da Lui data, che per le funzioni  $f(x, y)$  della classe indicata le corrispondenti superficie  $z=f(x, y)$  sono ad *area generalizzata finita*, si fonda sulla costruzione di una successione di superficie poliedriche, inscritte nella super-

---

<sup>(1)</sup> Cfr. L. TONELLI: *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*. (Annali di Matematica, S. IV, T. IV (1927), pp. 29-72); *Serie trigonometriche*, Bologna, N. Zanichelli (1928).

<sup>(2)</sup> C. R. ADAMS-J. A. CLARKSON: *Properties of functions  $f(x, y)$  of bounded variations*. (Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 36, 1934, pp. 711-730).

<sup>(3)</sup> L. CESARI: *Sulle funzioni a variazione limitata*. (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, T. V, pp. 299-313).

ficie  $z=f(x, y)$ ; e questa costruzione, alquanto laboriosa, si discosta completamente da quella di cui io mi giovai per dimostrare l'analogo teorema relativo alle funzioni  $f(x, y)$  continue ed a variazione limitata, e cioè che per esse la superficie  $z=f(x, y)$  è ad area (nel senso del LEBESGUE) finita.

Ora io mi propongo di mostrare, nelle pagine che seguono, che quella mia costruzione può vantaggiosamente utilizzarsi (con lievissime modificazioni, imposte dalle attuali condizioni più generali) anche nel caso (assai difficile) trattato dal CESARI.

1. - Sia  $f(x, y)$  una funzione (reale e ad un valore) definita nel quadrato  $Q$  del piano  $(x, y)$ , avente per vertici opposti  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

Diremo che la  $f(x, y)$  è, in  $Q$ , *generalmente a variazione limitata* se esiste un insieme  $I$ , di punti di  $Q$ , di misura superficiale nulla, tale che, indicate con  $V_x(y)$  e  $V_y(x)$  le variazioni totali, nell'intervallo  $(0, 1)$ , della  $f(x, y)$ , considerata rispettivamente come funzione della sola  $x$  e della sola  $y$  — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla  $f(x, y)$  nei punti di  $I$  — le  $V_x(y)$  e  $V_y(x)$  risultino, come funzioni rispettivamente di  $y$  e di  $x$  nell'intervallo  $(0, 1)$ , quasi-ovunque finite, quasi-continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE) <sup>(4)</sup>.

Diremo poi che la superficie  $z=f(x, y)$ , considerata per tutti i punti  $(x, y)$  di  $Q$  (e immaginata riferita ad un sistema cartesiano ortogonale  $(x, y, z)$ ), è ad *area generalizzata finita* <sup>(5)</sup> se esiste una successione di superficie poliedriche, rappresentabili nella forma  $z=\Sigma_n(x, y)$  ( $n=1, 2, \dots$ ), tali che:

$\alpha$ ) il contorno del campo di definizione della  $\Sigma_n(x, y)$  tenda uniformemente, per  $n \rightarrow \infty$ , al contorno di  $Q$ ;

$\beta$ ) le  $\Sigma_n(x, y)$  convergano, per  $n \rightarrow \infty$ , alla  $f(x, y)$  in quasi-tutto  $Q$ ;

$\gamma$ ) il minimo limite delle aree delle superficie  $z=\Sigma_n(x, y)$  sia finito (o, ciò che è lo stesso, le aree di tutte queste superficie siano superiormente limitate).

2. - Premesse queste definizioni, si tratta di dimostrare che:

*Se la funzione  $f(x, y)$ , data in  $Q$ , è ivi quasi-continua e generalmente a variazione limitata, la superficie  $z=f(x, y)$  è ad area generalizzata finita* <sup>(6)</sup>.

$\alpha$ ). Indichiamo con  $E$  un insieme di punti di  $Q$ , di misura superficiale nulla, tale che, per ogni  $\bar{x}$  e ogni  $\bar{y}$ , ambedue dell'intervallo  $(0, 1)$ , le variazioni totali  $V_x(\bar{x}, y)$  e  $V_y(x, \bar{y})$  della  $f(x, y)$ , considerata, rispettivamente, come funzione della sola  $x$  nell'intervallo  $(0, \bar{x})$  e della sola  $y$  nell'intervallo  $(0, \bar{y})$ , — variazioni calcolate trascurando completamente i valori della  $f(x, y)$  nei punti di  $E$  — risultino, come funzioni rispettivamente della  $y$  e della  $x$ , quasi-ovunque finite,

<sup>(4)</sup> Le funzioni generalmente a variazione limitata sono quelle che il CESARI (loc. cit. in <sup>(3)</sup>) ha chiamate *funzioni T\**.

<sup>(5)</sup> L. CESARI, loc. cit. in <sup>(3)</sup>.

<sup>(6)</sup> L. CESARI, loc. cit. in <sup>(3)</sup>.

quasi-continue e integrabili in tutto l'intervallo  $(0, 1)$ . L'insieme  $E$  esiste in virtù di quanto è stato provato dal CESARI nel n.º 4 del suo lavoro citato in (3).

Indichiamo poi con  $e_y$  l'insieme dei punti  $\bar{y}$  di  $(0, 1)$  per i quali la sezione di  $E$  con la retta  $y = \bar{y}$  non è di misura lineare nulla. Questo insieme  $e_y$  risulta di misura lineare nulla.

Diviso l'intervallo  $(0, 1)$  dell'asse della  $y$  in  $n$  parti uguali, che indicheremo con  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , avremo  $(V_x(y) \equiv V_x(1, y))$

$$(1) \quad \int_0^1 V_x(y) dy = \sum_1^n \int_{\delta_s} V_x(y) dy.$$

Fissiamo una legge in base alla quale ad ogni  $\delta_s$  corrisponda un suo punto interno  $y_s$ , non appartenente ad  $e_y$  e tale che sia

$$(2) \quad \delta_s V_x(y_s) \leq \int_{\delta_s} V_x(y) dy.$$

È evidente che, per ogni  $s$ , i punti  $y_s$  esistono sempre: infatti, in caso contrario, dall'uguaglianza

$$(3) \quad \int_{\delta_s} \left\{ \delta_s V_x(y) - \int_{\delta_s} V_x(y) dy \right\} dy = \delta_s \int_{\delta_s} V_x(y) dy - \delta_s \int_{\delta_s} V_x(y) dy = 0$$

seguirebbe, in quasi-tutto  $\delta_s$ ,

$$(4) \quad \delta_s V_x(y) = \int_{\delta_s} V_x(y) dy.$$

È pure evidente che si può fissare, in molti modi, una legge per la scelta di  $y_s$  (7).

Dalle (1) e (2) segue

$$(5) \quad \frac{1}{n} \sum_1^n V_x(y_s) \leq \int_0^1 V_x(y) dy.$$

I punti di  $E$  che si trovano sulle rette  $y = y_s, s = 1, 2, \dots, n$ , costituiscono  $n$  insiemi lineari di misura (lineare) nulla; e noi indicheremo con  $i_x$  l'insieme dei

(7) Una di queste leggi può essere fissata nel seguente modo. Poichè  $V_x(y)$  è funzione quasi-continua in  $(0, 1)$  e  $e_y$  è un insieme di misura nulla, esiste almeno una legge che fa corrispondere ad ogni intero positivo  $m$  un plurintervallo aperto  $\Delta_m$ , di  $(0, 1)$  e di lunghezza  $< 1:m$ , contenente tutti i punti di  $e_y$  e tale che, a prescindere da esso, la  $V_x(y)$  risulti continua. Fissata una di tali leggi, per  $m$  abbastanza grande esistono in  $\delta_s$  dei punti  $y_s$  esterni a  $\Delta_m$ : ed infatti, in caso contrario, in quasi-tutto  $\delta_s$  dovrebbe essere

$$\delta_s V_x(y) > \int_{\delta_s} V_x(y) dy,$$

mentre dalla (3) seguirebbe ancora la (4) in quasi-tutto  $\delta_s$ . Sia  $m_n$  il più piccolo valore di  $m$  per cui in ogni  $\delta_s, s = 1, 2, \dots, n$ , esistono punti  $y_s$  esterni a  $\Delta_{m_n}$ . Per un dato  $s$  i punti  $y_s$  esterni a  $\Delta_{m_n}$  costituiscono un insieme chiuso e noi sceglieremo quello fra essi più prossimo al punto medio di  $\delta_s$ , intendendo, qualora di tali punti più prossimi ve ne fossero due, di prendere quello precedente il punto medio indicato.

punti dell'asse delle  $x$  su cui si proiettano ortogonalmente i punti di questi  $n$  insiemi. Anche  $i_x$  risulta di misura lineare nulla.

Dividiamo ora l'intervallo  $(0, 1)$  dell'asse delle  $x$  in  $m$  parti uguali, che indicheremo con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ; e fissiamo una legge in base alla quale ad ogni  $\lambda_r$  corrisponda un suo punto *interno*  $x_r$ , non appartenente a  $i_x$  e tale che sia

$$\lambda_r V_y(x_r) \leq \int_{\lambda_r} V_y(x) dx.$$

Avremo così

$$(6) \quad \frac{1}{m} \sum_1^m V_y(x_r) \leq \int_0^1 V_y(x) dx.$$

Per i punti  $y_s$  dell'asse delle  $y$  conduciamo le parallele all'asse delle  $x$  e per quelli  $x_r$  dell'asse delle  $x$  conduciamo le parallele all'asse delle  $y$ . Veniamo così ad ottenere  $nm$  rettangoli

$$R_{r,s} \equiv [x_r \leq x \leq x_{r+1}, y_s \leq y \leq y_{s+1}], \quad r=1, 2, \dots, m-1, \quad s=1, 2, \dots, n-1,$$

che, insieme, costituiscono un rettangolo  $R^{(n,m)}$ , contenuto nel quadrato  $Q$ , e che, al tendere di  $n$  e  $m$  all'infinito, tende a  $Q$ .

In corrispondenza di ciascun  $R_{r,s}$ , consideriamo i due triangoli, inscritti nella superficie  $z=f(x, y)$ , che si proiettano ortogonalmente, sul piano  $(x, y)$ , nei triangoli aventi per vertici, il primo,  $(x_r, y_s), (x_{r+1}, y_s), (x_{r+1}, y_{s+1})$ , e il secondo,  $(x_r, y_s), (x_r, y_{s+1}), (x_{r+1}, y_{s+1})$ . Questi  $2nm$  triangoli costituiscono una superficie poliedrica, a facce triangolari, inscritta nella superficie  $z=f(x, y)$ , che indicheremo con  $S^{(n,m)}$  e di cui scriveremo l'equazione nella forma  $z = \Sigma^{(n,m)}(x, y)$ .

b). Dimostriamo che l'area  $\sigma^{(n,m)}$  della superficie  $S^{(n,m)}$  resta inferiore ad un numero fisso, indipendente da  $n$  e  $m$ .

Indichiamo con  $V_x^{(n,m)}(y)$  la variazione totale nell'intervallo  $(x_1, x_m)$  della  $\Sigma^{(n,m)}(x, y)$ , considerata come funzione della sola  $x$ . Per ogni  $y$  dell'intervallo  $(y_s, y_{s+1})$ , è

$$V_x^{(n,m)}(y) \leq V_x^{(n,m)}(y_s) + V_x^{(n,m)}(y_{s+1});$$

e poichè la poligonale sezione di  $S^{(n,m)}$  col piano  $y=y_s$  è inscritta nella sezione corrispondente della superficie  $z=f(x, y)$ , si ha

$$V_x^{(n,m)}(y_s) \leq V_x(y_s)$$

e perciò

$$\int_{y_1}^{y_n} V_x^{(n,m)}(y) dy \leq \sum_1^{n-1} (y_{s+1} - y_s) \{V_x(y_s) + V_x(y_{s+1})\},$$

onde, per essere  $y_{s+1} - y_s \leq 2/n$ , e tenendo conto della (5),

$$\int_{y_1}^{y_n} V_x^{(n,m)}(y) dy \leq \frac{4}{n} \sum_1^n V_x(y_s) \leq 4 \int_0^1 V_x(y) dy.$$

Analogamente si ha

$$\int_{x_1}^{x_n} V_y^{(n,m)}(x) dx \leq 4 \int_0^1 V_y(x) dx;$$

e poichè è

$$\sigma^{(n,m)} \leq 1 + \int_{y_1}^{y_n} \{1 + V_x^{(n,m)}(y)\} dy + \int_{x_1}^{x_n} \{1 + V_y^{(n,m)}(x)\} dx,$$

ne viene

$$(7) \quad \sigma^{(n,m)} \leq 3 + 4 \left\{ \int_0^1 V_x(y) dy + \int_0^1 V_y(x) dx \right\}.$$

e). Proviamo ora che, preso ad arbitrio un numero intero positivo  $\nu$ , si possono determinare  $n$  e  $m$  in modo che risultino ambedue maggiori di  $\nu$  e che la disuguaglianza

$$(8) \quad |f(x, y) - \Sigma^{(n,m)}(x, y)| < 1 : 2^{\nu+1}$$

valga in tutto  $Q$  ad esclusione al più dei punti di un insieme  $I_\nu$  di misura superficiale  $< 1 : 2^{\nu+1}$ .

Poniamo

$$\varepsilon_\nu = 1 : (12 \cdot 2^{\nu+1}), \quad \psi(y) = \int_0^1 V_y(x, y) dx.$$

La funzione  $\psi(y)$  è, in tutto l'intervallo  $(0, 1)$ , non negativa e non decrescente; e perciò, per  $n$  sufficientemente grande, la somma degli intervalli  $\delta_s$  in cui la  $\psi(y)$  ha un'oscillazione  $\geq \varepsilon_\nu^2$  risulta  $< \varepsilon_\nu$ . Sia  $n_\nu$  il più piccolo degli  $n$  che rendono verificato questo fatto ed anche la disuguaglianza  $\delta_s = 1 : n < \varepsilon_\nu$ ; e fissiamo per  $n$  il valore  $n_\nu$ .

Separiamo gli intervalli  $(y_s, y_{s+1})$  ( $s=1, 2, \dots, n_\nu-1$ ) in due categorie, ponendo nella prima quelli per i quali  $\delta_s$  e  $\delta_{s+1}$  sono ambedue intervalli in cui la  $\psi(y)$  compie un'oscillazione  $< \varepsilon_\nu^2$ , e nella seconda tutti gli altri. La somma degli intervalli della seconda categoria risulta  $< 3\varepsilon_\nu$ . In ogni intervallo della prima categoria la  $\psi(y)$  ha un'oscillazione  $< 2\varepsilon_\nu^2$ ; e per ciascuno di questi intervalli, il gruppo  $g_x$  dei punti  $\bar{x}$  dell'asse delle  $x$  per i quali la  $V_y(\bar{x}, y)$  compie, come funzione della  $y$  nell'intervallo considerato, un'oscillazione  $\geq \varepsilon_\nu$  è di misura (lineare)  $< 2\varepsilon_\nu$  (perchè l'oscillazione della  $\psi(y)$  in  $(y_s, y_{s+1})$  è l'integrale fatto rispetto ad  $x$  dell'oscillazione di  $V_y(x, y)$  come funzione di  $y$  in  $(y_s, y_{s+1})$ ).

Per ciascuno degli  $s=1, 2, \dots, n_\nu$ , la  $f(x, y_s)$  è funzione della  $x$  a variazione limitata, quando non si considerino i valori da essa assunti nei punti di  $E$ ; perciò, per  $m$  sufficientemente grande, la somma degli intervalli  $\lambda_r$  in cui una almeno delle  $f(x, y_s)$ ,  $s=1, 2, \dots, n_\nu$ , ha — quando non si considerino i suoi valori nei punti di  $E$  — o un'oscillazione  $\geq \varepsilon_\nu$ , oppure dei punti di oscilla-

zione  $\geq \varepsilon_v$ , risulta  $< \varepsilon_v$ . Sia  $m_v$  il più piccolo degli  $m$  che rendono verificato questo fatto ed anche la disuguaglianza  $\lambda_{r=1} = m < \varepsilon_v$ ; e fissiamo per  $m$  il valore  $m_v$ .

Separiamo gli intervalli  $(x_r, x_{r+1})$  ( $r=1, 2, \dots, m_v$ ) in due categorie, ponendo nella prima quelli per i quali  $\lambda_r$  e  $\lambda_{r+1}$  non entrano nella somma poco sopra considerata, e nella seconda tutti gli altri. Questi ultimi hanno una somma  $< 3\varepsilon_v$ ; e in ciascuno degli intervalli della prima categoria le funzioni  $f(x, y_s)$  compiono tutte un'oscillazione  $< 3\varepsilon_v$ , quando non si considerino i loro valori nei punti di  $E$ .

Riuniamo in un solo insieme, che chiameremo  $I_v$ , tutti i punti di  $E$  e tutti quelli di  $Q$  che non sono interni al rettangolo  $R^{(n_v, m_v)}$ , oppure che hanno l'ordinata  $y$  appartenente ad un intervallo  $(y_s, y_{s+1})$  della seconda categoria, oppure che hanno l'ordinata  $y$  appartenente ad un intervallo  $(y_s, y_{s+1})$  della prima categoria e l'ascissa  $x$  appartenente al corrispondente gruppo  $g_x$  o ad  $i_x$ , oppure, infine, che hanno l'ascissa  $x$  appartenente ad un intervallo  $(x_r, x_{r+1})$  della seconda categoria. La misura superficiale di  $I_v$  risulta minore di

$$0 + 4\varepsilon_v + 3\varepsilon_v + 2\varepsilon_v + 3\varepsilon_v = 12\varepsilon_v = 1 : 2^{v+1}.$$

Sia ora  $(x, y)$  un punto di  $Q$  non appartenente a  $I_v$ . Esso apparterrà ad un  $R_{r,s}$ , con  $(x_r, x_{r+1})$  e  $(y_s, y_{s+1})$  ambedue di prima categoria, e la  $x$  non farà parte nè di  $i_x$  nè del gruppo  $g_x$  relativo a  $(y_s, y_{s+1})$ . Sarà perciò

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y_s)| &\leq |V_y(x, y) - V_y(x, y_s)| < \varepsilon_v, \\ |f(x, y_s) - f(x_r, y_s)| &< 3\varepsilon_v, \end{aligned}$$

onde

$$|f(x, y) - f(x_r, y_s)| < 4\varepsilon_v;$$

ed ugualmente la  $f(x, y)$  differirà da  $f(x_r, y_{s+1})$ ,  $f(x_{r+1}, y_s)$  e  $f(x_{r+1}, y_{s+1})$  per meno di  $4\varepsilon_v$ . E siccome la  $\Sigma^{(n_v, m_v)}(x, y)$  coincide con la  $f(x, y)$  nei vertici di  $R_{r,s}$ , ed ha i suoi massimi e minimi relativi a  $R_{r,s}$  in tali vertici, risulterà, nel punto  $(x, y)$  considerato,

$$(9) \quad |f(x, y) - \Sigma^{(n_v, m_v)}(x, y)| < 4\varepsilon_v < 1 : 2^{v+1},$$

e la (8) è provata.

*d*). Indichiamo, infine, con  $E_v$  l'insieme somma di  $I_v, I_{v+1}, I_{v+2}, \dots$ . L'insieme  $E_v$  contiene  $E_{v+1}$  e la sua misura, risultando  $< 1 : 2^v$ , tende a zero per  $v \rightarrow \infty$ ; inoltre, dalla (9), che vale in ogni punto di  $Q$  non appartenente a  $I_v$ , segue che in ogni punto  $(x, y)$  di  $Q$  non appartenente a  $E_v$ , è

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Sigma^{(n_v, m_v)}(x, y) = f(x, y).$$

Questa uguaglianza vale perciò in quasi-tutto  $Q$ ; e poichè dalla (7) segue che il minimo limite, per  $v \rightarrow \infty$ , di  $\sigma^{(n_v, m_v)}$  è finito, il teorema enunciato risulta dimostrato.