Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

Paul Montel

# Sur une formule de Darboux et les polynomes d'interpolation

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 1, nº 4 (1932), p. 371-384

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_4_371_0>

# SUR UNE FORMULE DE DARBOUX ET LES POLYNOMES D'INTERPOLATION

par PAUL MONTEL (Paris).

**1.** - On sait que la formule des accroissements finis n'est pas applicable aux fonctions de variable complexe. DARBOUX en a donné l'extension à ces fonctions au moyen d'une modification. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe de $z$, on a

$$f(z_2)-f(z_1)=\lambda(z_2-z_1)f'(a),$$

$a$ désignant l'affixe d'un point du segment rectiligne $z_1 z_2$ et $\lambda$, un nombre complexe dont le module ne dépasse pas l'unité.

Nous nous proposons d'étendre le résultat de DARBOUX à une expression plus générale formée avec les valeurs de la fonction en $n+1$ points $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$. Appelons *domaine de convexité* relatif à un ensemble de points, le domaine convexe formé par les points communs à tous les domaines limités par une courbe fermée convexe qui entoure tous les points de l'ensemble. Nous pourrons établir le théorème suivant:

*Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine de convexité des points $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ supposés distincts, on peut écrire:*

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} & f(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_{n+1} & z_{n+1}^2 & \ldots & z_{n+1}^{n-1} & f(z_{n+1}) \end{vmatrix} = \lambda \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_{n+1} & z_{n+1}^2 & \ldots & z_{n+1}^{n} \end{vmatrix},$$

*$a$ désignant l'affixe d'un point du domaine de convexité des points $z_1$, $z_2, \ldots, z_{n+1}$ et $\lambda$, un nombre complexe de module inférieur ou égal à l'unité.*

Nous désignerons par $D_{n+1}(f)$ le déterminant du premier membre et par $d_{n+1}=D_{n+1}(z^n)$, celui du second membre. Prenons d'abord $n=2$. Considérons l'intégrale

$$I=(z_3-z_2)\int_{z_1}^{z_2} d\xi \int_{\xi}^{\xi'} f''(\eta)\,d\eta$$

étendue au champ d'intégration suivant:

le point $\xi$ décrit le segment rectiligne $z_1z_2$; $\xi$ étant fixé, le point $\eta$ décrit le segment rectiligne $\xi\xi'$ parallèle au segment $z_1z_3$ et limité en $\xi'$ au segment $z_2z_3$. Lorsque $\xi$ varie, le point $\eta$ occupe les positions de tous les points du triangle $z_1z_2z_3$. En intégrant, il vient

$$I=(z_3-z_2)\int_{z_1}^{z_2}[f'(\xi')-f'(\xi)]d\xi=\int_{z_3}^{z_2}(z_3-z_2)\frac{d\xi}{d\xi'}f'(\xi')d\xi'-\int_{z_1}^{z_2}(z_3-z_2)f'(\xi)d\xi$$

et, comme

$$\frac{d\xi}{d\xi'}=\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3},$$

l'expression est égale à

$$-(z_2-z_1)\int_{z_3}^{z_2}f'(\xi')d\xi'-(z_3-z_2)\int_{z_1}^{z_2}f'(\xi)d\xi,$$

ou

$$\begin{aligned}-(z_2-z_1)[f(z_2)-f(z_3)]-(z_3-z_2)[f(z_2)-f(z_1)]=\\ =(z_3-z_2)f(z_1)+(z_1-z_3)f(z_2)+(z_2-z_1)f(z_3)=D_3(f).\end{aligned}$$

D'autre part, au moyen du changement de variables:

$$\xi=z_1+u(z_2-z_1),\qquad (0\leqslant u\leqslant 1)$$
$$\eta=\xi+v(\xi'-\xi)=z_1+u(z_2-z_1)+v(1-u)(z_3-z_1),\qquad (0\leqslant v\leqslant 1)$$

l'intégrale devient

$$I=(z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2-z_1)\int_0^1\int_0^1 f''(\eta)(1-u)dudv$$

ou

$$I=d_3\int_0^1\int_0^1 f''(\eta)(1-u)dudv.$$

Le module de la dernière intégrale est inférieur ou égal à

$$\int_0^1\int_0^1|f''(\eta)|(1-u)dudv=|f''(\alpha)|\int_0^1\int_0^1(1-u)dudv=\frac{1}{2}|f''(\alpha)|,$$

$\alpha$ désignant l'affixe d'un point du triangle $z_1z_2z_3$, d'après le théorème de la moyenne et

$$I=\lambda\frac{f''(\alpha)}{2}d_3,$$

$\lambda$ désignant un nombre dont le module ne dépasse par l'unité. Ainsi,

$$\begin{vmatrix}1 & z_1 & f(z_1)\\ 1 & z_2 & f(z_2)\\ 1 & z_3 & f(z_3)\end{vmatrix}=\lambda\frac{f''(\alpha)}{2}\begin{vmatrix}1 & z_1 & z_1^2\\ 1 & z_2 & z_2^2\\ 1 & z_3 & z_3^2\end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant $n=3$ et considérons l'intégrale

$$I=d_3'\int_{z_1}^{z_2}d\xi\int_{\xi}^{\xi'}d\eta\int_{\eta}^{\eta'}f'''(\zeta)d\zeta,$$

définie de la manière suivante; $d_3'$ désigne le déterminant $D_3(z^3)$ correspondant aux valeurs $z_2$, $z_3$, $z_4$; le point $\xi$ décrit le segment $z_1z_2$; le point $\eta$, lorsque $\xi$ est fixé, décrit le segment $\xi\xi'$ parallèle à $z_1z_3$ et limité comme précédemment au côté $z_2z_3$; lorsque $\xi$ et $\eta$ sont fixés, le point $\zeta$ décrit le segment rectiligne $\eta\eta'$ parallèle à $z_1z_4$ et limité en $\eta'$ à la parallèle à $z_3z_4$ menée par $\xi'$. Désignons par $\xi''$ le point de $z_2z_4$ où se rencontrent les parallèles $\xi\xi''$ à $z_1z_4$ et $\xi'\xi''$ à $z_3z_4$. Le triangle $\xi\xi'\xi''$ va jouer, pour les deux dernières intégrations, le même rôle que le triangle $z_1z_2z_3$ dans le cas précédent. Lorsque $\xi$ est fixe, le point $\zeta$ décrit le triangle $\xi\xi'\xi''$ et, lorsque $\xi$ varie, ce triangle balaie le polygone convexe ayant pour sommet trois ou quatre des points $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ et contenant ces quatre points. Une première intégration introduit les valeurs de $f''(z)$ aux points $\eta$ et $\eta'$; une seconde, les valeurs de $f'(z)$ aux points $\xi$, $\xi'$, $\xi''$; une dernière, les valeurs de $f(z)$ aux points $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, en sorte que $I$ est une fonction linéaire et homogène de $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$, $f(z_4)$. Un calcul sans difficulté montre que $I$ est égal à $D_4(f)$, mais on peut l'éviter comme nous le verrons tout à l'heure.

Faisons le changement de variables

$$\xi=z_1+u(z_2-z_1), \qquad (0\leqslant u\leqslant 1)$$
$$\eta=\xi+v(\xi'-\xi)=z_1+u(z_2-z_1)+v(1-u)(z_3-z_1), \qquad (0\leqslant v\leqslant 1)$$
$$\zeta=\eta+w(\eta'-\eta)=z_1+u(z_2-z_1)+v(1-u)(z_3-z_1)+w(1-u)(1-v)(z_4-z_1),$$
$$(0\leqslant w\leqslant 1)$$

l'intégrale peut s'écrire

$$I=d_3'(z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_4-z_1)\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f'''(\zeta)(1-u)^2(1-v)dudvdw,$$

ou

$$I=d_4\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f'''(\zeta)(1-u)^2(1-v)dudvdw=\lambda\frac{f'''(a)}{3\,!}d_4,$$

$a$ désignant un point du domaine de convexité des points $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ et $|\lambda|\leqslant 1$. On voit que $I$ est nul lorsque $f(z)$ est égal à 1, $z$ ou $z^2$ et égal à $d_4$ pour $f(z)=z^3$. Si l'on remarque que $I$ peut s'écrire;

$$I=\mu_1 f(z_1)+\mu_2 f(z_2)+\mu_3 f(z_3)+\mu_4 f(z_4),$$

$\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ ne dépendant pas de la forme de $f(z)$ on a, en faisant successivement $f(z)$ égal à 1, $z$, $z^2$, $z^3$,

$$\begin{aligned}\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4&=0,\\ z_1\mu_1+z_2\mu_2+z_3\mu_3+z_4\mu_4&=0,\\ z_1^2\mu_1+z_2^2\mu_2+z_3^2\mu_3+z_4^2\mu_4&=0,\\ z_1^3\mu_1+z_2^3\mu_2+z_3^3\mu_3+z_4^3\mu_4&=d_4\,;\end{aligned}$$

d'où en éliminant $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ entre ces équations et celle qui définit $I$,

$$I=D_4(f).$$

Le même procédé de calcul s'applique pour toute valeur de l'entier $n$.

En particulier, si tous les points $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ sont en ligne droite, le point $a$ est situé sur le segment de cette droite qui les contient tous. Enfin, si $f(z)$ est une fonction de la variable réelle $z$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $n$ inclus, la dérivée d'ordre $n$ étant intégrable, on a $\lambda=1$ et on retrouve une formule bien connue. Pour $n=1$, on a la formule de DARBOUX. On voit que $f(z)$ doit être holomorphe dans le domaine de convexité de $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$.

Nous avons appelé domaine de convexité relatif à un ensemble de points situés dans un plan, le domaine formé par les points communs à tous les domaines limités par une courbe fermée convexe enfermant tous les points de l'ensemble. Le domaine de convexité d'un ensemble fini de points est un polygone convexe.

2. - On peut étendre la formule démontrée au paragraphe précédent en supposant que les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ ne soient plus tous différents. Si $z_2$ devient égal à $z_1$, il faudra, dans les déterminants $D_{n+1}(f)$ et $d_{n+1}$ remplacer les éléments de la seconde ligne par les dérivées, par rapport à $z_1$, de ceux de la première. Si $z_2$ et $z_3$ deviennent égaux à $z_1$, il faut remplacer les éléments de la deuxième ligne par les dérivées premières, par rapport à $z_1$, de ceux de la première, et les éléments de la troisième ligne par les dérivées secondes de ces mêmes éléments. D'une manière générale, si $k_i-1$ des nombres $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ deviennent égaux à $z_i$, il faudra remplacer les $k_i-1$ lignes correspondant à ces éléments par des lignes formées au moyen des dérivées première, deuxième, etc. $(k_i-1)^e$, par rapport à $z_i$, des éléments de la ligne relative à $z_i$.

On pourrait démontrer par un calcul direct que la formule établie subsiste dans ce cas. Mais il suffit de remarquer que l'intégrale qui figure dans $I$, exprimée au moyen des variables $u, v, w, \ldots$, a une expression indépendante de la position des points $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ et que sa valeur est toujours égale à $\lambda\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $a$ désignant l'affixe d'un point du domaine de convexité de tous les $z_i$ distincts et $\lambda$, un nombre de module non supérieur à l'unité. D'autre part, cette intégrale est égale à $\frac{D_{n+1}(f)}{d_{n+1}}$

et il suffit de remplacer ce rapport par sa valeur limite lorsque plusieurs des $z_j$ deviennent égaux. On peut donc écrire la formule générale

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \dots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ 0 & 1 & 2z_1 \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_1^{n-2} & f'(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_1)!} z^{n-k_1} & f^{(k_1-1)}(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_h & z_h^2 \dots & z_h^{n-1} & f(z_h) \\ 0 & 1 & 2z_h \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_h^{n-2} & f'(z_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_h)!} z_h^{n-k_h} & f^{(k_h-1)}(z_h) \end{vmatrix} = \lambda \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \dots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ 0 & 1 & 2z_1 \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_1^{n-2} & \frac{n!}{(n-1)!} z_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_1)!} z_1^{n-k_1} & \frac{n!}{(n-k_1+1)!} z_1^{n-k_1+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_h & z_h^2 \dots & z_h^{n-1} & z_h^n \\ 0 & 1 & 2z_h \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_h^{n-2} & \frac{n!}{(n-1)!} z_h^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_h)!} z_h^{n-k_h} & \frac{n!}{(n-k_h+1)!} z_h^{n-k_h+1} \end{vmatrix},$$

avec $k_1+k_2+\dots+k_h=n+1$.

Considérons en particulier l'hypothèse $h=1$, $k_1=n+1$. L'égalité se réduit à une identité, car on a $\alpha=z_1$.

Supposons $h=2$, $k_1=n$, $k_2=1$. Pour calculer $D_{n+1}(f)$, ajoutons aux éléments de la dernière ligne ceux de la première multipliés par $-1$; ceux de la seconde multipliés par $-(z_2-z_1)$; ceux de la troisième multipliés par $-\frac{(z_2-z_1)^2}{2!}$; etc.; ceux de la $n^e$ multipliés par $-\frac{(z_2-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}$; nous obtenons, pour l'élément situé dans la dernière ligne et la $(p+1)^{\text{ème}}$ colonne, si $p<n$,

$$z_2^p - \left[z_1^p + \frac{p}{1} z_1^{p-1}(z_2-z_1) + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} z_1^{p-2}(z_2-z_1)^2 + \dots + (z_2-z_1)^p\right],$$

c'est-à-dire zéro et, si $p=n$,

$$f(z_2)-f(z_1)-\frac{(z_2-z_1)}{1}f'(z_1)-\frac{(z_2-z_1)^2}{2!}f''(z_1)\dots-\frac{(z_2-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_1)$$

et le déterminant se réduit à sa diagonale principale; il est égal au produit de l'expression précédente par $1!\ 2!\dots(n-1)!$

En opérant de même pour le calcul de $d_{n+1}$ on trouve

$$d_{n+1}=1!\ 2!\ldots\ (n-1)!\ (z_2-z_1)^n$$

et, par conséquent,

$$f(z_2)=f(z_1)+\frac{(z_2-z_1)}{1}f'(z_1)+\ldots+\frac{(z_2-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_1)+\lambda\frac{(z_2-z_1)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

$a$ désignant l'affixe d'un point situé sur le segment rectiligne $z_1z_2$ et $\lambda$ un nombre de module non supérieur à l'unité. Ce résultat peut d'ailleurs se déduire aisément du calcul de l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{(z_2-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\zeta)d\zeta,$$

$\zeta$ parcourant le segment $z_1z_2$. Cette intégrale est égale à l'intégrale multiple considérée précédemment; il suffit de la calculer au moyen d'intégrations par parties et d'égaler la valeur obtenue à celle que donne le calcul direct par le changement de variable

$$\zeta=z_1+u(z_2-z_1),\qquad (0\leqslant u\leqslant 1).$$

3. - Il n'est pas possible, même en élargissant le domaine où peut être choisi le nombre $a$, de déterminer toujours une valeur de ce nombre pour laquelle $\lambda=1$, comme pour le cas des fonctions de variable réelle. Il suffit par exemple, de prendre $f(z)=e^z$ et les valeurs de $z$:

$$z_1,\quad z_1+2i\pi,\quad z_1+4i\pi,\ldots,\quad z_1+2ni\pi;$$

on a alors $D_{n+1}(e^z)=0$ et $\lambda=0$ quel que soit $z_1$, puisque $f^{(n)}(z)=e^z$ ne peut s'annuler. Dans le cas du théorème des accroissements finis, M. POMPEIU a montré que inversement, $a$ étant donné, on peut toujours trouver, dans le voisinage de $a$, des points $z_1$ et $z_2$ tels que

$$f(z_2)-f(z_1)=(z_2-z_1)f'(a)\ \ (^1).$$

Je me propose de démontrer, plus généralement, la proposition suivante:

*Sur toute courbe fermée, entourant le point a, il existe au moins un couple de points $z_1$ et $z_2$ vérifiant l'égalité*

$$f(z_2)-f(z_1)=(z_2-z_1)f'(a).$$

Supposons d'abord $f'(a)=0$; soit $(C)$ une courbe fermée simple entourant

---

(1) D. POMPEIU: *Einige Sätze über monogene Funktionen* (Sitzungsb. der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften in Wien, 1911). - Comptes-Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris (1911).

le point $a$, et telle que, dans le domaine fermé, limité par $(C)$ et contenant $a$, il n'y ait aucun autre zéro de $f'(z)$.

Si, lorsque $z$ parcourt la courbe $(C)$, les valeurs de $f(z)$ sont toutes différentes et si $f'(z)$ ne s'annule pas, le point d'affixe $f(z)$ décrit une courbe $(\Gamma)$ fermée et sans point double. On sait que, dans ce cas, $f(z)$ effectue la représentation conforme du domaine intérieur à $(C)$ sur le domaine intérieur à $(\Gamma)$; mais cela est impossible puisque $f'(a)=0$. Donc $f(z)$ prend deux fois au moins une même valeur en des points $z_1$ et $z_2$ qui sont distincts puisque $f'(z)$ ne s'annulle pas sur $(C)$. On a donc

$$f(z_2)-f(z_1)=(z_2-z_1)f'(a)=0.$$

Si maintenant $f'(a)$ n'est pas nul, il suffit de remplacer $f(z)$ par $f(z)-zf'(a)$ pour être ramené au cas précédent; sur toute courbe $(C)$ limitant un domaine dans lequel $f'(z)$ ne prend pas deux fois la valeur $f'(a)$, se trouve au moins un couple de points $z_1$ et $z_2$ distincts tels que

$$f(z_2)-z_2f'(a)=f(z_1)-z_1f'(a),$$

c'est-à-dire

$$f(z_2)-f(z_1)=(z_2-z_1)f'(a).$$

On démontrerait de même la proposition suivante: *soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine $(D)$ limité par une courbe $(C)$, le rapport*

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$$

*prend, sur la courbe $(C)$, les mêmes valeurs que dans le domaine $(D)$.*

Il suffit ici encore de remarquer que si $f(z)$ est univalente sur $(C)$, elle est univalente dans $(D)$.

Dans le cas général, on a la proposition suivante:

*Dans le voisinage de tout point $a$, on peut trouver des points $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ distincts, tels que l'on ait l'égalité*

$$D_{n+1}(f)=d_{n+1}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Faisons la démonstration pour $n=2$. Il faut trouver, dans le voisinage du point $a$, trois points distincts $z_1$, $z_2$, $z_3$, tels que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & f(z_1) \\ 1 & z_2 & f(z_2) \\ 1 & z_3 & f(z_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} \cdot \frac{f''(a)}{2}.$$

Soit

$$F(z)=f(z)-(z-a)f'(a)-(z-a)^2\frac{f''(a)}{2};$$

on a

$$F(a)=f(a); \qquad F'(a)=F''(a)=0.$$

L'équation $F(z)=f(a)$ admet $a$ comme racine triple; on peut donc prendre un nombre $\beta$ assez voisin de $f(a)$ pour que l'équation

$$F(z)=\beta$$

admette trois racines distinctes $z_1$, $z_2$, $z_3$ voisines de $a$. On peut alors écrire

$$f(z_1)=\beta+(z_1-a)f'(a)+(z_1-a)^2\frac{f''(a)}{2},$$
$$f(z_2)=\beta+(z_2-a)f'(a)+(z_2-a)^2\frac{f''(a)}{2},$$
$$f(z_3)=\beta+(z_3-a)f'(a)+(z_3-a)^2\frac{f''(a)}{2}.$$

Considérons ces équations comme un système du premier degré dont les inconnues seraient $\beta$, $f'(a)$, $\frac{f''(a)}{2}$. On en tire, en résolvant par rapport à la dernière inconnue,

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1-a & (z_1-a)^2 \\ 1 & z_2-a & (z_2-a)^2 \\ 1 & z_3-a & (z_3-a)^2 \end{vmatrix} \frac{f''(a)}{2} = \begin{vmatrix} 1 & z_1-a & f(z_1) \\ 1 & z_2-a & f(z_2) \\ 1 & z_3-a & f(z_3) \end{vmatrix};$$

et comme les déterminants ne dépendent pas de $a$, on a bien

$$D_3(f)=d_3\cdot\frac{f''(a)}{2}.$$

4. - Appliquons les résultats du paragraphe 2 à l'évaluation d'une limite supérieure de l'erreur commise en remplaçant une fonction holomorphe par un polynome d'approximation.

Considérons d'abord $n$ points distincts et soit $P(z)$ le polynome unique de degré $n-1$ au plus qui prend les mêmes valeurs que $f(z)$ aux points distincts $z_1$, $z_2,\ldots,$ $z_n$. Le calcul des coefficients de $P(z)$ au moyen d'équations du premier degré donne aussitôt

$$(-1)^{n+1}d_nP(z)=\begin{vmatrix} 1 & z & z^2\ldots & z^{n-1} & 0 \\ 1 & z_1 & z_1^2\ldots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2\ldots & z_n^{n-1} & f(z_n) \end{vmatrix};$$

comme on peut écrire l'identité

$$(-1)^n d_n f(z)=\begin{vmatrix} 1 & z & z^2\ldots & z^{n-1} & f(z) \\ 1 & z_1 & z_1^2\ldots & z_1^{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2\ldots & z_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

on en déduit

$$f(z)-P(z)=(-1)^n\frac{D_{n+1}(f)}{d_n}=\lambda\frac{d_{n+1}}{d_n}\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

ou

$$f(z) - P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \lambda \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

$a$ désignant l'affixe d'un point du domaine de convexité des points $z$, $z_1$, $z_2$,...., $z_n$ et $\lambda$ un nombre de module non supérieur à l'unité.

Si plusieurs des nombres $z_j$ deviennent égaux entre eux, on fera aisément les modifications nécessaires. Dans les déterminants qui représentent le polynome d'interpolation $P(z)$ et la valeur de $D_{n+1}(f)$, on remplacera comme précédemment les éléments de certaines lignes par leurs dérivées. Si l'on a $h$ valeurs distinctes $z_1$, $z_2$,...., $z_h$, avec les ordres de multiplicité $k_1$, $k_2$,...., $k_h$, dont la somme est égale à $n$, on pourra écrire la formule

$$f(z) - P(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_h)^{k_h} \lambda \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Si $f(z)$ représente une fonction de variable réelle, on remplacera $\lambda$ par l'unité. Dans tous les cas, l'expression

$$\left| (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_h)^{k_h} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|$$

donne une limite supérieure de l'erreur commise en remplaçant $f(z)$ par $P(z)$.

**5.** - Désignons par $Q(z)$ le polynome

$$(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_h)^{k_h},$$

l'expression de l'erreur est aussi donnée par la formule d'HERMITE (²)

$$f(z) - P(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{Q(z) f(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta,$$

étendue à un contour fermé $(C)$ contenant à son intérieur les points $z_1$, $z_2$,...., $z_h$ et parcouru dans le sens positif: $\zeta$ désigne l'affixe d'un point de ce contour. On a donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z) Q(\zeta)} = \lambda \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

La formule d'HERMITE permet de donner une forme du polynome d'interpolation qui représente le développement du déterminant par lequel nous l'avons représenté plus haut. Il suffit de calculer l'intégrale en évaluant les résidus des pôles $z$, $z_1$,...., $z_h$ (³).

(²) HERMITE, Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878), p. 70-79.

(³) Voir: P. MONTEL: *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1910), p. 49. L'expression du polynome comporte une faute d'impression qui m'a été signalée en 1923 par M. LOMNICKI.

La formule exacte a été donnée par M. PAUL JOHANSEN: *Über osculierende Interpolation* (Skandinavisk Aktuaristidskrift (1931), p. 231-237).

On peut aussi obtenir très simplement l'expression de $P(z)$ en employant la méthode classique correspondant au cas où les $z_j$ sont distincts.

Désignons par $P_i(z)$ le polynome qui admet les points $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_h$ comme zéros d'ordres $k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_h$, et tel que $P_i(z), P_i'(z), \ldots, P_i^{(k_i-1)}(z)$ prennent au point $z_i$, respectivement les valeurs $f(z_i), f'(z_i), \ldots, f^{(k_i-1)}(z_i)$. On a évidemment

$$P(z) = P_1(z) + P_2(z) + \ldots + P_h(z).$$

Or, $P_i(z)$ est de la forme

$$(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_{i-1})^{k_i-1}(z-z_{i+1})^{k_i+1}\ldots(z-z_h)^{k_h}\Pi_i(z),$$

le polynome $\Pi_i(z)$ étant de degré $k_i - 1$ au plus; si on pose

$$Q_i(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_i)^{k_i}},$$

on voit que

$$P_i(z) = Q_i(z)\Pi_i(z)$$

doit prendre, ainsi que ses $k_i - 1$ premières dérivées, les mêmes valeurs au point $z_i$, que $f(z)$ et ses $k_i - 1$ premières dérivées. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$\Pi_i(z) = \frac{P_i(z)}{Q_i(z)}$$

prenne, ainsi que ses $k_i - 1$ premières dérivées, les mêmes valeurs au point $z_i$ que $\frac{f}{Q_i}$ et ses $k_i - 1$ premières dérivées, car les valeurs de $P_i$ déterminent celles de $\Pi_i$ d'une manière unique, et réciproquement. Le polynome $\Pi_i(z)$ est donc exprimé par la formule de TAYLOR

$$\Pi_i(z) = \left(\frac{f}{Q_i}\right)_{z_i} + (z-z_i)\left(\frac{f}{Q_i}\right)'_{z_i} + \ldots + \frac{(z-z_i)^{k_i-1}}{(k_i-1)!}\left(\frac{f}{Q_i}\right)^{(k_i-1)}_{z_i}.$$

Par conséquent:

$$P(z) = \sum_{i=1}^{i=h} Q_i(z)\left[\left(\frac{f}{Q_i}\right)_{z_i} + (z-z_i)\left(\frac{f}{Q_i}\right)'_{z_i} + \ldots + \frac{(z-z_i)^{k_i-1}}{(k_i-1)!}\left(\frac{f}{Q_i}\right)^{(k_i-1)}_{z_i}\right].$$

**5.** - Proposons-nous d'étendre la formule établie au paragraphe 3 au cas où les fonctions associées à $f(z)$ ne sont pas les puissances de la variable $z$, mais des fonctions appartenant à une suite arbitrairement fixée:

$$p_0(z), \quad p_1(z), \ldots, \quad p_n(z), \ldots$$

Il s'agira alors d'évaluer, en fonction des valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées en un même point $a$, l'expression $\frac{\Delta_{n+1}(f)}{\delta_{n+1}}$ dans laquelle

$$\Delta_{n+1}(f) = \begin{vmatrix} p_0(z_1) & p_1(z_1)\ldots & p_{n-1}(z_1) & f(z_1) \\ p_0(z_2) & p_1(z_2)\ldots & p_{n-1}(z_2) & f(z_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_0(z_{n+1}) & p_1(z_{n+1})\ldots & p_{n-1}(z_{n+1}) & f(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

et
$$\delta_{n+1} = \Delta_{n+1}(p_n).$$

Nous introduirons le premier membre $E_n[y]$ de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $n$ qui admet comme intégrales $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ et qui vérifie l'égalité
$$E_n[p_n] = 1.$$

On a évidemment, en supposant que les $p_i$ ne sont pas liés par une identité linéaire à coefficients constants,

$$E_n[y] = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \ldots & p_{n-1} & y \\ p_0' & p_1' \ldots & p'_{n-1} & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^{(n)} & p_1^{(n)} \ldots & p_{n-1}^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \ldots & p_{n-1} & p_n \\ p_0' & p_1' \ldots & p'_{n-1} & p_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^{(n)} & p_1^{(n)} \ldots & p_{n-1}^{(n)} & p_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

et la relation
$$E_{n+1}(y) = \frac{E_n'[y]}{E_n'[p_{n+1}]},$$

la notation $E_n'[y]$ indiquant la dérivée par rapport à $z$ de l'expression $E_n[y]$. Cette dernière égalité montre que $E_n'[p_{n+1}]$ est une solution de l'équation adjointe de
$$E_{n+1}[y] = 0$$

puisque le produit $E_n'[p_{n+1}]E_{n+1}[y]$ est une dérivée exacte.

Bornons-nous, pour simplifier les calculs, au cas de $n=2$. Introduisons l'intégrale
$$I = \int_{z_1}^{z_2} E_0'[p_1(\xi)]\,d\xi \int_{\xi}^{\xi'} E_1'[p_2(\eta)]E_2[f(\eta)]\,d\eta,$$

La seconde intégration donne, si $E_1'[p_2(\eta)]$ est régulière et ne s'annule pas sur le chemin d'intégration,
$$\int_{\xi}^{\xi'} E_1'[p_2]E_2[f]\,d\eta = \int_{\xi}^{\xi'} E_1'[f]\,d\eta = E_1[f(\xi')] - E_1[f(\xi)]\,;$$

les positions de $\xi$ et $\xi'$ seront précisées bientôt. Il vient
$$I = \int_{z_1}^{z_2} E_0'[p_1(\xi)]E_1[f(\xi')]\,d\xi - \int_{z_1}^{z_2} E_0'[p_1(\xi)]E_1[f(\xi)]\,d\xi.$$

Supposons que le point $\xi$ se déplace de $z_1$ à $z_2$ et le point $\xi'$ de $z_3$ à $z_2$, ces deux points se correspondant de manière que
$$E_0'[p_1(\xi')]\,d\xi' = E_0'[p_1(\xi)]\,d\xi \times k,$$

$k$ désignant une constante; on en déduit
$$E_0[p_1(\xi')] - E_0[p_1(z_3)] = k[E_0[p_1(\xi) - E_0[p_1(z_1)]]$$

avec

$$k=\frac{E_0[p_1(z_2)]-E_0[p_1(z_3)]}{E_0[p_1(z_2)]-E_0[p_1(z_1)]}.$$

Nous supposerons que $E_0'[p_1(\xi)]$ soit régulière et ne s'annulle pas sur le chemin décrit par $\xi$ et que les nombres $E_0[p_1(z_1)]$, $E_0[p_1(z_2)]$, $E_0[p_1(z_3)]$ soient différents. Dans ces conditions, si $E_0'[p_1(\xi')]$ est régulière et ne s'annulle pas, on aura

$$I=k\int_{z_3}^{z_2} E_0'[f(\xi')]d\xi'-\int_{z_1}^{z_2} E_0'[f(\xi)]d\xi.$$

en d'autres termes,

$$I=\mu_1 f(z_1)+\mu_2 f(z_2)+\mu_3 f(z_3),$$

les coefficients $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ étant indépendants de $f(z)$. Les chemins d'intégrations sont définis de la manière suivante: $\xi$ va de $z_1$ en $z_2$ suivant une courbe arbitraire, $\xi'$ va de $z_3$ en $z_2$ suivant le chemin correspondant par l'égalité écrite plus haut; $\eta$ va de $\xi$ à $\xi'$ suivant un chemin arbitraire; les fonctions $E_0'[p_1(\xi)]$, $E_1'[p_2(\eta)]$ ne s'annullent pas dans le domaine ainsi balayé et ne deviennent pas infinies.

On peut remarquer que les égalités $E_0'[p_1]\neq 0$, $E_1'[p_2]\neq 0$ peuvent aussi s'écrire

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_0' & p_1' \end{vmatrix}\neq 0, \qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_0' & p_1' & p_2' \\ p_0'' & p_1'' & p_2'' \end{vmatrix}\neq 0.$$

Ces expressions ne sont pas identiquement nulles par hypothèse; les chemins choisis devront éviter leurs zéros.

Pour calculer $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, remarquons que $I$ est nul lorsque $f(z)$ est égal à $p_0$ ou à $p_1$ et prend la valeur $J$ lorsque $f(z)$ est égal à $p_2$, et par suite $E_2[p_2]$ égal à *un*. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&\mu_1 f(z_1)+\mu_2 f(z_2)+\mu_3 f(z_3)-I=0,\\
&\mu_1 p_0(z_1)+\mu_2 p_0(z_2)+\mu_3 p_0(z_3)=0,\\
&\mu_1 p_1(z_1)+\mu_2 p_1(z_2)+\mu_3 p_1(z_3)=0,\\
&\mu_1 p_2(z_1)+\mu_2 p_2(z_2)+\mu_3 p_2(z_3)-J=0.
\end{aligned}$$

En éliminant $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, il vient

$$\frac{\Delta_3(f)}{\delta_3}=\frac{I}{J}.$$

Or

$$|I|\leqq\int_{z_1}^{z_2}|E_0'[p_1]|\,|d\xi|\left|\int_{\xi}^{\xi'}|E_1'[p_2]E_2[f]|\,|d\eta|\right|\leqq\int_{z_1}^{z_2}\int_{\xi}^{\xi'}|E_0'[p_1]E_1'[p_2]|\,|E_2[f]|\,|d\xi d\eta|.$$

La dernière intégrale peut s'écrire

$$|E_2[f(a)]|\int\int|E_0'[p_1]E_1'[p_2]|\,|d\xi d\eta|,$$

$a$ désignant un point du champ d'intégration. Donc,

$$\frac{\Delta_3(f)}{\delta_3} = \lambda H E_2[f(a)],$$

$\lambda$ désignant un nombre de module inférieur à l'unité, dépendant de $f(z)$, et $H$ un nombre ne dépendant que de $p_0$, $p_1$, $p_2$ et $z_1$, $z_2$, $z_3$. Si $p_n = z^n$, on trouve aisément que $H$ a pour module l'unité.

Dans le cas où les fonctions et la variable sont réelles, on peut remplacer $\lambda H$ par l'unité. En effet $E_0'[p_1]$ et $E_1'[p_2]$ ne s'annulant pas, conservent un signe constant, on peut alors écrire

$$\frac{I}{J} = \frac{\int_{z_1}^{z_2}\int_{\xi}^{\xi'} E_0'[p_1]E_1'[p_2]E_2[f]d\xi d\eta}{\int_{z_1}^{z_2}\int_{\xi}^{\xi'} E_0'[p_1]E_1'[p_2]d\xi d\eta} = E_2[f(a)].$$

On obtient ainsi l'égalité

$$\Delta_3(f) = \delta_3 E_2[f(a)],$$

$a$ désignant une valeur comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres $z_1$, $z_2$, $z_3$. Cette égalité peut aussi être démontrée directement sans difficulté. Les formules précédentes permettent d'évaluer l'approximation de $f(z)$ par des combinaisons linéaires des $p_n$ à coefficients constants.

Dans le cas général, il n'est pas toujours possible de trouver un nombre $a$ vérifiant cette égalité. On s'en assure comme précédemment en examinant le cas où $f(z) = e^z$. Mais, inversement, étant donné le nombre $a$, on peut toujours trouver dans le voisinage de ce point, trois points $z_1$, $z_2$, $z_3$ donnant lieu à l'égalité. La méthode de démonstration est la même que précédemment.

6. - La formule de DARBOUX peut être remplacée par une autre formule due à WEIERSTRASS dans laquelle ne figure plus le coefficient $\lambda$:

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)Z_1,$$

$Z_1$ désignant un point appartenant au domaine de convexité de l'ensemble des valeurs que prend $f'(z)$ lorsque $z$ décrit le segment rectiligne $z_1z_2$, mais la valeur $Z_1$ n'est pas nécessairement prise par $f'(z)$ lorsque $z$ est sur ce segment. Cette formule, elle aussi, peut être étendue au cas de plusieurs valeurs de la variable.

*Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine de convexité des points $z_1$, $z_2$,..., $z_{n+1}$ on peut écrire:*

$$D_{n+1}(f) = d_{n+1}\frac{Z_n}{n!},$$

*$Z_n$ désignant l'affixe d'un point du domaine de convexité correspondant à l'ensemble des valeurs que prend $f^{(n)}(z)$ lorsque $z$ parcourt le domaine de convexité des points $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$.*

Faisons la démonstration pour $n=2$ et reprenons l'intégrale

$$I=d_3\int_0^1\int_0^1 f''(\eta)(1-u)\,du\,dv.$$

Le point

$$Z_2=\frac{\int_0^1\int_0^1 f''(\eta)(1-u)\,du\,dv}{\int_0^1\int_0^1 (1-u)\,du\,dv}$$

est le centre de gravité des masses positives $(1-u)du\,dv$ attachées aux points $f''(\eta)$ du domaine de convexité des valeurs de $f'(z)$ correspondant aux points $z$ du triangle $z_1z_2z_3$. Certaines régions de ce domaine peuvent être recouvertes plusieurs fois. Le point $Z_2$ appartient à ce domaine de convexité et on peut écrire:

$$D_3(f)=I=d_3\,\frac{Z_2}{2}.$$