

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ARNOLD WALFISZ

Teilerprobleme (Vierte Abhandlung)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 5,
n° 3-4 (1936), p. 289-298

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_289_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEILERPROBLEME

(VIERTE ABHANDLUNG)

von ARNOLD WALFISZ (Radość).

Es bezeichne im folgenden: $\sigma(n)$ die Summe der reziproken Teiler einer natürlichen Zahl n ; γ die Eulersche Konstante; $F(x)$ die Restfunktion

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} (x-n)\sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \frac{1}{2} (\gamma - 1 + \log 2\pi)x + F(x)$$

(falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins); $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ die beiden ersten Bernoullischen Polynome

$$\psi_1(u) = (u - [u]) - \frac{1}{2}, \quad \psi_2(u) = (u - [u])^2 - (u - [u]) + \frac{1}{6};$$

B unterschiedslos reelle Zahlen, die von allem Möglichen abhängen dürfen, absolut genommen jedoch unterhalb numerischer Konstanten liegen.

Die Restfunktion $F(x)$ ist von WIGERT ⁽¹⁾, LANDAU ⁽²⁾, RAMANUJAN ⁽³⁾, LANDAU ⁽⁴⁾ nach oben abgeschätzt worden. Die besten Ergebnisse, nämlich

$$(2) \quad F(x) = O(x^{\frac{1}{3}}),$$

$$(3) \quad F(x) = O(x^{\frac{7}{23}} \log^{\frac{12}{23}} x),$$

erzielte LANDAU (l. c. ⁽⁴⁾), indem er von der Wigertschen Reihenentwicklung

$$F(x) = -\frac{1}{24} + \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{\sqrt{n}} J_1(4\pi\sqrt{nx})$$

⁽¹⁾ S. WIGERT: *Sur quelques fonctions arithmétiques* [Acta Mathematica, **37** (1914), S. 113-140].

⁽²⁾ E. LANDAU: *Besprechung von S. Wigert: Sur quelques fonctions arithmétiques* [Göttingische gelehrte Anzeigen, **177** (1915), S. 377-414].

⁽³⁾ S. RAMANUJAN: *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers* [Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **22** (1918), S. 259-276 oder Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Cambridge, 1927), S. 179-199].

⁽⁴⁾ E. LANDAU: *Über einige zahlentheoretische Funktionen* [Göttinger Nachrichten (1924), S. 116-134].

ausgang, wo J_1 die Besselsche Funktion erster Art bezeichnet. (3) ist natürlich besser als (2); der Fortschritt wird durch Anwendung des bekannten Weylschen Satzes aus der Lehre von den Diophantischen Näherungen ermöglicht.

Bei Untersuchung des der summatorischen Funktion $\sum_{n \leq x} \sigma(n)$ entsprechenden Fehlerquadratintegrals bin ich auf die folgende Darstellung dieser Funktion gestossen:

$$(4) \quad \sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} (\gamma + \log 2\pi) - \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \psi_1\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{x} \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \psi_1\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2x^2} \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^2 \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{2}{\sqrt{x}} \psi_2(\sqrt{x}) - \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (x \geq 1) \quad (5).$$

Diese Formel bietet, wie der folgende Hilfssatz 2 zeigt, einen bequemen Zugang zur Abschätzung von $F(x)$. Ich gebe einen neuen Beweis für (2) und verschärfe (3) zu

$$(5) \quad F(x) = O(x^{\frac{3}{10}}).$$

Hilfssatz 1. - *Es gilt (4).*

Beweis: Ich nehme von vornherein $x \geq 3$ an, da die Behauptung für $1 \leq x < 3$ klar ist. Zur Abkürzung sei

$$(6) \quad R(u) = u - [u],$$

so dass also

$$(7) \quad \psi_1(u) = R(u) - \frac{1}{2}, \quad \psi_2(u) = R^2(u) - R(u) + \frac{1}{6}$$

ist.

Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sigma(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{a/n} \frac{1}{a} = \sum_{ab \leq x} \frac{1}{a} \\ &= \sum_{\substack{a \leq b \leq x \\ ab \leq x}} \frac{1}{a} + \sum_{\substack{b \leq a \leq x \\ ab \leq x}} \frac{1}{a} - \sum_{\substack{a=b \leq x \\ ab \leq x}} \frac{1}{a} = S_1 + S_2 - S_3. \end{aligned}$$

(5) Die etwas schwächere Abschätzung

$$(4') \quad \begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sigma(n) &= \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} (\gamma + \log 2\pi) - \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \psi_1\left(\frac{x}{n}\right) \\ &\quad - \frac{1}{x} \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \psi_1\left(\frac{x}{n}\right) + Bx^{-\frac{1}{2}} \quad (x \geq 1) \end{aligned}$$

befindet sich in der zweiten gleichnamigen Abhandlung [Mathematische Zeitschrift, **34** (1931), S. 448-472; Hilfssatz 1]. Das beim Beweise von (4') benutzte Verfahren liefert auch (4).

$$S_1 = \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \sum_{a \leq b \leq \frac{x}{a}} 1 = \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \left(\left[\frac{x}{a} \right] + 1 - a \right) \quad (8)$$

$$(9) \quad = - \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \psi_1 \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{1}{2} \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} + x \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a^2} - [\sqrt{x}] \quad (6, 7).$$

$$\log [\sqrt{x}] = \log (\sqrt{x} - R(\sqrt{x})) = \log \sqrt{x} + \log \left(1 - \frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) \quad (6)$$

$$(10) \quad = \frac{1}{2} \log x - \frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{R^2(\sqrt{x})}{2x} + Bx^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(11) \quad \frac{1}{[\sqrt{x}]} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{B}{x}.$$

$$\sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} = \log [\sqrt{x}] + \gamma + \frac{1}{2[\sqrt{x}]} + Bx^{-1} \quad (6)$$

$$(12) \quad = \frac{1}{2} \log x + \gamma - \frac{\psi_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (10, 11, 7).$$

$$(13) \quad q = [\sqrt{x}] + 1 \quad (\text{Definition von } q).$$

$$(14) \quad \frac{1}{2a^2(a+1)^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+1)^3} \right) - \frac{1}{6a^3(a+1)^3}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{a=q}^{\infty} \frac{1}{a^2} &= \sum_{a=q}^{\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{a=q}^{\infty} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{a=q}^{\infty} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+1)^3} \right) - \frac{1}{6} \sum_{a=q}^{\infty} \frac{1}{a^3(a+1)^3} \quad (14) \end{aligned}$$

$$(15) \quad = \frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{6q^3} + Bq^{-5}.$$

(⁶) Die hierfür und die Formeln (23), (32) w. u. benutzte wohlbekannte Abschätzung

$$\sum_{a=1}^n \frac{1}{a} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + Bn^{-3}$$

ergibt sich mittels der Eulerschen Summenformel. Man kann sie aber auch unmittelbar wie folgt bestätigen:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \frac{1}{a} &= \int_1^n \frac{[u]}{u^2} du + 1 = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\psi_1(u)}{u^2} du = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + \int_n^{\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^2} du, \\ \int_n^{\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^2} du &= 2 \int_n^{\infty} \frac{dv}{v^3} \int_0^{R(v)} \left(u - \frac{1}{2} \right) du = \int_n^{\infty} \left(-\frac{1}{6} + \psi_2(v) \right) \frac{dv}{v^3} = -\frac{1}{12n^2} + Bn^{-3}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{x} - (R(\sqrt{x}) - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{R(\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{x}} \right)^{-1} \quad (13, 6)$$

$$(16) \quad = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{R(\sqrt{x}) - 1}{x} + \frac{(R(\sqrt{x}) - 1)^2}{x^2} + Bx^{-2},$$

$$(17) \quad \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2x} + \frac{R(\sqrt{x}) - 1}{x^2} + Bx^{-2} \quad (16),$$

$$(18) \quad \frac{1}{6q^3} = \frac{1}{6x^2} + Bx^{-2} \quad (16).$$

$$x \sum_{\alpha > \sqrt{x}} \frac{1}{\alpha^2} = x \sum_{\alpha=q}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} = \sqrt{x} + R(\sqrt{x}) - 1 + \frac{(R(\sqrt{x}) - 1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \frac{R(\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{x}}$$

$$+ \frac{1}{6\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (13, 15-18)$$

$$= 2\sqrt{x} - [\sqrt{x}] - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ (R(\sqrt{x}) - 1)^2 + R(\sqrt{x}) - 1 + \frac{1}{6} \right\} + Bx^{-1} \quad (6)$$

$$(19) \quad = 2\sqrt{x} - [\sqrt{x}] - \frac{1}{2} + \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (7).$$

$$x \sum_{\alpha \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{6} x - x \sum_{\alpha > \sqrt{x}} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$(20) \quad = \frac{\pi^2}{6} x - 2\sqrt{x} + [\sqrt{x}] + \frac{1}{2} - \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (19).$$

$$S_1 = - \sum_{\alpha \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\alpha} \psi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{1}{4} \log x + \frac{1}{2} \gamma - \frac{\psi_1(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{\pi^2}{6} x - 2\sqrt{x} + [\sqrt{x}]$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - [\sqrt{x}] + Bx^{-1} \quad (9, 12, 20)$$

$$(21) \quad = \frac{\pi^2}{6} x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \log x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma - \sum_{\alpha \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} (\psi_1(\sqrt{x}) + 2\psi_2(\sqrt{x})) + Bx^{-1}.$$

$$S_2 = \sum_{\substack{b \leq a \leq x \\ \alpha b \leq x}} \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha} = \sum_{b \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{b \leq a \leq x \\ b \leq a \leq \frac{x}{b}}} 1 = \sum_{b \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{a \leq \frac{x}{b} \\ a \leq \frac{x}{b}}} \frac{1}{a} - \sum_{b \leq \sqrt{x}} \sum_{a < b} \frac{1}{a} \quad (8)$$

$$(22) \quad = S_{21} - S_{22}.$$

$$(23) \quad \sum_{\alpha \leq \frac{x}{b}} \frac{1}{\alpha} = \log \left[\frac{x}{b} \right] + \gamma + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{b} \right]^{-1} - \frac{1}{12} \left[\frac{x}{b} \right]^{-2} + Bb^3 x^{-3} \quad (6).$$

$$\log \left[\frac{x}{b} \right] = \log \left(\frac{x}{b} - R\left(\frac{x}{b}\right) \right) = \log \frac{x}{b} + \log \left(1 - \frac{b}{x} R\left(\frac{x}{b}\right) \right) \quad (6)$$

$$(24) \quad = \log x - \log b - \frac{b}{x} R\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{b^2}{2x^2} R^2\left(\frac{x}{b}\right) + Bb^3 x^{-3},$$

$$(25) \quad \left[\frac{x}{b}\right]^{-1} = \left(\frac{x}{b} - R\left(\frac{x}{b}\right)\right)^{-1} = \frac{b}{x} \left(1 - \frac{b}{x} R\left(\frac{x}{b}\right)\right)^{-1} = \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} R\left(\frac{x}{b}\right) + Bb^3x^{-3} \quad (6),$$

$$(26) \quad \left[\frac{x}{b}\right]^{-2} = \frac{b^2}{x^2} + Bb^3x^{-3} \quad (25).$$

$$\sum_{a \leq \frac{x}{b}} \frac{1}{a} = \log x - \log b - \frac{b}{x} R\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{b^2}{2x^2} R^2\left(\frac{x}{b}\right) + \gamma + \frac{b}{2x} + \frac{b^2}{2x^2} R\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{b^2}{12x^2} + Bb^3x^{-3} \quad (23-26)$$

$$(27) \quad = \log x + \gamma - \log b - \frac{b}{x} \psi_1\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{b^2}{2x^2} \psi_2\left(\frac{x}{b}\right) + Bb^3x^{-3} \quad (7).$$

$$\sum_{b \leq \sqrt{x}} \log b = \left([\sqrt{x}] + \frac{1}{2}\right) \log [\sqrt{x}] - [\sqrt{x}] + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{12[\sqrt{x}]} + Bx^{-1}$$

(Stirlingsche Formel)

$$= \left([\sqrt{x}] + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \log x - \frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{R^2(\sqrt{x})}{2x} + Bx^{-\frac{3}{2}}\right) - \sqrt{x} + R(\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (10, 6, 11)$$

$$(28) \quad = \frac{1}{2} \left([\sqrt{x}] + \frac{1}{2}\right) \log x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \log 2\pi + S_{211}, \quad \text{wo}$$

$$S_{211} = -\left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{R^2(\sqrt{x})}{2x}\right) + R(\sqrt{x}) + \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (6)$$

$$= -R(\sqrt{x}) + \frac{R^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{R(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{R^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + R(\sqrt{x}) + \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1}$$

$$(29) \quad = \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (7).$$

$$(30) \quad \sum_{b \leq \sqrt{x}} \log b = \frac{1}{2} \left([\sqrt{x}] + \frac{1}{2}\right) \log x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (28, 29).$$

$$S_{21} = \sum_{b \leq \sqrt{x}} \sum_{a \leq \frac{x}{b}} \frac{1}{a} = [\sqrt{x}] (\log x + \gamma) - \frac{1}{2} \left([\sqrt{x}] + \frac{1}{2}\right) \log x + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b \psi_1\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2x^2} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b^2 \psi_2\left(\frac{x}{b}\right) + Bx^{-1} \quad (22, 27, 30)$$

$$(31) \quad = \frac{1}{2} [\sqrt{x}] \log x + \gamma [\sqrt{x}] + \sqrt{x} - \frac{1}{4} \log x - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b \psi_1\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2x^2} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b^2 \psi_2\left(\frac{x}{b}\right) + Bx^{-1}.$$

$$S_{22} = \sum_{b \leq \sqrt{x}} \sum_{a < b} \frac{1}{a} = \sum_{a < \sqrt{x}} \frac{1}{a} \sum_{a < b \leq \sqrt{x}} 1 = \sum_{a < \sqrt{x}} \frac{1}{a} ([\sqrt{x}] - a) \quad (22)$$

$$= \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} ([\sqrt{x}] - a) = [\sqrt{x}] \left(\sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} - 1 \right)$$

$$(32) \quad = [\sqrt{x}] \left(\log [\sqrt{x}] + \gamma - 1 + \frac{1}{2[\sqrt{x}]} - \frac{1}{12[\sqrt{x}]^2} + Bx^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (6)$$

$$= [\sqrt{x}] \log [\sqrt{x}] + \gamma [\sqrt{x}] - [\sqrt{x}] + \frac{1}{2} - \frac{1}{12[\sqrt{x}]} + Bx^{-1}$$

$$= [\sqrt{x}] \left(\frac{1}{2} \log x - \frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{R^2(\sqrt{x})}{2x} \right) + \gamma [\sqrt{x}] - \sqrt{x} + R(\sqrt{x}) \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (10, 6, 11)$$

$$= \frac{1}{2} [\sqrt{x}] \log x - (\sqrt{x} - R(\sqrt{x})) \left(\frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{R^2(\sqrt{x})}{2x} \right) + \gamma [\sqrt{x}] - \sqrt{x} \\ + R(\sqrt{x}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} [\sqrt{x}] \log x - R(\sqrt{x}) + \frac{R^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{R^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \gamma [\sqrt{x}] - \sqrt{x} + R(\sqrt{x}) \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1}$$

$$(33) \quad = \frac{1}{2} [\sqrt{x}] \log x + \gamma [\sqrt{x}] - \sqrt{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(R^2(\sqrt{x}) - \frac{1}{6} \right) + Bx^{-1}.$$

$$(34) \quad S_2 = 2\sqrt{x} - \frac{1}{4} \log x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(2\psi_2(\sqrt{x}) + \psi_1(\sqrt{x}) + \frac{1}{6} \right) \\ - \frac{1}{x} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b \psi_1 \left(\frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2x^2} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b^2 \psi_2 \left(\frac{x}{b} \right) + Bx^{-1} \quad (22, 31, 33, 6, 7).$$

$$(35) \quad S_3 = \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \log x + \gamma - \frac{\psi_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (8, 12).$$

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6} x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \log x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma - \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \psi_1 \left(\frac{x}{a} \right) \\ - \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\psi_1(\sqrt{x}) + 2\psi_2(\sqrt{x}) \right) + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4} \log x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\pi \\ - \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(2\psi_2(\sqrt{x}) + \psi_1(\sqrt{x}) + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{x} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b \psi_1 \left(\frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2x^2} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b^2 \psi_2 \left(\frac{x}{b} \right) \\ - \frac{1}{2} \log x - \gamma + \frac{\psi_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (8, 21, 34, 35)$$

$$(4) \quad = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} (\gamma + \log 2\pi) - \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \psi_1 \left(\frac{x}{a} \right) \\ - \frac{1}{x} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b \psi_1 \left(\frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2x^2} \sum_{b \leq \sqrt{x}} b^2 \psi_2 \left(\frac{x}{b} \right) - \frac{2\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{1}{12\sqrt{x}} + Bx^{-1}.$$

Hilfssatz 2. - Für $x \geq 3$ ist

$$(36) \quad F(x) = - \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2x} \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) du + B \log x.$$

Beweis: In

$$\sum_{n \leq x} (x-n)\sigma(n) = \int_1^x \sum_{n \leq u} \sigma(n) du$$

setze ich (4) mit u statt x ein und erhalte

$$(37) \quad \sum_{n \leq x} (x-n)\sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \frac{1}{2} (\gamma - 1 + \log 2\pi)x \\ - \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} \frac{1}{n} \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) du - \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} n \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} n^2 \psi_2\left(\frac{u}{n}\right) \frac{du}{u^2} \\ - 2 \int_1^x \frac{\psi_2(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{6} \sqrt{x} + B \log x.$$

Wegen

$$g(v) = \int_0^v \psi_1(u) du = \frac{1}{2} \psi_2(v) - \frac{1}{12} \quad (v > 0)$$

ist

$$(38) \quad \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} \frac{1}{n} \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) du = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \int_n^x \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) du = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \int_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \psi_1(u) du \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2(n) \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{12} \sqrt{x} + B;$$

$$\int_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \psi_1(u) \frac{du}{u} = \frac{g(u)}{u} \Big|_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} + \int_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \frac{g(u)}{u^2} du = \frac{\psi_2(u)}{2u} \Big|_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \frac{\psi_2(u)}{u^2} du \\ = \frac{n}{2x} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{12n} + Bn^{-2},$$

$$(39) \quad \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} n \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) \frac{du}{u} = \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \int_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) \frac{du}{u} = \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \int_{\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \psi_1(u) \frac{du}{u} \\ = \frac{1}{2x} \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^2 \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{12} \sqrt{x} + B \log x.$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned}
 \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} n^2 \psi_2 \left(\frac{u}{n} \right) \frac{du}{u^2} &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^2 \int_{\frac{x}{n^2}}^{\frac{x}{n}} \psi_2 \left(\frac{u}{n} \right) \frac{du}{u^2} \\
 &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \int_n^{\frac{x}{n}} \frac{\psi_2(u)}{u^2} du = B \sum_{n \leq \sqrt{x}} n \cdot \frac{1}{n^2} \\
 (40) \qquad \qquad \qquad &= B \log x,
 \end{aligned}$$

$$(41) \qquad \int_1^x \frac{\psi_2(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \psi_2(v) dv = B.$$

Aus (1) und (37) bis (41) folgt

$$\begin{aligned}
 F(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) - \frac{1}{2x} \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^2 \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) + B \log x \\
 &= -\sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) + \frac{1}{2x} \sum_{n \leq \sqrt{x}} (x - n^2) \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) + B \log x \\
 (36) \qquad \qquad \qquad &= -\sum_{n \leq \sqrt{x}} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) + \frac{1}{2x} \int_1^x \sum_{n \leq \sqrt{u}} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) du + B \log x.
 \end{aligned}$$

Hilfssatz 3 (J. G. VAN DER CORPUT⁽⁷⁾). - Es sei $a \leq b - 1$, $f(u)$ im Intervall $a \leq u \leq b$ mitsamt den beiden ersten Ableitungen stetig; $f''(u)$ daselbst $\geq r$ oder $\leq -r$, wo $r > 0$ von u unabhängig ist; $|f'(b) - f'(a)| = (b - a)R$. Dann ist

$$(37) \qquad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| = B(b - a)Rr^{-\frac{1}{2}} + Br^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis von (2): Es sei a, b ein Zahlenpaar mit $0 < a \leq b - 1$, $b \leq 2a$; k eine natürliche Zahl; $f(u) = \frac{kx}{u}$ für $a \leq u \leq b$. In den Bezeichnungen von Hilfssatz 3 ist dann

$$b - a = Ba, \qquad R = Bkx a^{-3}, \qquad \frac{1}{r} = Bk^{-1} x^{-1} a^3,$$

⁽⁷⁾ *Zahlentheoretische Abschätzungen* [Mathematische Annalen, **84** (1921), S. 53-79], Satz 2. Einen überaus einfachen Beweis von (37) gab E. C. TITCHMARSH: *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann* [The Quarterly Journal of Mathematics, **2** (1931), S. 161-173], Theorem 1.

und (37) liefert

$$\sum_{a \leq n \leq b} \cos \frac{2\pi kx}{n} = Bk^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} + Bk^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}},$$

$$(38) \quad \sum_{a \leq n \leq b} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{a \leq n \leq b} \cos \frac{2\pi kx}{n} = Bx^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} + Bx^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}.$$

Durch einen bekannten Kunstgriff folgt hieraus für $1 \leq u \leq \sqrt{x}$

$$\sum_{\frac{x}{\sqrt{x}} \leq n \leq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = Bx^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} + Bx^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = Bx^{\frac{1}{3}},$$

also

$$\sum_{n \leq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = Bx^{\frac{1}{3}},$$

und (36) ergibt die Behauptung (2).

Hilfssatz 4 (E. C. TITCHMARSH ⁽⁸⁾). - Es sei $a \leq b-1$, $f(u)$ im Intervall $a \leq u \leq b$ mitsamt den drei ersten Ableitungen stetig; $f'''(u)$ daselbst $\geq \rho$ oder $\leq -\rho$, wo $\rho > 0$ von u unabhängig ist; $|f''(b) - f''(a)| = (b-a)P$. Dann ist

$$(39) \quad \left| \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} \right| = B(b-a)P^{\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{1}{6}} + B(b-a)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{6}} \rho^{-\frac{1}{3}}.$$

Beweis von (5): Ich beginne wie beim Beweise von (2) und habe nach (38) für $x^{\frac{2}{5}} \leq u \leq x^{\frac{1}{2}}$

$$(40) \quad \sum_{x^{\frac{2}{5}} \leq n \leq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = Bx^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{5} + Bx^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = Bx^{\frac{3}{10}}.$$

In den Bezeichnungen von Hilfssatz 4 ist jetzt

$$b-a = Ba, \quad P = Bkxa^{-4}, \quad \frac{1}{\rho} = Bk^{-1}x^{-1}a^4,$$

⁽⁸⁾ l. c. ⁽⁷⁾, Theorem 2. Diesen Satz wendet TITCHMARSH auf die Zetafunktion an und bekommt $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\frac{1}{6}} \log t)$, während Theorem 1 nur $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\frac{1}{4}})$ ergab.

In der ursprünglichen Fassung der vorliegenden Arbeit (vom September 1931) hatte ich nicht (5), sondern die etwas schwächere Abschätzung

$$F(x) = O(x^{\frac{3}{10}} \log x),$$

zu deren Beweis ich Hilfssatz 3 der ersten gleichnamigen Abhandlung [Mathematische Zeitschrift, 26 (1927), S. 66-88] heranzog. Ich verzichte auf die Darstellung dieses Zusammenhanges, weil mein Hilfssatz lange und umständliche Rechnungen erforderte, während der Beweis von (39) überraschend einfach ist.

und (39) ergibt

$$\sum_{a \leq n \leq b} \cos \frac{2\pi kx}{n} = Bk^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}} + Bk^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}} a^{\frac{7}{6}},$$

$$\sum_{a \leq n \leq b} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{a \leq n \leq b} \cos \frac{2\pi kx}{n} = Bx^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}} + Bx^{-\frac{1}{6}} a^{\frac{7}{6}}.$$

Durch jenen Kunstgriff folgt nunmehr für $1 \leq u \leq x^{\frac{2}{5}}$

$$(41) \quad \sum_{n \leq u} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) = Bx^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} + Bx^{-\frac{1}{6} + \frac{7}{6} \cdot \frac{2}{5}} = Bx^{\frac{3}{10}}.$$

Nach (40) und (41) ist für $1 \leq u \leq \sqrt{x}$

$$\sum_{n \leq u} \psi_2 \left(\frac{x}{n} \right) = Bx^{\frac{3}{10}},$$

und (36) liefert die Behauptung (5).