

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

DÉMÈTRE POMPEIU

**Sur une propriété des fonctions holomorphes**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 2  
(1933), p. 227-230

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1933\\_2\\_2\\_2\\_227\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_227_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

par DÉMÈTRE POMPEIU (Bucarest).

1. - Dans les Comptes Rendus (t. 192, p. 794, séance du 30 mars 1931) j'ai résumé la démonstration d'un théorème dont l'emploi est très fréquent en théorie des fonctions.

Je me propose ici de reprendre cette démonstration et de la présenter avec tous les développements nécessaires.

Il s'agit de la proposition suivante: *Une fonction  $f(z)$ , holomorphe dans une région  $R$  et dont la dérivée  $f'(z)$  s'annule dans  $R$ , ne peut pas être uni-valente dans cette région.*

2. - Désignons par  $\zeta_0$  le point, intérieur à  $R$ , où la dérivée s'annule:

$$f'(\zeta_0) = 0.$$

La dérivée  $f'(z)$ , de la fonction  $f(z)$ , étant elle-même une fonction holomorphe dans  $R$ , on peut tracer autour de  $\zeta_0$  un cercle  $C$  tel que, dans  $C$  frontière comprise,  $f'(z)$  soit différente de zéro, sauf bien entendu au centre  $\zeta_0$ , où la dérivée s'annule, par hypothèse.

Cela établi, nous allons restreindre nos considérations aux seuls points de la région  $R$  qui sont contenus dans  $C$ .

3. - Introduisons la fonction de deux variables complexes indépendantes

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

avec la condition pour  $z$  et  $\zeta$  de rester dans le cercle  $C$ .

Cette fonction est *continue* lorsque  $z$  et  $\zeta$  prennent, chacun indépendamment de l'autre, toute position dans  $C$ .

Pour

$$\zeta = z = u$$

on a

$$\varphi(u, u) = f'(u).$$

La fonction  $\varphi$  est *holomorphe* par rapport à chacune des variables  $z$  et  $\zeta$ .

4. - Considerons maintenant la fonction

$$\varphi(z, \zeta_0) = \frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0}$$

où  $\zeta_0$  est le point qui donne à  $f'(z)$  la valeur zéro :

$$f'(\zeta_0) = 0;$$

$\varphi(z, \zeta_0)$  est donc une fonction holomorphe de la *seule variable*  $z$ .

Supposons que lorsque le point  $z$  parcourt la circonférence  $C$  le rapport

$$\frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0}$$

reste différent de zéro ; car si, pour un point  $z_0$ , de la circonférence  $C$ , on avait

$$f(z_0) = f(\zeta_0),$$

alors notre théorème serait démontré.

Ainsi  $\varphi(z, \zeta_0)$  étant supposé différent de zéro sur la circonférence  $C$ , désignons par  $\mu_0$  le *minimum* du module

$$|\varphi(z, \zeta_0)|$$

lorsque le point  $z$  décrit la circonférence  $C$ .

5. - Cela posé, revenons à la fonction *continue* de deux variables

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

qui est, par suite, *uniformément* continue et prenons dans le voisinage de  $\zeta_0$  un autre point  $\zeta_1$  assez rapproché de  $\zeta_0$  pour que l'on ait, *quel que soit*  $z$  dans  $C$ , circonférence comprise,

$$(1) \quad |\varphi(z, \zeta_1) - \varphi(z, \zeta_0)| \leq \frac{\mu_0}{3}.$$

Le point  $\zeta_1$  est pris, bien entendu, dans l'intérieur de  $C$ .

6. - Cela posé je vais évaluer le *minimum* de

$$|\varphi(z, \zeta_1)|$$

lorsque le point  $z$  décrit la circonférence  $C$ .

J'écris

$$\varphi(z, \zeta_1) \equiv \varphi(z, \zeta_1) - \varphi(z, \zeta_0) + \varphi(z, \zeta_0)$$

et j'ai alors, sur la circonférence  $C$ ,

$$|\varphi(z, \zeta_1)| \geq |\varphi(z, \zeta_0)| - |\varphi(z, \zeta_1) - \varphi(z, \zeta_0)|$$

ou

$$\begin{aligned} |\varphi(z, \zeta_1)| &\geq \mu_0 - \frac{\mu_0}{3} \\ &\geq \frac{2\mu_0}{3}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, le minimum  $\mu_1$  de  $|\varphi(z, \zeta_1)|$ , sur la circonférence  $C$ , est certainement supérieur ou, au plus, égal à  $2\frac{\mu_0}{3}$ :

$$\mu_1 \geq 2\frac{\mu_0}{3}.$$

Ainsi la fonction de  $z$ :

$$\varphi(z, \zeta_1)$$

a, sur la circonférence  $C$ , pour son module un minimum  $\mu_1$  supérieur ou égal à  $2\frac{\mu_0}{3}$ .

Mais, dans l'intérieur de  $C$ , la fonction holomorphe  $\varphi(z, \zeta_1)$  prend au point

$$z = \zeta_0$$

la valeur

$$\varphi(\zeta_0, \zeta_1)$$

que je me propose d'évaluer, en module.

D'après la condition (1) du n.º 5, j'écris

$$|\varphi(\zeta_0, \zeta_1) - \varphi(\zeta_0, \zeta_0)| \leq \frac{\mu_0}{3}$$

et puisque

$$\varphi(\zeta_0, \zeta_0) = f'(\zeta_0) = 0$$

il me reste:

$$|\varphi(\zeta_0, \zeta_1)| \leq \frac{\mu_0}{3}.$$

Ainsi la valeur de  $\varphi(z, \zeta_1)$ , en module, au point

$$z = \zeta_0$$

est inférieure au module minimum  $\mu_1$  de  $|\varphi(z, \zeta_1)|$  sur la circonférence  $C$ .

7. - Ici intervient un lemme, presque évident, relatif aux zéros d'une fonction holomorphe:

Si une fonction  $h(z)$  est holomorphe dans un domaine  $D$ , et différente de zéro sur la frontière: le *minimum* de  $|h(z)|$ , sur cette frontière, étant  $\mu$ ; et si dans l'intérieur de  $D$  on trouve un point  $z_0$  tel que

$$|h(z_0)| < \mu$$

alors on peut affirmer que  $h(z)$  s'annule certainement dans  $D$ .

8. - Nous sommes, au n.º 6, dans les conditions de ce lemme, avec la fonction holomorphe

$$\varphi(z, \zeta_1)$$

considérée dans le cercle  $C$ .

Nous sommes donc certains que  $\varphi(z, \zeta_1)$  s'annule dans  $C$ : en un point

$$z = \zeta_2$$

on doit avoir

$$\varphi(\zeta_2, \zeta_1) = 0$$

ce qui fait

$$\frac{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} = 0$$

c'est-à-dire

$$f(\zeta_2) = f(\zeta_1).$$

9. - Mais, pour la complète rigueur de la démonstration, il faut ajouter que le point (au moins *un*) où  $\varphi(z, \zeta_1)$  s'annule ne peut pas être  $z = \zeta_1$  (car alors le but du théorème: *non-univalence* de  $f(z)$ , dans  $C$ , ne serait pas atteint).

Effectivement le point  $\zeta_2$  ne peut pas coïncider avec  $\zeta_1$  car on aurait

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_1) = f'(\zeta_1) = 0$$

et, par hypothèse, dans  $C$  la dérivée  $f'(z)$  est différente de zéro, sauf bien entendu au point  $\zeta_0$  où

$$f'(\zeta_0) = 0.$$

Il est ainsi bien établi que  $\zeta_2$  est différent de  $\zeta_1$  et que l'on a

$$f(\zeta_2) = f(\zeta_1).$$

La fonction  $f(z)$  n'est donc *pas univalente* dans  $C$ , et donc, non plus dans  $R$ . Ce qu'on voulait établir.

10. - Le *lemme*, du n.º 7, presque évident, a été signalé par l'auteur et utilisé dès 1916, dans une note des Annales scientifiques de l'Université de Jassy (Tome X, pp. 1-4).

Il s'introduit, très simplement, dans la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

Il peut être utilisé, comme le montre la note présente, dans beaucoup de questions d'Analyse.

Je l'ai signalé, à nouveau, dans une note récente des Comptes Rendus (24 oct. 1932).