EDMUND LANDAU

Eine Frage über trigonometrische Polynome

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 2 (1933), p. 209-210

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_209_0>

EINE FRAGE ÜBER TRIGONOMETRISCHE POLYNOME

Von EDMUND LANDAU (Göttingen).

Vor langer Zeit (vergl. mein Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, S. 245-258 und S. 891-893, sowie zwei ältere dort zitierte Arbeiten von mir) interessierte mich (wegen einer zahlentheoretischen Anwendung) folgende Frage.

Es sei $n \geqq 2$ ganz. Welches ist die untere Grenze P_n von

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu}{a_1 - a_0}$$

für alle Funktionen

$$g(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\varphi$$

mit

$$0 < a_0 < a_1, \qquad a_\nu \geqq 0 \quad \text{für} \quad 2 \leqq \nu \leqq n,$$

die für alle reellen φ der Bedingung

$$g(\varphi) \geqq 0$$

genügen?

Offenbar ist

$$P_{n+1} \leqq P_n \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Ich zeigte damals

$$P_2 \leqq 7$$

durch das Beispiel

$$g(\varphi) = 17 + 24 \cos \varphi + 8 \cos 2\varphi = (3 + 4 \cos \varphi)^2$$

und

$$P_3 \leqq 6$$

durch das Beispiel

$$g(\varphi) = 5 + 8 \cos \varphi + 4 \cos 2\varphi + \cos 3\varphi = (1 + \cos \varphi)(1 + 2 \cos \varphi)^2.$$

Ich bewies ferner auf zwei Seiten

$$P_2 \geqq 7$$

(also $P_2=7$), erwähnte (S. 190 der auf S. 891 zitierten Arbeit 34) ohne Angabe des langwierigen Beweises, dass sich

$$P_3 \geqq 6$$

(also $P_3=6$) beweisen lässt, konnte aber P_n für kein $n>3$ bestimmen.

Heute werde ich auf einer Zeile

$$P_2 \geqq 7,$$

auf drei Zeilen

$$P_5 \geqq 6,$$

also

$$P_3=P_4=P_5=6$$

beweisen. Es ist erstaunlich, wie wenig von den Voraussetzungen zum Nachweis der Behauptungen gebraucht wird, die offenbar

$$8a_0-6a_1+a_2 \geqq 0 \quad \text{für} \quad n=2, \tag{1}$$

$$7a_0-5a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \geqq 0 \quad \text{für} \quad n=5 \tag{2}$$

lauten.

Beweis von (1):

$$8a_0-6a_1+a_2=8g\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) \geqq 0.$$

Beweis von (2):

$$\begin{aligned} &7a_0-5a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \\ \geqq\, &3(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5)+4\left(a_0-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2+a_3-\frac{1}{2}a_4-\frac{1}{2}a_5\right) \\ =\, &3g(\pi)+4g\left(\frac{2\pi}{3}\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

Die Schwierigkeit fängt also erst bei $n=6$ an. Herr SCHUR (Handbuch, S. 251-252) hatte

$$P_6 \leqq \frac{648}{109}\ (<6),$$

Herr TOEPLITZ (Handbuch, S. 891-893) hatte

$$P_6 > 5{,}49$$

bewiesen. Die Bestimmung von P_6 lässt sich in endlicher Zeit erzwingen. Vielleicht gelingt sie einem Leser auf wenigen Zeilen oder wenigen Seiten.