

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LUIGI BRUSOTTI

**Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di  $k$  circuiti**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 1, n° 1-2 (1932), p. 61-77

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1932\\_2\\_1\\_1-2\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_61_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUL GENERE DEI MODELLI ALGEBRICI DI UN SISTEMA SPAZIALE DI $k$ CIRCUITI

di LUIGI BRUSOTTI (Pisa).

Data una curva gobba algebrica reale (priva di molteplicità a rami reali), la sua parte reale (all'infuori di eventuali punti isolati) è un sistema  $\Sigma$  di  $k$  circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi) generalmente dotati di punti impropri. Perciò tale sistema può studiarsi nell'ambito della topologia spaziale proiettiva, p. e. in relazione a questioni di allacciamento (*Verkettung*) <sup>(1)</sup>.

Reciprocamente, come ho dimostrato in precedenti lavori <sup>(2)</sup>, individuato (nel senso della topologia proiettiva) un sistema  $\Sigma$  di  $k$  circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi), esso ammette *modelli algebrici*, cioè costituiti dai circuiti di una curva gobba algebrica reale (se si vuole, irriducibile).

Sotto un certo aspetto un risultato così generale sembra esaurire l'indagine; ma ciò non è, perchè rimangono tutte le questioni d'esistenza che sorgono dall'imporre alla curva algebrica determinati caratteri o proiettivi soltanto o, per di più, birazionalmente invarianti. In esse può anche suppersi che, nel senso della topologia proiettiva,  $\Sigma$  non sia individuato ma solo sottoposto a date condizioni.

Riguardo ai caratteri *proiettivi* si posseggono soltanto risultati parziali riflettenti l'ordine della curva algebrica, eventualmente associato al genere <sup>(3)</sup>, oppure

---

<sup>(1)</sup> Cfr. L. BRUSOTTI: a) *Sulle curve gobbe algebriche reali a circuiti concatenati* [Annali di Matematica, (3), 25, (1916), pag. 99-128]; b) *Sulle coppie di circuiti allacciati e sui loro modelli algebrici* [Memorie R. Acc. Naz. dei Lincei, classe di Scienze fis. mat. e nat., (6), 3, (1928), pag. 18-76].

<sup>(2)</sup> L. BRUSOTTI: a) *Le curve gobbe algebriche reali come modelli nella topologia proiettiva dell'allacciamento* [Atti del Congresso internazionale dei matematici (Bologna, 1928), 4, 139-145]; b) *Un teorema generale sull'esistenza di modelli algebrici per un sistema spaziale di  $k$  circuiti* [Rend. R. Ist. Lombardo, (3), 61, (1928), pag. 767-783]. Cfr. pure c) *Sull'esistenza di modelli algebrici per ogni sistema spaziale di  $k$  circuiti al finito* [Ibid. (3), 61, (1928), pag. 177-186].

<sup>(3)</sup> Cfr. W. FR. MEYER: *Anwendungen der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Curven, speciell der rationalen Curven 4-ter und 5-ter Ordnung*, Diss. München, 1878; *Ueber algebraische Knoten* [Edinburgh Proc. 13 (1886), pag. 931-946]; A. BRILL: *Ueber algebraische Raumkurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben* [Mathematische Annalen, 18, (1881), pag. 95-98]; J. DE SZ. NAGY: *Ueber die algebraische Darstellung der verknoteten und ver-*

implicanti l'ordine di una superficie algebrica su cui giaccia la curva <sup>(4)</sup>. A questi certo se ne potrebbero aggiungere altri; ma per ora non si delinea la possibilità di istituire un piano generale di ricerca.

Riguardo ai caratteri *birazionalmente invarianti*, quando la curva algebrica sia irriducibile, si presenta in primo luogo il *genere*, da sostituirsi coi generi delle singole componenti irriducibili quando la curva sia riducibile.

In questo campo condizioni *necessarie* d'esistenza sono imposte dal classico teorema di HARNACK, per cui una curva algebrica (reale) irriducibile di genere  $p$  possiede al più  $p+1$  circuiti. Ora, nel presente lavoro, dimostro che tali condizioni sono anche *sufficienti*; e ciò conservando al problema la sua più generale posizione.

Precisamente dimostro che, *individuato, nel senso della topologia proiettiva, un sistema  $\Sigma$  di  $k$  circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi)*:

A) *Comunque si assegni l'intero*

$$p \geq k-1,$$

*sempre per  $\Sigma$  esistono modelli algebrici irriducibili di genere  $p$ .*

B) *Comunque spezzato  $\Sigma$  in sistemi parziali  $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_s$  composti rispettivamente di  $k_1 k_2 \dots k_s$  circuiti, e comunque assunti gli interi*

$$p_i \geq k_i - 1, \quad (i=1, 2, \dots, s)$$

*sempre per  $\Sigma$  esistono modelli (algebrici, riducibili) in cui ciascun sistema parziale  $\Sigma_i$  è rappresentato da un modello (algebrico, irriducibile) di genere  $p_i$ .*

L'accurata ripartizione in paragrafi già orienta il lettore negli sviluppi della dimostrazione quale si presenta nel suo definitivo assetto, onde sembra qui più utile far cenno del processo euristico che l'ha suggerita.

Punto di partenza fu il convincimento che il risultato generale fosse virtualmente raggiunto quando per  $\Sigma$  si dimostrasse l'esistenza di un modello formato coi circuiti di  $k$  curve razionali. Perchè il passaggio al modello algebrico irriducibile di genere minimo ( $p=k-1$ ) si sarebbe facilmente compiuto coll'uso di *curve algebriche connesse* <sup>(5)</sup> composte colle dette curve razionali e con opportune coppie di rette immaginario-conjugate ed un ulteriore impiego della teoria delle

*ketteten algebraischen Raumkurven* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 25 (1916-17), pag. 285-293]; L. BRUSOTTI <sup>(4)</sup> a) b). Notizie in K. ROHN† e L. BERZOLARI: *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen* [Encyclopädie der math. Wiss. III, 2, (1926), pag. 1346-1347].

(4) M. PIAZZOLLA BELOCH: *Sulle superficie del 3° ordine possedenti curve con circuiti concatenati* [Rendiconti Circ. mat. di Palermo, 54, (1930), pag. 83-88].

(5) Notizie sulle curve algebriche connesse leggonsi in F. ENRIQUES-O. CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 3 (Bologna, 1924) pag. 395-414.

curve connesse (coll'intervento di coniche bisecanti reali ma prive di punti reali) avrebbe condotto senz'altro al teorema generale.

Posto così il problema del modello formato coi circuiti di  $k$  curve razionali, esso potevasi da una parte ricondurre allo studio di una generica proiezione piana e dall'altra esplicitare in un procedimento induttivo che permettesse di sostituire, uno per volta, i singoli circuiti (spaziali) con circuiti topologicamente equivalenti ma appartenenti ad altrettante curve razionali.

Si presentava qui l'opportunità sotto un certo aspetto di identificare il circuito (piano) con un poligono inscritto e, sotto un altro, di dedurre la curva (piana) razionale con un procedimento di « piccola variazione » applicato ad un *multilatero connesso* di genere (virtuale) zero. Ma sembrava a prima vista che i due processi fossero inconciliabili, perchè nel secondo ciascuna delle rette interviene per intero mentre nel primo interviene di questa solo uno dei due segmenti proiettivi in cui essa è divisa dalla coppia di vertici consecutivi del poligono inscritto.

Tuttavia l'ingombro che nella proiezione piana proviene dal poligono complementare a quello iscritto si rivelò eliminabile nel passaggio alla figura obbiettiva, ove i rami di un nodo della proiezione sono da interpretarsi opportunamente come proiezioni di un ramo obbiettivo superiore e di uno inferiore. E ciò può farsi in modo che la parte ingombrante s'interpreti invece come proiezione di un *segmento* obbiettivo topologicamente trascurabile, o, come si dirà, di un *segmento retrattile*.

In un modello al finito gioverebbe perciò supporre che (rispetto al quadro) la quota dei punti di tale *segmento* superi quella di ogni altro punto del sistema; detto criterio non può però seguirsi quando, come qui, intervengano anche punti impropri. A tale difficoltà si è posto rimedio coll'introduzione di quella che si dirà *quota iperboloidica* di un punto proprio od improprio.

Così è chiarito l'ufficio dei preliminari topologici (§ 1) ed algebrici (§ 2) in relazione all'ulteriore svolgimento della dimostrazione. La quale, del tutto indipendente da' miei precedenti lavori [cfr. (2)], offre quindi anche una nuova via per stabilire la semplice esistenza del *modello algebrico*.

## § 1. - Preliminari topologici.

1. - Sia  $\Sigma$  un sistema spaziale di  $k$  circuiti, privi di singolarità e a due a due non secantisi.

Assunti sopra un circuito  $\gamma$  di  $\Sigma$  due punti  $A, B$ , essi dividono  $\gamma$  in due *segmenti* ( $\tau$  e  $\theta$ ) e la retta  $AB$  pure in due segmenti, di cui uno,  $\sigma$ , forma con  $\tau$  circuito pari (mentre l'altro forma con  $\tau$  circuito dispari).

Se un *segmento* variabile  $\xi$ , fermi gli estremi  $A, B$ , può con deformazione continua ridursi da  $\tau$  a  $\sigma$ , senza attraversare nè se stesso, nè  $\theta$ , nè i circuiti di  $\Sigma$  diversi da  $\gamma$ , allora  $\tau$  si dirà *segmento retrattile*.

2. - Sia  $\Sigma'$  la proiezione (ortogonale) di  $\Sigma$  su di un piano (proprio)  $\pi$ . Si potrà sempre scegliere  $\pi$  in modo che:

I. Nessun circuito di  $\Sigma$  passi per il punto improprio delle normali a  $\pi$ , onde circuiti pari (dispari) si proiettino in circuiti pari (dispari).

II. Il sistema  $\Sigma'$  non possenga punti multipli impropri ed i suoi punti multipli (propri) siano punti doppi ordinari.

Sulle rette proprie normali a  $\pi$  si può fissare un verso positivo concorde. Dati su una normale due punti (propri), percorrendola in verso positivo a partire dal punto improprio per ritornarvi, uno dei due punti si incontrerà prima dell'altro e si dirà *sopra* di questo (il secondo *sotto* il primo).

Un punto doppio di  $\Sigma'$  si interpreterà come punto doppio apparente di  $\Sigma$  e dei due rami uno sarà proiezione del *superiore* in  $\Sigma$  (l'altro dell'*inferiore*). Fissato su ciascun circuito di  $\Sigma$  (quindi di  $\Sigma'$ ) il verso positivo, l'ufficio dei due rami in  $\Sigma'$  sarà determinato quando sia noto il *segno* del punto doppio apparente <sup>(6)</sup>. In questo senso è lecito parlare di una *segnatura* nei nodi di  $\Sigma'$ .

Reciprocamente, *dato  $\Sigma'$  e stabilitane la segnatura,  $\Sigma$  è individuato sotto l'aspetto della Topologia proiettiva.*

3. - Sia ora, in  $\pi$ , un sistema  $\Sigma'$  soddisfacente alla condizione II di n.º 2 e sopra un circuito  $\gamma'$  di esso abbiansi due punti (semplici)  $A'$ ,  $B'$ , che divideranno il circuito in due *segmenti*  $\tau'$  e  $\theta'$ . Dicasi allora  $\sigma'$  il segmento rettilineo  $A'B'$  che forma con  $\tau'$  circuito pari. Nessun ulteriore circuito di  $\Sigma'$  passi per  $A'$ , nè per  $B'$ .

Per semplicità si aggiungano le clausole, non essenziali, che  $A'$ ,  $B'$  siano propri e che  $\sigma'$  sia il segmento (rettilineo) al finito.

Indi si pensi di voler interpretare  $\Sigma'$  come proiezione di un sistema  $\Sigma$  spaziale nel senso di n.º 2, rispettando quindi anche la condizione I]; in particolare,  $\gamma'$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $\tau'$ ,  $\theta'$  come proiezioni di  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\tau$ ,  $\theta$ .

Si proceda perciò intanto alla *segnatura* di  $\Sigma'$  ne' suoi nodi *non giacenti su  $\tau'$*  e ciò facciasi *in modo arbitrario*.

Si dimostrerà allora *che è possibile procedere alla segnatura di  $\Sigma'$  nei nodi giacenti su  $\tau'$ , in tale maniera, che  $\tau'$  risulti proiezione di un segmento  $\tau$  retrattile* (nel senso di n.º 1 e relativamente al sistema  $\Sigma$  di cui  $\Sigma'$  si pensa proiezione in conformità alla segnatura introdotta fuori di  $\tau'$  e su  $\tau'$ ).

---

<sup>(6)</sup> Ad un punto doppio apparente si attribuisce il segno  $+$  (rispettivamente il segno  $-$ ) se un osservatore collocato lungo un ramo (obbiettivo) col verso positivo dai piedi al capo e col viso rivolto all'altro ramo, lo vede percorso in verso positivo da destra a sinistra (rispettivamente da sinistra a destra). Lo scambio dei due rami non altera il criterio, sostanzialmente legato alle due indicatrici spaziali. Cfr. p. es. M. DEHN e P. HEEGAARD: *Analysis situs* (Encyclopädie der Math. Wiss. III, 1) pag. 212.

4. - Per la dimostrazione del lemma enunciato al n.º 3 conviene fissare il concetto di *quota iperboloïdica* di un punto dello spazio.

Si assumano coordinate cartesiane ortogonali con  $\pi \equiv xy$  e l'asse  $z$  rivolto verso l'alto (in relazione al linguaggio introdotto al n.º 2).

Il fascio di quadriche:

$$z^2 = h(x^2 + y^2 + 1)$$

non contiene altre quadriche a punti reali all'infuori di iperboloïdi a due falde ( $h$  finito e  $>0$ ) e delle due quadriche specializzate la cui parte reale consta o del piano  $\pi$  contato due volte ( $h=0$ ) o di un punto isolato ( $h=\infty$ ), coincidente col punto improprio  $Q_\infty$  delle normali a  $\pi$ .

Per un punto  $M$  (reale) dello spazio passa una ed una sola quadrica del fascio, alla quale corrisponde un valore di  $h$ , con

$$0 \leq h \leq \infty.$$

Tale valore di  $h$  si dirà la *quota iperboloïdica* di  $M$ .

Su di una normale a  $\pi$  ha quota iperboloïdica nulla (rispettivamente infinita) soltanto la traccia (rispettivamente il punto improprio  $Q_\infty$ ); ma ad ogni  $h > 0$  e finito corrispondono due punti di quota iperboloïdica  $h$  (l'*inferiore* ed il *superiore*).

Dato in  $\pi$  un circuito, esso venga pensato come proiezione di un circuito spaziale, che, per semplicità, supporremo non tocchi nè  $\pi$  nè il piano improprio. Le intersezioni del circuito spaziale con  $\pi$  e col piano improprio saranno complessivamente in numero pari e lo divideranno in altrettanti segmenti alternatamente *superiori* ed *inferiori*. Il circuito spaziale sarà perciò determinato quando la quota iperboloïdica  $h$  del punto obbiettivo sia assegnata come funzione [limitata continua e generalmente derivabile] del punto corrente sul circuito in  $\pi$  <sup>(7)</sup>, la quale (positiva altrove) si annulli in un numero pari o dispari di punti secondo che il circuito sia pari o dispari; e quando in un solo punto (proprio, con  $h \neq 0$ ) sia fissata la scelta fra punto obbiettivo superiore od inferiore <sup>(8)</sup>.

5. - Si riprendano ora le notazioni di n.º 3 per la dimostrazione del lemma ivi enunciato. Si dica inoltre  $\Sigma'_0$  il sistema ricavato da  $\Sigma'$  togliendone  $\gamma'$  (e  $\Sigma_0$  il sistema di cui  $\Sigma'_0$  possa pensarsi proiezione su  $\pi$ ).

In relazione alla segnatura di  $\Sigma'$  fuori di  $\tau'$  (già arbitrariamente prefissata)

<sup>(7)</sup> Le condizioni fra [ ] saranno nel seguito, in casi analoghi, sempre sottintese; gli attributi *continua*, *derivabile* possono precisarsi con una rappresentazione parametrica del circuito piano, sostituendo al punto il parametro; *generalmente derivabile* intendasi derivabile ovunque fuorchè, al più, in un numero finito di punti, in ciascuno dei quali però esistano separatamente la derivata a sinistra e quella a destra.

<sup>(8)</sup> Le modificazioni da introdursi nel caso escluso di contatti con  $\pi$  o col piano improprio sono del tutto ovvie. Così per circuiti incidenti la retta impropria di  $\pi$ .

si realizzi nello spazio un modello provvisorio  $\Sigma_0 + \theta$ , non passante per  $Q_\infty$  (n.º 2 cond. I); onde per i suoi punti si avrà quota iperboloidica massima finita.

Sia essa  $h_0$ ; ed assumasi  $h_1 > h_0$ .

Indi in  $\pi$  si circondino  $A'$  e  $B'$  con cerchi di raggio abbastanza piccolo perchè nel loro interno non si trovino punti di  $\Sigma_0'$  (il che è lecito non passando alcun circuito di  $\Sigma_0'$  nè per  $A'$ , nè per  $B'$ ) e perchè inoltre nell'interno del primo (rispettivamente del secondo)  $\theta'$  possenga un solo tratto, privo di nodi,  $A'U'$  (rispettivamente  $B'V'$ ), con  $U'$  (rispettivamente  $V'$ ) al contorno (cfr. fig. 1).

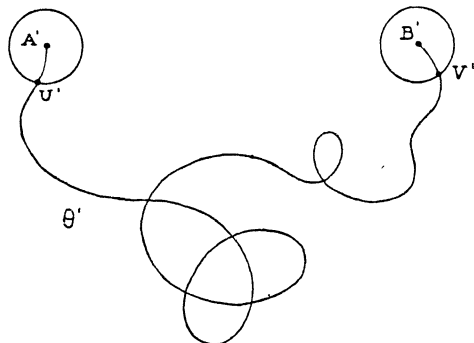


Fig. 1.

Nel modello provvisorio  $U'$ ,  $V'$  siano proiezioni di  $U$ ,  $V$  rispettivamente di quote iperboloidiche  $u$ ,  $v$ . Sarà:

$$u < h_1, \quad v < h_1.$$

Ciò posto, senza alterare topologicamente il modello, sarà possibile attribuire ad  $A$ ,  $B$  quota iperboloidica comune  $h_1$  e supporre per esempio  $A$ ,  $B$  entrambi superiori. Invero, con riferimento ad  $A$ , se  $U$  è superiore basterà supporre che la quota iperboloidica del

punto obiettivo sia sul tratto  $A'U'$  funzione monotona del punto che lo percorre da  $A'$  verso  $U'$  con valore iniziale  $h_1$  e valore finale  $u$ ; se  $U$  è inferiore, spezzare il tratto in due tratti  $A'W'$  e  $W'U'$ , indi supporre la quota funzione monotona in ciascuno dei tratti parziali e con valori  $h_1$ ,  $0$ ,  $u$  rispettivamente in  $A'$ ,  $W'$ ,  $U'$  (sempre qui, ed altrove, tenuto conto di quanto fu detto in fine di n.º 4). Similmente per  $B$  e  $V$ .

Così modificato il modello provvisorio in prossimità di  $A$  e di  $B$ , ma lasciandolo inalterato nella rimanente parte, si avrà ormai un modello  $\Sigma_0 + \theta$  con quota iperboloidica massima ( $=h_1$ ) in  $A$  e  $B$ , ed ivi soltanto.

Si tracci allora il cerchio  $\Omega$  di centro  $A'$  e di raggio abbastanza piccolo perchè  $\tau'$  internamente ad esso abbia solo il tratto  $A'T'$  (con  $T'$  al contorno); sia poi  $A'S'$  il tratto di  $\sigma'$  interno ad  $\Omega$  (vedasi fig. 2).

Il segmento  $\sigma'$  è proiezione del segmento rettilineo  $\sigma$  cogli estremi  $A$ ,  $B$  superiori e di quota iperboloidica  $h_1$  (perciò tutto di punti propri, superiori, aventi quota iperboloidica  $\geq h_1$ ,  $=h_1$  solo negli estremi); ma  $\sigma'$  può considerarsi anche come proiezione di un segmento  $\sigma^*$  (non rettilineo) pure con estremi  $A$ ,  $B$  e punti tutti (propri e) superiori, essendo la quota iperboloidica del punto corrente su di esso (ma pensata come funzione del punto proiezione) funzione monotona in ciascuno dei tratti  $A'S'$ ,  $S'B'$ , con valore  $h_1$  in  $A'$ ,  $B'$  ed  $h_2 > h_1$  in  $S'$ .

Anche  $\tau'$  dovrà pensarsi come proiezione di un segmento spaziale  $\tau$  di estremi  $A$ ,  $B$ , il che è lecito pur supponendo, come si farà, che  $\tau$  non incontri  $\pi$ .

Ed invero, escluso per semplicità [cfr. (8)] che  $\tau'$  tocchi la retta impropria, esso la taglierà in un numero pari di punti, dovendo (cfr. n.º 3) formare circuito pari con  $\sigma'$  che giace al finito, e da tali punti impropri sarà diviso in *segmenti* da interpretarsi (n.º 4) come proiezioni di *segmenti* alternatamente superiori ed inferiori; supposto superiore il primo (come  $A$ ), lo sarà l'ultimo (come  $B$ ). Per determinare  $\tau$  basterà ormai assegnare la quota iperboloidica come funzione del punto proiezione, e ciò si farà supponendola monotona in ciascuno dei tratti  $A'T'$ ,  $T'B'$ , con valore  $h_1$  in  $A'$ ,  $B'$  (come si deve) ed  $h_2$  in  $T'$ . Si dimostrerà che  $\tau$  è retrattile.

Perciò si introdurrà intanto in  $\pi$  un'opportuna deformazione continua di un *segmento*  $\xi'$ , di estremi  $A'B'$ , coincidente all'inizio con  $\tau'$  ed al termine con  $\sigma'$ .

Un punto  $M'$  percorra  $\tau'$  da  $A'$  a  $B'$  ed il segmento rettilineo  $A'M'$  (inteso in senso proiettivo) lo segua con continuità, partendo dal segmento nullo. Tale segmento  $A'M'$  sarà al finito o conterrà il punto improprio, secondo che  $M'$  debba interpretarsi come proiezione di un punto  $M$  superiore od inferiore (intermedio il caso di  $M'$ , quindi  $M$ , improprio); coinciderà dunque al termine con  $\sigma'$ .

Se a tale segmento rettilineo  $A'M'$  si aggrega la parte di  $\tau'$  non ancora percorsa, si ottiene un *segmento*  $\xi'$  variabile con continuità insieme ad  $M'$ , coincidente all'inizio con  $\tau'$ , al termine con  $\sigma'$ ; e  $\xi'$  (vedi fig. 2) può anche altrimenti spezzarsi nella parte  $A'X'$  interna ad  $\Omega$  e nella parte  $X'B'$  esterna a questo (per  $M'$  interno ad  $\Omega$  è  $X' \equiv T'$ ; per  $M'$  esterno, è  $A'X'$  un raggio di  $\Omega$ ).

S'intende che  $\xi'$ , il quale all'inizio in generale possiede nodi e punti impropri perde gradatamente questi ultimi (precisamente ne perde una coppia ogni volta che il segmento rettilineo  $A'M'$  ritorna al finito) e perde od acquista nodi fino a rimanerne privo.

Si pensi ora  $\xi'$  come proiezione di un *segmento* spaziale  $\xi$ , di estremi  $A, B$ , e, com'è lecito, non incontrante  $\pi$ , anzi, al pari di  $\tau$ , diviso dai punti impropri in *segmenti* superiori ed inferiori, salvo gli adattamenti nel caso di  $M$  improprio. Onde, ancora, a determinare  $\xi$  basterà assegnare la quota iperboloidica come funzione del punto proiezione e si assegnerà monotona in ciascuno dei tratti  $A'X'$ ,  $X'B'$  con valore  $h_1$  in  $A', B'$  (come occorre) ed  $h_2$  in  $X'$ . Ma di più tale funzione pensata come funzionale di  $\xi'$ , sia un funzionale continuo di questo e per  $\xi' \equiv \tau'$ ,  $\xi' \equiv \sigma'$  coincida colle funzioni già introdotte allo scopo di determinare rispetti-

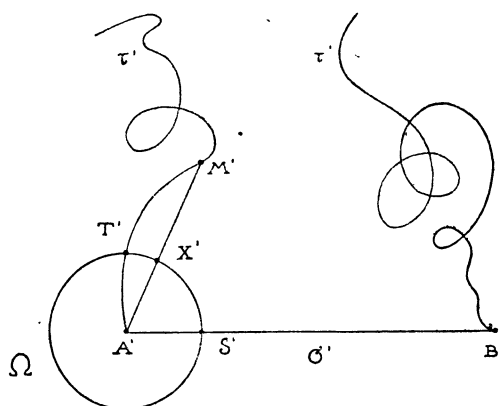


Fig. 2.



vamente  $\tau$  e  $\sigma^*$ . Onde  $\xi$  varierà con continuità insieme a  $\xi'$  (o se si vuole insieme ad  $M'$ ), partendo da  $\tau$  e coincidendo al termine con  $\sigma^*$ .

Ma è soprattutto notevole che  $\xi$ , nella sua deformazione, per le posizioni fatte, non attraversa nè se stesso, nè  $\theta$ , nè  $\Sigma_0$ .

Non attraversa se stesso. Ed invero, detto  $X$ , su  $\xi$ , il punto di proiezione  $X'$ , i tratti  $AX$ ,  $XB$  di  $\xi$  non si attraversano mutuamente perchè variano internamente, rispettivamente esternamente, al cilindro retto di base  $\Omega$  e ciascuno poi non attraversa se stesso perchè su ciascun tratto la quota iperboloidica è funzione monotona.

Ma  $\xi$  non attraversa nè  $\theta$  nè  $\Sigma_0$ , perchè, prescindendo dagli estremi  $A$ ,  $B$  comuni a  $\xi$  e  $\theta$  (e di quota iperboloidica  $h_1$ ), ogni punto di  $\xi$  ha quota iperboloidica  $>h_1$ , ogni punto di  $\Sigma_0 + \theta$  ha quota iperboloidica  $<h_1$ .

Per dimostrare che  $\tau$  è *segmento* retrattile basta ormai provare (cfr. n.º 1) come un *segmento*, che dirò ancora  $\xi$ , di estremi  $A$ ,  $B$ , possa con deformazione continua ridursi da  $\sigma^*$  a  $\sigma$ , senza attraversare nè se stesso, nè  $\theta$ , nè  $\Sigma_0$ . Ed invero i punti così di  $\sigma^*$  come di  $\sigma$  sono tutti superiori e (salvo gli estremi comuni  $A$ ,  $B$ ) di quota iperboloidica  $>h_1$ . Onde il passaggio da  $\sigma^*$  a  $\sigma$  può effettuarsi nel piano proiettante, lasciando fissi gli estremi (di quota iperboloidica  $h_1$ ) e muovendo ogni altro punto lungo la parte superiore della rispettiva retta proiettante, senza mai incontrare iperboloidi aventi quota  $<h_1$ , quindi senza mai attraversare nè  $\theta$  nè  $\Sigma_0$  (ed è poi evidente che  $\xi$  non attraversa se stesso).

Il lemma di n.º 3 è così dimostrato, perchè la segnatura offerta dai nodi giacenti su  $\tau'$  in rapporto alla realizzazione ora effettuata è sufficiente, *indipendentemente da quest'ultima* (cfr. n.º 2), a garantire per  $\tau$  il carattere di *segmento* retrattile, sempre in relazione alla segnatura prestabilita fuori di  $\tau'$ .

OSSERVAZIONE 1. - Le considerazioni svolte valgono in particolare nel caso in cui  $\Sigma$  si riduca a  $\gamma$  ( $\Sigma'$  a  $\gamma'$ ); manchi cioè  $\Sigma_0$  (rispettivamente  $\Sigma'_0$ ).

OSSERVAZIONE 2. - Il risultato conseguito si può anche enunciare affermando che, dal punto di vista della Topologia proiettiva, il sistema  $\Sigma$  si identifica con quello che se ne deduce sostituendo  $\bar{\gamma} = \theta + \sigma$  a  $\gamma = \theta + \tau$ .

## § 2. - Preliminari algebrici.

6. - Nel seguito della trattazione occorrerà far uso di due lemmi, pertinenti entrambi alla teoria delle curve (gobbe) algebriche connesse, intesa in senso puramente algebrico, indipendentemente cioè da questioni di realtà.

Essi sono i seguenti:

I. *Siano  $p+1$  curve razionali  $C_0^{n_i}$  rispettivamente di ordine  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, p+1$ ), prive di singolarità e di mutue incidenze; ed introducansi i punti  $P_j$ ,  $\bar{P}_j$  su  $C_0^{n_j}$  e  $Q_j$ ,  $\bar{Q}_j$  su  $C_0^{n_{j+1}}$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ), tutti fra loro distinti, indi le rette*

$$r_j = P_j Q_j, \quad \bar{r}_j = \bar{P}_j \bar{Q}_j;$$

nè vi siano incidenze di rette fra loro, nè (all'infuori di quelle già imposte) di rette con curve. Allora la curva connessa costituita dalle  $C_0^{n_i}$ ,  $r_j$ ,  $\bar{r}_j$  è posizione limite di curve  $C_p^N$  (irriducibili e prive di singolarità), d'ordine

$$N = n_1 + \dots + n_{p+1} + 2p$$

e di genere  $p$  <sup>(9)</sup>.

II. La curva connessa costituita da una  $C_p^n$  (irriducibile e priva di singolarità), d'ordine  $n$  e di genere  $p$  ( $n-p \geq 3$ ), e da una conica  $C_0^2$  bisecante la  $C_p^n$ , è posizione limite di curve  $C_{p+1}^{n+2}$  (irriducibili e prive di singolarità), d'ordine  $n+2$  e di genere  $p+1$ .

7. - I due lemmi, di n.º 6, possono ricondursi a casi già noti.

Per il primo si sostituiscano intanto le  $C_0^{n_i}$  con altrettanti multilateri connessi  $L_0^{n_i}$  di genere zero, onde la curva totale connessa con un multilatero connesso  $L_p^N$  di genere  $p$ .

Essendo:

$$N-p \geq 3,$$

esso è *non speciale*, e perciò <sup>(10)</sup> appartenente ad una ed una sola famiglia  $F$  di curve  $C_p^N$ , di cui la generica è irriducibile e priva di singolarità. La qual curva generica, in certo modo, potrà dirsi dedotta da  $L_p^N$  realizzando le connessioni solo convenzionalmente imposte nei singoli vertici. Ma se si pensa di procedere a tale realizzazione in due tempi, prima operando nei vertici dei singoli multilateri  $L_0^{n_i}$ , poi nei punti di appoggio delle  $r_j \bar{r}_j$ , si avrà in  $F$ , come forma intermedia, una curva connessa del tipo studiato. E notisi che la varietà avente per elementi le curve connesse di tale tipo è varietà irriducibile, onde la validità del risultato è generale e subito ne consegue il lemma.

Similmente, per il secondo, si sostituisca  $C_p^n$  con un multilatero connesso  $L_p^n$  di genere  $p$ ; e  $C_0^2$  con una coppia di rette incidenti, una delle quali bisechi  $L_p^n$  (in  $P_1, P_2$ ), onde la curva totale connessa con un multilatero  $L_{p+1}^{n+2}$ , *non speciale*.

Sia  $F$  la famiglia di cui  $L_{p+1}^{n+2}$  fa parte, e di cui la curva generica  $C_{p+1}^{n+2}$  è irriducibile e priva di singolarità. Questa, riprendendo il linguaggio introdotto, potrà dirsi ottenuta da  $L_{p+1}^{n+2}$  realizzando le connessioni in tutti i vertici. Tale realizzazione può invece effettuarsi dapprima ovunque fuorchè in  $P_1, P_2$ , poi anche in essi. Ed allora in  $F$ , come forma intermedia, trovasi una delle curve connesse del tipo considerato nel secondo lemma. Ma queste sono elementi di una varietà irriducibile, onde anche qui la validità è generale e ne consegue il lemma.

<sup>(9)</sup> Per  $p=1$  cfr. L. BRUSOTTI, <sup>(1)</sup>, b), pag. 70.

<sup>(10)</sup> F. SEVERI-E. LÖFFLER: *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Teubner, Leipzig-Berlin, 1921), *Anhang G.*, pag. 372.

## § 3. - Modello razionale di un circuito.

8. - Sia il circuito  $\alpha$ , nello spazio; e sia  $\alpha'$  la sua proiezione su  $\pi$  colla relativa *segnatura*, sempre nel senso e nelle condizioni di n.º 2.

Si inscriva in  $\alpha'$  un circuito poligonale  $\beta'$  (a lati rettilinei) topologicamente identificabile con  $\alpha'$ . Si può supporre per  $\beta'$  che tutti i vertici siano al finito e che al finito siano tutti i lati salvo  $j$  lati contenenti un punto improprio, se  $j$

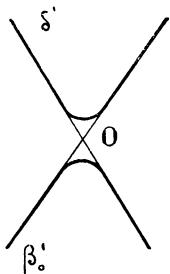


Fig. 3.

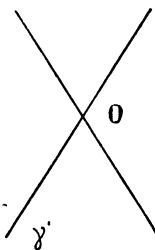


Fig. 4.

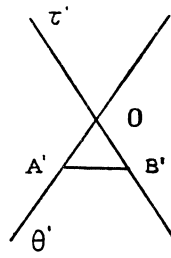


Fig. 5.

è il numero dei punti impropri di  $\alpha'$ . Si può anche supporre che il numero  $n$  dei lati ( $\geq j$  ed aumentabile a piacere) soddisfi alla

$$n \equiv j, \text{ mod } 2.$$

Si consideri la curva spezzata nelle  $n$  rette dei lati. Di essa può immaginarsi una « piccola variazione » topologica <sup>(11)</sup> in modo che la trasformata consti di due circuiti, uno aderente a  $\beta'$  (e sia  $\beta'_0$ ), l'altro aderente al poligono complementare (e sia  $\delta'$ ); si potrà supporre che  $\beta'_0$  e  $\delta'$  abbiano rispettivamente  $j$  ed  $n-j$  punti impropri.

Il procedimento di « piccola variazione » opera nei vertici di  $\beta'$ , ma conserva tutti gli altri nodi della curva spezzata.

In *uno* dei vertici (e sia  $O$ ) si rinunzi invece ad applicare il procedimento, così da sostituire nella trasformata (fig. 3 e 4) ai due circuiti  $\beta'_0$  e  $\delta'$  un solo circuito  $\gamma'$  con nodo in  $O$ .

Indi sui due rami di  $\gamma'$  in prossimità di  $O$  si assumano rispettivamente due punti  $A'$ ,  $B'$ , i quali divideranno  $\gamma'$  in due *segmenti*  $\theta'$  e  $\tau'$ ; ma ciò (fig. 5) facciasi in modo che, detto  $\sigma'$  il segmento rettilineo  $A'B'$  al finito, il circuito  $\sigma' + \theta'$  risulti prossimo all'antico circuito  $\beta'_0$ , di cui avrà la parità concorde con quella di  $j$ , mentre il circuito  $\sigma' + \tau'$  (con nodo in  $O$ ) risulterà pari, perchè è pari  $n-j$ .

<sup>(11)</sup> Per il concetto di « piccola variazione » topologica cfr. L. BRUSOTTI: a) *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica (3), 22, (1914), pag. 117-169]; b) *Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale* [Rend. R. Accademia dei Lincei (5), 30, (1921), pag. 375-379].

I nodi di  $\gamma'$  o sono formati da  $\theta'$  con se stesso (e provengono da altrettanti, prossimi, di  $\beta'_0$ , cioè di  $\beta'$ , cioè di  $\alpha'$ ), oppure sono formati da  $\tau'$  o con se stesso o con  $\theta'$  (ed è tra i primi certamente  $O$ ).

È lecito ormai interpretare  $\gamma' \ \sigma' \ \tau' \ \theta'$  nel senso di n.º 3 (cfr. n.º 5; oss. 1), anzi fissare la segnatura dei nodi formati da  $\theta'$  con se stesso in armonia a quella già nota dei nodi di  $\alpha'$ , indi attribuire ai nodi rimanenti (tutti giacenti su  $\tau'$ ) una segnatura tale che  $\tau'$  debba intepretarsi come proiezione di un *segmento* retrattile.

Allora  $\gamma'$ , con tali segnature, sarà pensato (n.º 5: oss. 2) come proiezione di un circuito  $\gamma$  identificabile con  $\alpha$  sotto l'aspetto della Topologia proiettiva.

9. - Si voglia ora determinare  $\gamma$  in modo che esso risulti *il circuito di una curva gobba (algebrica, reale) razionale*, o, come si dirà, offra un *modello razionale* di  $\alpha$ .

Si introduca perciò in  $\pi$  il multilatero connesso  $L_0^n$  (di genere virtuale zero) costituito dalle  $n$  rette dei lati di  $\beta'$ , rette da pensarsi connesse nei vertici di  $\beta'$ , escluso  $O$ ; e, se occorre, lo si completi mediante coppie di rette immaginario-conjugate, connettendo le rette di ciascuna coppia ad  $L_0^n$  nei loro punti d'intersezione con *una* delle rette di  $L_0^n$ . Si otterrà così un multilatero  $L_0^{n_1}$  (di genere virtuale zero), il cui ordine  $n_1$  sia soddisfacente alle:

$$(1) \quad n_1 \equiv n, \text{ mod } 2; \quad n_1 \geq n,$$

e del resto, per ora, qualunque.

Sarà lecito <sup>(12)</sup> considerare curve (piane) razionali  $\Gamma_0^{n_1}$ , reali, prossime ad  $L_0^{n_1}$ , per ciascuna delle quali i punti doppi reali siano  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  nodi a rami reali prossimi ai nodi di  $L_0^n$  ed  $\frac{1}{2}(n_1-n)$  punti isolati, prossimi alle intersezioni delle singole coppie di rette immaginario-conjugate. Il circuito di  $\Gamma_0^{n_1}$  si dedurrà mediante una « piccola variazione » topologica della parte reale di  $L_0^n$ , anzi <sup>(13)</sup> sarà ancor lecito in ciascuno dei punti di connessione scegliere ad arbitrio nell'alternativa fra i due procedimenti complementari e ciò qui si farà sempre in modo che il procedimento si identifichi topologicamente con quello che ha condotto alla costruzione di  $\gamma'$  (cfr. n.º 8). È dunque possibile *far coincidere  $\gamma'$  col circuito di una curva razionale  $\Gamma_0^{n_1}$* ; il che si supporrà fatto.

Se si riprende il riferimento cartesiano di n.º 4, ciò si può esprimere affermando che  $\gamma'$  ammette una rappresentazione parametrica

$$(2) \quad x = \frac{\varphi(t)}{\omega(t)}, \quad y = \frac{\psi(t)}{\omega(t)},$$

<sup>(12)</sup> F. SEVERI: *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*. [Rend. R. Accademia dei Lincei, (5), 25, (1916), pag. 459-471, 551-562]; cfr. pag. 556.

<sup>(13)</sup> L. BRUSOTTI <sup>(14)</sup> b).

essendo  $t$  un parametro reale e  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\omega(t)$  polinomî di grado  $n_1$  in  $t$ , a coefficienti reali. In armonia al fatto che  $\gamma'$  possiede precisamente  $n$  punti impropri, delle  $n_1$  radici di

$$\omega(t) = 0$$

precisamente  $n$  saranno reali.

Per dimostrare che  $\gamma$  si può far coincidere col circuito di una curva razionale  $C_0^{m_1}$ , basterà ormai dimostrare come, precisata opportunamente la scelta di  $n_1$ , sia possibile determinare un polinomio (di grado  $n_1$  ed a coefficienti reali)  $\chi(t)$  in tale maniera che le

$$(3) \quad x = \frac{\varphi(t)}{\omega(t)}, \quad y = \frac{\psi(t)}{\omega(t)}, \quad z = \frac{\chi(t)}{\omega(t)}$$

siano accettabili per la rappresentazione parametrica di  $\gamma$ , nel senso che  $\chi(t)$  rispetti le esigenze della segnatura già prefissata per  $\gamma'$ .

Per semplicità si convenga che in un nodo di  $\gamma'$ , dei due rami, quello che, secondo la segnatura è proiezione del ramo superiore (rispettivamente inferiore) sia senz'altro proiezione di un ramo i cui punti abbiano ordinata  $z$  positiva (rispettivamente negativa).

Ed allora, poichè su  $\gamma$  si distingueranno alternatamente (per tali rami) gruppi di rami consecutivi o tutti superiori o tutti inferiori, si potrà ancor più semplicemente supporre  $\gamma$  diviso in altrettanti *segmenti* alternatamente superiori ed inferiori rispetto a  $\pi$ , ciascuno contenente *uno* di detti gruppi. Tali segmenti, in numero pari, saranno determinati su  $\gamma$  dalla presenza degli  $n$  punti impropri e di  $n_0$  intersezioni con  $\pi$ , essendo:

$$(4) \quad n_0 \equiv n, \text{ mod } 2$$

ed inoltre:

$$n + n_0 \leq (n-1)(n-2),$$

(ove il secondo membro dà il numero totale dei rami nodali di  $\gamma'$ ).

Ciò posto, alle (1), nelle quali, per (4), è implicita anche la

$$(5) \quad n_1 \equiv n_0, \text{ mod } 2,$$

aggiungasi com'è lecito (ed ormai necessario) la

$$(6) \quad n_1 \geq n_0.$$

Indi (nei singoli intervalli implicitamente assegnati) si precisino gli  $n_0$  valori  $\lambda, \mu, \dots, \varrho$  del parametro  $t$  a cui corrispondano gli  $n_0$  punti di  $\gamma$  aventi ordinata  $z$  nulla; e pongasi

$$(7) \quad \chi(t) = (t-\lambda)(t-\mu) \dots (t-\varrho)f(t),$$

essendo  $f(t)$  un polinomio *definito*, di grado  $n_1 - n_0$  [cfr. le (5) (6)], avente segno uguale o contrario al coefficiente del termine di grado massimo in  $\omega(t)$ , secondo che, in relazione alle convenzioni fatte, a  $t = \infty$  debba corrispondere un punto di  $\gamma$  avente ordinata  $z$  positiva o negativa.

Colla posizione (7), le (3), che rappresentano il circuito di  $C_0^{n_1}$ , rappresentano anche un circuito  $\gamma$  accettabile quale modello di  $\alpha$ , onde, come volevasi,  $\alpha$  *ammette modelli razionali* <sup>(14)</sup>.

#### § 4. - Esistenza per un sistema $\Sigma$ (di $k$ circuiti) di modelli formati coi circuiti di $k$ curve razionali.

10. - Il risultato del precedente paragrafo si può estendere dimostrando che, *dato un sistema  $\Sigma$  di  $k$  circuiti, per esso esistono modelli costituiti dai circuiti di altrettante curve razionali.*

Poichè (n.º 9) la proprietà vale per  $k=1$ , basterà provare che, supposta valida per un sistema di  $k-1$  circuiti, essa vale anche per uno di  $k$ .

Da  $\Sigma$  si stacchi un circuito  $\alpha$  e sia  $\Sigma_0$  il sistema residuo; di  $\Sigma_0$ , com'è lecito, assumasi un modello formato coi circuiti di  $k-1$  curve razionali e, completatolo con un opportuno circuito, se ne tragga un modello di  $\Sigma$  (il che pure è lecito). Per il modello così costruito si manterranno le denominazioni  $\Sigma$ ,  $\Sigma_0$ ,  $\alpha$  e si useranno le analoghe  $\Sigma'$ ,  $\Sigma'_0$ ,  $\alpha'$  per la proiezione su  $\pi$ .

I circuiti di  $\Sigma'_0$  apparterranno rispettivamente a curve razionali di ordini  $\nu_i$  ( $i=2, 3, \dots, k$ ), ma queste potranno sempre sostituirsi con curve razionali  $\Gamma_0^{n_i}$  di ordini  $n_i$  sottoposti alle:

$$(8) \quad n_i \equiv \nu_i, \text{ mod } 2; \quad n_i \geq \nu_i \quad (i=2, 3, \dots, k)$$

e del resto, per ora, qualisivogliano. Ed invero, l'ordine di una delle curve si può sempre aumentare di due unità, introducendo la curva connessa (di genere virtuale zero) che se ne deduce coll'aggiunta di due rette immaginario-conjugate, connesse alla curva data in due punti immaginario-conjugati di questa (ma non

<sup>(14)</sup> Le (2) e le (3), attribuita a  $t$  variabilità complessa, rappresentano rispettivamente  $\Gamma_0^{n_1} C_0^{n_1}$ . Ciascuno dei punti isolati di  $\Gamma_0^{n_1}$  risponde ad una coppia di valori immaginario-conjugati per  $t$ . La  $C_0^{n_1}$ , per le posizioni fatte, non ha punti doppi a rami reali; ma per l'arbitrarietà di  $f(t)$ , si può supporre senz'altro che non abbia punti doppi (nemmeno isolati od immaginari), onde i punti isolati di  $\Gamma_0^{n_1}$  siano solo tracce di corde *ideali* proiettanti. Che  $C_0^{n_1}$  non abbia un punto isolato nel punto improprio delle normali a  $\pi$ , già risulta dall'avere  $C_0^{n_1}$  e  $\Gamma_0^{n_1}$  (curva obbiettiva e proiezione) lo stesso ordine  $n_1$ .

Il risultato di § 3, nel quale si inquadrano quelli particolari di W. FR. MEYER e di A. BRILL [cfr. (3)], potrebbe essere il punto di partenza per una classificazione dei circuiti intrecciati in sè (dotati di *Verknötung*) secondo l'ordine minimo dei loro modelli razionali.

tra loro nè, altrove, alla curva); indi <sup>(15)</sup> sostituendo la curva connessa con una irriducibile prossima. Però, anche occorrendo siffatte modificazioni, si conserverà la denominazione  $\Sigma'_0$ .

Dopo ciò, come al n.º 8, si inseriva in  $\alpha'$  il circuito poligonale  $\beta'$ , da esso e dal complementare si ricavano  $\beta'_0$  e  $\delta'$ , indi si fondano in  $\gamma'$ , diviso nei due segmenti  $\theta'$  e  $\tau'$ . La segnatura nei nodi di  $\Sigma'_0 + \theta'$  concordi con quella nei nodi corrispondenti di  $\Sigma'_0 + \alpha'$ ; la segnatura su  $\tau'$  sia compatibile coll'interpretazione di  $\tau'$  come proiezione di un segmento retrattile  $\tau$  (tenuto presente  $\Sigma'_0$ , e non solo  $\theta'$ , cioè nel senso generale di n.º 3).

Se  $\nu_1$  è il numero dei lati di  $\beta'$  (numero necessariamente di parità concorde con quella di  $\gamma'$ ) si può anche qui (cfr. n.º 9) realizzare  $\gamma'$  col circuito di una curva razionale  $\Gamma_0^{n_1}$ , d'ordine  $n_1$ , sottoposto alle

$$(9) \quad n_1 \equiv \nu_1, \text{ mod } 2; \quad n_1 \geq \nu_1$$

[analoghe alle (1) di n.º 9] e del resto, per ora, arbitrario.

Si ha quindi ormai in  $\pi$  un sistema di  $k$  circuiti appartenenti ad altrettante curve razionali  $\Gamma_0^{n_i}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) e quindi suscettibili di rappresentazioni

$$(10) \quad x = \frac{\varphi_i(t)}{\omega_i(t)}, \quad y = \frac{\psi_i(t)}{\omega_i(t)}, \quad (i=1, \dots, k)$$

analoghe alla (2) di n.º 9; in particolare in esse  $\varphi_i(t)$ ,  $\psi_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  sono polinomi di grado  $n_i$  in  $t$ .

A tale sistema è annessa la già descritta segnatura, che, per la retrattilità di  $\tau$ , permette di considerarlo come proiezione di un modello del dato sistema  $\Sigma$ . Ma si vuole che tale modello si componga con circuiti appartenenti ad altrettante curve razionali  $C_0^{n_i}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) d'ordini  $n_i$  e quindi suscettibili di rappresentazioni

$$(11) \quad x = \frac{\varphi_i(t)}{\omega_i(t)}, \quad y = \frac{\psi_i(t)}{\omega_i(t)}, \quad z = \frac{\chi_i(t)}{\omega_i(t)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

analoghe alle (3) di n.º 9; ove deve adattarsi allo scopo la scelta degli ordini  $n_i$  e la determinazione dei polinomi  $\chi_i(t)$  d'ordini  $n_i$ .

Ed allora anche qui si convenga che (per ogni punto doppio apparente a rami reali) rami superiori (rispettivamente inferiori) si pensino senz'altro superiori (rispettivamente inferiori) a  $\pi$ ; e che anzi, per ogni  $C_0^{n_i}$ , il circuito s'immagini diviso (col criterio di n.º 9) in segmenti alternatamente superiori ed inferiori rispetto a  $\pi$ , per opera dei punti impropri e delle  $n_{0i}$  intersezioni con  $\pi$ , essendo:

$$(12) \quad n_{0i} \equiv n_i, \text{ mod } 2 \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

---

<sup>(15)</sup> Cfr. F. SEVERI <sup>(12)</sup>.

Dopo ciò, alle (8) (9) si aggiungano le

$$(13) \quad n_i \geq n_{0i} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

e, precisati per ciascuna delle  $C_0^{n_i}$  gli  $n_{0i}$  valori  $\lambda_i, \mu_i, \dots, \varrho_i$  di  $t$  spettanti ai punti d'ordinata nulla, pongasi:

$$(14) \quad \chi_i(t) = (t - \lambda_i)(t - \mu_i) \dots (t - \varrho_i) f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

ove [cfr. (12), (13)] ogni volta sia  $f_i(t)$  un polinomio definito di ordine  $n_i - n_{0i}$ , il cui segno si fissi col criterio di n.º 9 [cfr. la (7)].

Colla posizione (14), le (11) rappresentano i circuiti di un modello di  $\Sigma$ , rispondente alla proposizione enunciata all'inizio del presente paragrafo <sup>(16)</sup>.

### § 5. - Modelli algebrici irriducibili di $\Sigma$ di genere minimo $p = k - 1$ .

11. - Sia  $\Sigma$  composto di  $k$  circuiti; se un suo modello è fornito dai  $k$  circuiti di una curva algebrica irriducibile di genere  $p$ , tale modello si dirà brevemente di genere  $p$ .

Per un classico teorema di A. HARNACK dev'essere <sup>(17)</sup>:

$$k \leq p + 1$$

ossia:

$$p \geq k - 1$$

Qui si vuol dimostrare che il limite inferiore  $k - 1$  è effettivamente il valor minimo per il genere  $p$  di un modello algebrico irriducibile di  $\Sigma$ .

Si riprenda intanto perciò il modello di  $\Sigma$  composto coi circuiti di  $k$  curve razionali (reali)

$$(15) \quad C_0^{n_1}, C_0^{n_2}, \dots, C_0^{n_k}$$

(cfr. n.º 10). Indi su  $C_0^{n_j}$  introducasi la coppia di punti immaginario-conjugati  $P_j \bar{P}_j$  e su  $C_0^{n_{j+1}}$  la coppia di punti immaginario-conjugati  $Q_j \bar{Q}_j$ , ove sia  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ .

Per l'arbitrarietà dei polinomî  $f_i(t)$  di n.º 10 e per quella delle coppie di punti ora introdotte, si potranno sempre supporre soddisfatte per le curve (15) e per le rette

$$(16) \quad r_j = P_j Q_j, \quad \bar{r}_j = \bar{P}_j \bar{Q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, k - 1)$$

le condizioni esposte nel primo lemma di n.º 6.

<sup>(16)</sup> Per ciascuna delle  $\Gamma_0^{n_i}, C_0^{n_i}$ , in relazione alle (10) (11) ove a  $t$  si attribuisca variabilità complessa, valgono le osservazioni esposte nella prima parte della nota <sup>(14)</sup>.

<sup>(17)</sup> A. HARNACK: *Ueber der Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Mathematische Annalen, 10 (1876), pag. 189-198].



Ed allora, per il lemma stesso, alla curva connessa costituita dalle (15) (16) saranno prossime curve irriducibili di genere  $k-1$ . Poichè la curva connessa è reale e la sua parte reale [composta coi circuiti delle (15)] fornisce un modello di  $\Sigma$ , fra le curve irriducibili prossime ve ne saranno delle reali e la parte reale di ciascuna di esse fornirà del pari un modello di  $\Sigma$ .

È così dimostrata per  $\Sigma$  l'effettiva esistenza di modelli algebrici irriducibili di genere  $k-1$  (genere minimo), come volevasi.

**§ 6. - Modelli algebrici di  $\Sigma$ , irriducibili e riducibili,  
comunque compatibili col teorema di Harnack.**

12. - In primo luogo, fissato l'intero

$$p \geq k-1,$$

e del resto qualunque, vogliasi dimostrare per  $\Sigma$  l'esistenza di modelli algebrici irriducibili di genere  $p$ .

Poichè (n.º 11) ciò vale per  $p=k-1$ , basterà provare che, dato di  $\Sigma$  un modello irriducibile di genere  $p$ , se ne può dedurre un altro pure irriducibile ma di genere  $p+1$ .

Sia  $C_p^n$  la curva che coi suoi circuiti fornisca il modello irriducibile di genere  $p$  e sia  $C_0^2$  una conica, reale, ma priva di punti reali, che si appoggi a  $C_p^n$  in due punti immaginario-conjugati e solo in essi. Alla curva connessa formata con  $C_p^n$  e  $C_0^2$ , per il secondo lemma di n.º 6, sono prossime curve irriducibili  $C_{p+1}^{n+2}$  di genere  $p+1$ ; anzi, poichè la curva connessa è reale e la sua parte reale (coincidente con quella di  $C_p^n$ ) fornisce un modello di  $\Sigma$ , così fra le  $C_{p+1}^{n+2}$  se ne hanno di reali e la parte reale di una qualunque di queste fornisce un modello di  $\Sigma$  (precisamente quello richiesto perchè irriducibile e di genere  $p+1$ ).

Dunque per i modelli irriducibili il problema del genere è esaurito, e si può passare allo studio di quelli riducibili.

Perciò, dato il sistema  $\Sigma$ , se ne distribuiscano *comunque* i  $k$  circuiti in  $s$  sistemi parziali

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s \quad (1 \leq s \leq k)$$

costituiti rispettivamente da

$$k_1, k_2, \dots, k_s \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_s = k, \quad k_i > 0)$$

circuiti. Indi *comunque* prefissati gli interi:

$$p_1, p_2, \dots, p_s,$$

purchè soddisfacenti alle:

$$(17) \quad p_i \geq k_i - 1, \quad (i=1, 2, \dots, s)$$

si voglia dimostrare che  $\Sigma$  possiede modelli algebrici nei quali ciascuno dei

sistemi parziali,  $\Sigma_i$ , è costituito dalla parte reale di una curva algebrica (reale) irriducibile, di genere  $p_i$  <sup>(48)</sup>.

Ed inverso si parta dal modello di  $\Sigma$  formato (§ 4) coi circuiti di  $k$  curve razionali; ciascuno dei sistemi  $\Sigma_i$  vi comparirà con un modello subordinato composto coi circuiti di  $k_i$  curve razionali. A tale modello subordinato si applichi il procedimento di n.º 11 e, se occorre ( $p_i > k_i - 1$ ), anche quello descritto all'inizio del presente numero, ripetendolo fin che basti. Si otterrà così un modello di  $\Sigma$  del tipo richiesto.

Poichè, per il teorema di HARNACK, le (17) sono condizioni necessarie, la questione è ormai esaurita anche per i modelli riducibili. E si può concludere:

*Dato un sistema spaziale  $\Sigma$  di  $k$  circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi), nello studio dei modelli algebrici di  $\Sigma$ , i problemi concernenti il genere ammettono tutte le soluzioni compatibili col teorema di Harnack (e necessariamente non altre).*

---

<sup>(48)</sup> Per  $s = 1$  il modello di  $\Sigma$  è irriducibile e si ricade in un risultato precedente. Per  $s > 1$  il modello è riducibile; se poi si assume  $s = k$  (onde  $k_i = 1$ ) si cade in un risultato che comprende quello di § 4.