

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

TULLIO LEVI-CIVITA

Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 1,
n° 1-2 (1932), p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_1_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ATTRAZIONE NEWTONIANA DEI TUBI SOTTILI E VORTICI FILIFORMI

di TULLIO LEVI-CIVITA (Roma).

In questa memoria ho redatto tre delle quattro conferenze che tenni nel Marzo 1931 all'Università di Parigi, per benevola iniziativa del chiarissimo Prof. H. VILLAT, direttore dell'Institut pour la mécanique des fluides. Si tratta in sostanza di risultati miei ⁽¹⁾ e del DA RIOS ⁽²⁾, già pubblicati da tempo, i quali concernono il potenziale newtoniano e l'attrazione di tubi molto sottili, nonchè l'applicazione che se ne può fare alle vicende (cambiamenti di posto e di forma) di un filetto vorticoso di forma qualunque in seno ad un liquido indefinito, animato (esternamente al filetto) da moto irrotazionale. Tale applicazione era stata, per così dire, anticipata dal DA RIOS, nella sua tesi di laurea del 1906, generalizzando un procedimento non rigoroso, di cui si erano valse con intuito sicuro HELMHOLTZ e LORD KELVIN per i filetti rettilinei o circolari: sole forme studiate prima del DA RIOS. Egli stesso perfezionò poi la sua ricerca, valendosi delle espressioni asintotiche, da me conseguite nel frattempo per l'attrazione newtoniana di un tubo sottile, nei punti interni.

Nel preparare l'esposizione orale di tale materia mi venne fatto di darle un assetto più sistematico, semplificando qualche dimostrazione, completando da un lato e dall'altro rendendo più agili e perspicui i singoli passaggi. Ho poi impostato anche lo studio delle piccole vibrazioni di un filetto vorticoso attorno ad una configurazione stazionaria, sviluppando in modo esauriente quanto attiene alla forma circolare, con che se ne accerta la stabilità e si assegnano tutti i possibili periodi.

Con tali migliorie ed aggiunte giustifico la presente pubblicazione. Essa è divisa in sei capitoli, sul cui contenuto dà sufficiente ragguaglio l'indice particolareggiato che segue.

⁽¹⁾ Cfr. principalmente *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, T. XXXIII, 1912, pp. 354-374. Sono ivi citate precedenti note dei Rend. della R. Acc. dei Lincei, dove la questione era stata analizzata in modo diverso, un po' più penetrante, ma certo molto più faticoso.

⁽²⁾ *Sul moto di un filetto vorticoso di forma qualunque*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, T. XXII, 1906, pp. 117-135 e T. XXIX, 1910, pp. 354-368.

INDICE-SOMMARIO

CAP. I. - *Richiami concernenti l'espressione asintotica dei potenziali di linea.*

1. Potenziale newtoniano di un segmento omogeneo. Sua espressione asintotica in prossimità di un estremo.
2. Disuguaglianza ausiliaria.
3. Espressione asintotica di un potenziale di linea rispetto ad un suo estremo O .
4. Espressione asintotica rispetto ad un punto interno.

CAP. II. - *Attrazione newtoniana di un tubo sottile in punti interni o molto prossimi al tubo.*

1. Decomposizione longitudinale. Espressione asintotica del potenziale newtoniano per un punto interno.
2. Autopotenziale Ω . Decomposizione trasversale del tubo. Espressione asintotica di Ω .
3. Attrazione.
4. Gradiente asintotico medio.
5. Gradiente locale.
6. Costanza asintotica (rispetto a Q') di $\lambda_{Q'}/\tau$.

CAP. III. - *Potenziale vettore di un tubo sottile e suo rotore.*

1. Distribuzione vettoriale conforme all'andamento longitudinale di un tubo. Componenti del potenziale vettore $\mathbf{A}$. Loro espressioni asintotiche.
2. Osservazione di calcolo vettoriale. Espressione asintotica di $\text{rot } \mathbf{A}$.

CAP. IV. - *Liquido perfetto indefinitamente esteso con un solo filetto vorticoso.*

1. Richiami concernenti le relazioni fra campo di velocità e campo vorticoso.
2. Caso di un solo filetto vorticoso. Espressione asintotica della velocità indotta nel filetto stesso.
3. Atto di moto di una generica sezione τ .
4. Considerazioni infinitesimali circa la migrazione del filetto in seno al liquido.
5. Inestendibilità del filetto (cioè della direttrice).
6. Sistema normale da cui dipende il problema matematico. Applicazione del teorema di unicità.

CAP. V. - *Ricorso alla teoria del triedro mobile. Equazioni intrinseche.*

1. Triedro principale T di una curva e sua rotazione lungo la curva stessa.
2. Il detto triedro quale funzione di $s_1 = \lambda t$.
3. Dipendenza simultanea di T da s , s_1 e condizioni di integrabilità.
4. Equazioni intrinseche.

CAP. VI. - *Filetti vorticosi di forma invariabile. Piccole oscillazioni.*

1. Filetti rigidi. Equazioni intrinseche. Risolvente del 3° ordine.
2. Filetti rigidi di spessore uniforme. Direttrici elicoidali e circolari. Integrale generale.
3. Direttrici piane. Caratterizzazione intrinseca di un caso particolare.
4. Studio della forma. Valori numerici dei parametri.
5. Modalità con cui si spostano in seno al liquido i filetti vorticosi di forma invariabile.
6. Piccole oscillazioni intorno alle forme rigide. Caso particolare delle circonferenze.
Periodi di vibrazione. Possibili perturbazioni ondose e corrispondenti velocità di propagazione.

CAPITOLO I.

**Richiami concernenti l'espressione asintotica
dei potenziali di linea.**

1. - Potenziale newtoniano di un segmento omogeneo. Sua espressione asintotica in prossimità di un estremo.

Sia OH un segmento di lunghezza l e di densità (lineare) costante ν_0 . Sia Q , di ascissa x (rispetto all'origine O), un punto generico del segmento. Il potenziale newtoniano U dell'attrazione esercitata da OH sopra un punto qualsivoglia M , esterno al segmento, è, per definizione,

$$(1) \quad U = \nu_0 \int_0^l \frac{dx}{r_1},$$

r_1 designando la distanza $\overline{QM}$.

Introduciamo ancora la distanza ε di M da O e l'angolo $\widehat{MOH} = \psi_1$ che il raggio vettore OM forma col segmento OH .

Avremo ovviamente

$$(2) \quad r_1^2 = x^2 + \varepsilon^2 - 2x\varepsilon \cos \psi_1 = (x - \varepsilon \cos \psi_1)^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \psi_1,$$

quindi, eseguendo nella (1) l'integrazione rispetto ad x , e aggiungendo e togliendo la costante $\nu_0 \log l$,

$$U = \nu_0 [\log (x - \varepsilon \cos \psi_1 + r_1)]_{x=0}^{x=l} = -\nu_0 \log \frac{\varepsilon}{l} (1 - \cos \psi_1) + F,$$

dove per brevità abbiamo posto

$$F = \nu_0 \log \frac{1}{l} (l - \varepsilon \cos \psi_1 + \sqrt{l^2 + \varepsilon^2 - 2l\varepsilon \cos \psi_1}),$$

del quale F ci basta ritenere l'ovvia circostanza che (considerato come funzione di M) *resta finito e continuo, anche se il punto potenziato M , esterno per ipotesi al segmento potenziante OH , si avvicina indefinitamente ad O .*

Specifichiamo tale avvicinamento, supponendo che M tenda ad O in modo qualunque, ma *non longitudinale* rispetto al segmento potenziante OH , con la quale limitazione intendiamo che l'inclinazione di OM sulla retta potenziante (pur potendo variare, al tendere di M ad O) non scenda mai al disotto di una certa inclinazione minima ψ_0 (fissa, ma comunque piccola). Ciò è quanto dire che l'angolo $\psi_1 = \widehat{MOH}$ deve restare compreso fra ψ_0 e $\pi - \psi_0$. Per conseguenza

$$1 - \cos \psi_1 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi_1$$

non va mai al disotto di $2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi_0$. Poichè d'altra parte esso non supera 2, il

suo logaritmo (naturale) rimane certo finito. Si può quindi scrivere

$$(3) \quad U = v_0 \log \frac{l}{\varepsilon} + F_1,$$

dove

$$F_1 = F - v_0 \log 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi_1$$

si conserva, al pari di F , finita e continua, anche al tendere, non longitudinalmente, cioè sotto la limitazione testè indicata, di M ad O .

Il primo addendo $v_0 \log \frac{l}{\varepsilon}$, che cresce indefinitamente quando ε converge a zero, costituisce l'espressione asintotica del potenziale U , allorchè M tende ad O in modo qualunque, ma non longitudinale.

La ragione dell'appellativo *asintotica* è manifesta. Basta ricavare dalla (3)

$$\frac{U}{v_0 \log \frac{l}{\varepsilon}} = 1 + \frac{F_1}{v_0 \log \frac{l}{\varepsilon}},$$

tenendo presente che F_1 resta finita, per desumerne che il rapporto $U/v_0 \log \frac{l}{\varepsilon}$ converge all'unità. Quindi, sostituendo $v_0 \log \frac{l}{\varepsilon}$ ad U , si commette un errore relativo tanto più piccolo, quanto più M è prossimo ad O .

2. - Disuguaglianza ausiliaria.

Premettiamo un'osservazione, di cui ci gioveremo tra un momento.

Consideriamo il trinomio

$$(4) \quad p^2 = 1 + \xi^2 \pm 2\xi \cos \varphi,$$

dove l'angolo φ si suppone compreso fra due limiti positivi φ_0 e $\pi - \varphi_0$, per modo che

$$(5) \quad \sin \varphi > \sin \varphi_0 > 0,$$

e si ritiene p positivo, il che è sempre conciliabile con (4).

Cerchiamo il minimo di p , al variare di ξ fra $-\infty$ e $+\infty$. Sarà comodo ricorrere alla seguente rappresentazione geometrica. Sia (fig. 1) OJ un segmento unitario, d una retta indefinita, spiccata da O , che forma con OJ gli angoli (supplementari) φ e $\pi - \varphi$; infine E un punto qualsivoglia di d , distante ξ da O . Il quadrato della distanza $\overline{JE} = p$ è dato dalla (4), valendo il segno $-$ quando E sta (come in figura) dalla banda dell'angolo acuto, il segno $+$ nel caso opposto. Comunque, la minima distanza $\overline{JE}$, al variare di E su d , e quindi di ξ fra $-\infty$ e $+\infty$, è fornita dalla perpendico-

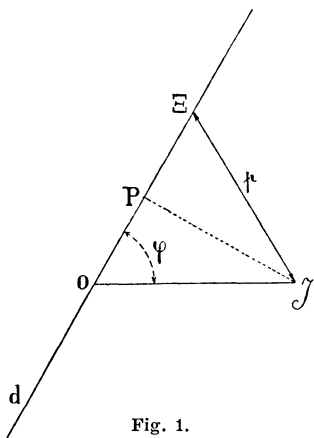


Fig. 1.

riare di E su d , e quindi di ξ fra $-\infty$ e $+\infty$, è fornita dalla perpendico-

lare JP abbassata da J su d , cioè da $\sin \varphi$. Siccome si suppone $\sin \varphi > \sin \varphi_0$, si può ritenere

$$(6) \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{\sin \varphi_0}.$$

3. - Espressione asintotica di un potenziale di linea rispetto ad un suo estremo O .

Sia C un arco di curva che supporremo dotata di tangente, variabile con continuità, nonchè di curvatura finita, e sede di una massa potenziente, distribuita con densità (lineare) ν . Per semplificare quanto possibile le nostre considerazioni, riterremo ν , non solo continua, ma anche derivabile, avvertendo del resto che questa ed altre premesse potrebbero essere meno restrittive.

Il potenziale newtoniano V della distribuzione suddetta in un punto esterno M sarà

$$(7) \quad V = \int_C \frac{\nu ds}{r},$$

dove ds è l'elemento d'arco della C , circostante al generico punto potenziente P ed

$$r = \overline{PM}.$$

Siano ancora (fig. 2) O un estremo di C , Ox la tangente in O , rivolta dalla banda di C , Q la proiezione di P su Ox ,

$$\varphi = \widehat{MOP}, \quad \psi = \widehat{MOx}.$$

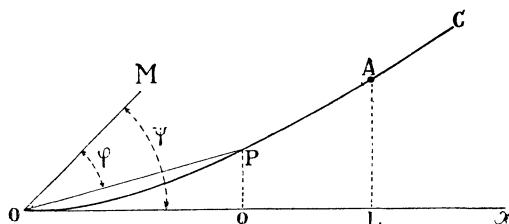


Fig. 2.

Anche qui dobbiamo cercare una espressione asintotica di V , quando M converge ad O non *longitudinalmente*, con che vogliamo dire che l'angolo $\psi = \widehat{MOx}$ verifica una duplice disuguaglianza del tipo

$$\psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0,$$

essendo ψ_0 acuto e fisso, o, più comprensivamente,

$$(8) \quad \sin \psi \geq \sin \psi_0;$$

o anche che OM resta fuori del cono rotondo I , avente per asse Ox e per generatrici le rette (indefinite) inclinate di ψ_0 su Ox .

Per l'ipotesi che la tangente a C vari con continuità, si può scegliere un punto A della curva abbastanza vicino ad O , perchè, in tutto l'arco $C_1 = \widehat{OA}$, sia ogni tangente (orientata verso A) che ogni corda OP formi con Ox angoli non superiori ad un limite ψ_1 che si può prefissare comunque piccolo.

Scegliamo $\psi_1 < \psi_0$, e poniamo

$$\varphi_0 = \psi_0 - \psi_1.$$

Tutte le corde OP di C_1 stanno così entro Γ , anzi entro un più sottile cono coassiale di apertura ψ_1 . Perciò OM forma con una qualsiasi corda OP un angolo minimo non inferiore a $\psi_0 - \psi_1 = \varphi_0$. Potremo quindi ritenere, sull'arco $C_1 = \widehat{OA}$,

$$(9) \quad \sin \varphi > \sin \varphi_0,$$

nonchè, in base alla (8) e all'aver assunto φ_0 minore di ψ_0 ,

$$(8') \quad \sin \psi > \sin \varphi_0.$$

Ciò premesso, immaginiamo l'arco potenziante C scisso nella parte C_1 prossima ad O , e nella porzione complementare C^* . Siano

$$(10) \quad V_1 = \int_{C_1} \frac{v ds}{r}$$

e V^* i rispettivi potenziali. Sarà, per la (7),

$$(7') \quad V = V_1 + V^*,$$

V^* restando finito e continuo quando si faccia tendere M ad O . Perciò la ricerca dell'espressione asintotica di V è ricondotta a quella di V_1 .

Sia $\varrho = \overline{OP}$ e, come già al n.º 1, $r_1 = \overline{QM}$, $\varepsilon = \overline{OM}$, $x = \overline{OQ}$. Avremo

$$(11) \quad r^2 = \varrho^2 + \varepsilon^2 - 2\varrho\varepsilon \cos \varphi,$$

seguitando a valere la

$$(2) \quad r_1^2 = x^2 + \varepsilon^2 - 2x\varepsilon \cos \psi.$$

Ove si designi con $\alpha = \frac{dx}{ds}$ il coseno dell'angolo che la tangente a C_1 in P forma con Ox , e con l la lunghezza della proiezione OL di $\widehat{OA}$ sopra Ox , la (10), assumendovi l'ascissa x come variabile di integrazione, diviene

$$(10') \quad V_1 = \int_0^l \frac{v}{\alpha} \frac{dx}{r}.$$

Ci proponiamo di far vedere che l'espressione asintotica di V_1 non differisce da quella trovata per U al n.º 1, le quante volte si intenda ora per v_0 il valore di v in O .

Ove s designi l'arco di C_1 contato a partire da O , la funzione

$$\left(\frac{v}{\alpha} - v_0 \right) / s$$

dell'argomento s risulta, in base alle ipotesi specificate in principio di questo numero, finita e continua non solo per $s > 0$, ma anche per $s \rightarrow 0$. Infatti, in corrispondenza ad $s = 0$, per essere $\alpha = 1$, essa si presenterebbe sotto forma indeterminata, ma, sempre in virtù delle nostre premesse, è applicabile la regola del-

l'Hôpital, e così si riconosce che la funzione resta continua ed ha, per $s=0$, il valore

$$\left[\frac{d\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)}{ds} \right]_{s=0} = \left[\frac{1}{\alpha} \frac{d\nu}{ds} - \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{ds} \right]_{s=0} = \left[\frac{d\nu}{ds} \right]_{s=0} - \nu_0 \left[\frac{d\alpha}{ds} \right]_{s=0}.$$

A noi basta la circostanza che $\left(\frac{\nu}{\alpha} - \nu_0\right)/s$ è funzione finita e continua di s in tutto l'intervallo $0 \leq s \leq l$. Per fare apparire tale funzione, riprendiamo la espressione (1) di U e scriviamo la (10') sotto la forma

$$(12) \quad V_1 - U = \int_0^l \frac{1}{s} \left(\frac{\nu}{\alpha} - \nu_0 \right) \cdot \frac{s}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{r} dx + \nu_0 \int_0^l \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) dx.$$

È facile verificare che, in entrambi gli integrali, le funzioni sotto il segno dipendono da s in modo finito e continuo, entro tutto l'intervallo $0 \leq s \leq l$, anche se il punto potenziato M tende (non longitudinalmente) ad O .

Occupiamoci intanto del primo integrando. Esso consta di tre fattori. Del primo, che è funzione del solo argomento s , abbiamo accertato or ora che rimane finito e continuo anche per $s=0$. Lo stesso vale per il rapporto $\frac{s}{\varrho}$, fra un arco s di C_1 e la sua corda $\overline{OP}$, il quale tende ad 1 per $s \rightarrow 0$. Quanto a $\frac{\varrho}{r}$, che dipende da s e da M , basta porre $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \xi$, per poter scrivere, in base alla (11),

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{|1 + \xi^2 - 2\xi \cos \varphi|^{1/2}} = \frac{1}{p}.$$

Con ciò il lemma del numero precedente [diseguaglianza (6)] e la (9) ci assicurano che il rapporto $\frac{\varrho}{r}$, funzione finita e continua di s nell'intervallo $0 \leq s \leq l$, per ogni M esterno, rimane finito, e più precisamente $< \frac{1}{\sin \varphi_0}$, anche quando M tende (non longitudinalmente) ad O . Dunque il primo integrale rimane finito.

Per riconoscere che lo stesso segue del secondo, basterà osservare che

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{r_1 - r}{r_1 r},$$

ricorrendo in pari tempo al triangolo OPQ della fig. 2. Il valore assoluto della differenza $r_1 - r$ dei due lati $\overline{OQ}$ e $\overline{OP}$ di tale triangolo non può superare il terzo lato $\overline{PQ}$, sicchè

$$\left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right| \leq \frac{\overline{PQ}}{rr_1}.$$

Ma $\overline{PQ}$, distanza di un punto P dell'arco $\widehat{OA}$ dalla tangente in O , è infinitesimo di *secondo* ordine rispetto all'arco $s = \widehat{OP}$, o, ciò che è lo stesso, rispetto alla corda $\varrho = \overline{OP}$, nonchè all'ascissa tangenziale $x = \overline{OQ}$. Ne viene che il rapporto

$$\frac{\overline{PQ}}{\varrho x}$$

si può considerare come funzione del solo argomento s , finita e continua in tutto l'intervallo $0 \leq s \leq l$, compreso l'estremo inferiore $s=0$. Avendosi poi

$$\left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right| \leq \frac{\overline{PQ}}{rr_1} = \frac{\overline{PQ}}{\varrho x} \frac{\varrho}{r} \frac{x}{r_1},$$

basta ricordare la limitazione

$$\frac{\varrho}{r} < \frac{1}{\sin \varphi_0},$$

trovata pocanzi per il rapporto $\frac{\varrho}{r}$, e notare che, nello stesso modo, attesa la (2) e la (8'), si ricava altresì

$$\frac{x}{r_1} < \frac{1}{\sin \varphi_0},$$

per inferirne che la differenza $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}$, finita e continua rispetto ad s in tutto $0 \leq s \leq l$, per ogni M esterno a C_1 , rimane finita anche se $M \rightarrow O$, non longitudinalmente.

Perciò il secondo membro della (12) rimane finito, con che la espressione asintotica di V_1 si identifica con quella di U , ed è quindi (n. 1) $\nu_0 \log \frac{l}{\varepsilon}$.

Badando alla (7') si conclude: *Come espressione asintotica $V^{(a)}$ del potenziale V in un estremo O dell'arco potenziante* (in quanto M vi tenda non longitudinalmente) *si può assumere*

$$(13) \quad V^{(a)} = \nu_0 \log \frac{l}{\varepsilon},$$

essendo $\varepsilon = \overline{OM}$, ν_0 il valore della densità lineare in O ed l una lunghezza costante che, per quanto precede, è vincolata soltanto ad essere abbastanza piccola in dipendenza dall'andamento locale della linea C in O . Il carattere asintotico della (13) si esplica al convergere di ε verso zero; praticamente si potrà sostituire $V^{(a)}$ a V ogniqualevolta sia abbastanza piccolo il rapporto $\frac{\varepsilon}{l}$.

4. - Espressione asintotica rispetto ad un punto interno.

Se O è un punto (ordinario od anche angoloso) interno ad un arco potenziante C , penseremo C suddiviso in tre parti: due, convenientemente circonscritte, C_1 e C_2 , aventi un estremo in O e da bande opposte rispetto a questo punto, e la parte residua C^* .

Il potenziale della C^* (la quale sta tutta a distanza finita da O) resta incondizionatamente finito, anche al convergere di M ad O ; i potenziali provenienti da C_1 e da C_2 hanno entrambi per espressione asintotica $\nu_0 \log \frac{1}{\varepsilon}$ (ammessa la continuità di ν sia a destra che a sinistra di O).

Ne consegue che *il potenziale V di una curva C ha, rispetto ad un generico suo punto interno O* (eventualmente anche angoloso, ma, comunque, con determinazione unica ν_0 della densità), *l'espressione asintotica* (doppia della (13) che si riferisce ad un estremo)

$$(14) \quad V^{(a)} = 2\nu_0 \log \frac{l}{\varepsilon}.$$

CAPITOLO II.

**Attrazione newtoniana di un tubo sottile in punti interni
o molto prossimi al tubo.**

1. - Decomposizione longitudinale. Espressione asintotica del potenziale newtoniano per un punto interno.

Sia (fig. 3) $\mathcal{T}$ un tubo (o pezzo di tubo) occupato da materia distribuita con densità (cubica) ϱ ; C una qualsiasi linea interna che ne segua l'andamento generale e che noi chiameremo *direttrice*.

Ci converrà dapprima ricorrere ad una suddivisione *longitudinale* del campo $\mathcal{T}$, ottenuta come segue: Sia P un punto della direttrice C , comunque prefissato, ma non coincidente (se la C è aperta) con uno degli estremi. Indichiamo con τ la sezione del tubo, praticata col piano normale a C in P ; con Q un altro punto qualsivoglia di τ ; e con $d\tau_Q$ un elemento della sezione ad esso circostante.

Da ogni Q si può (evidentemente in infiniti modi) far partire una linea χ , interna al tubo, coincidente in particolare con C quando il punto Q si identifica con P , e avente in generale andamento analogo alla C , in modo da esaurire l'intero tubo, in modo cioè che per ogni punto X interno ad esso passi una e una sola di queste χ .

Immaginiamo ancora di introdurre un riferimento cartesiano $\Omega\xi\eta\zeta$ avente per piano $\zeta=0$ quello della sezione piana τ . Siano $\xi, \eta, \zeta=0$ le coordinate del punto generico Q della τ ; ed s l'arco della χ , passante per Q , contato, a partire da Q , positivamente nello stesso senso scelto per la direttrice C .

Manifestamente, un punto qualunque X interno al tubo rimane individuato dalle coordinate ξ, η della intersezione Q , con τ , della χ , che passa per X e dalla sua ascissa curvilinea s sulla stessa χ . Un elemento di volume $d\mathcal{T}$ ad esso circostante avrà l'espressione

$$(1) \quad d\mathcal{T} = D d\xi d\eta ds = D d\tau_Q ds,$$

essendo D il determinante funzionale

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi & \eta & s \end{pmatrix},$$

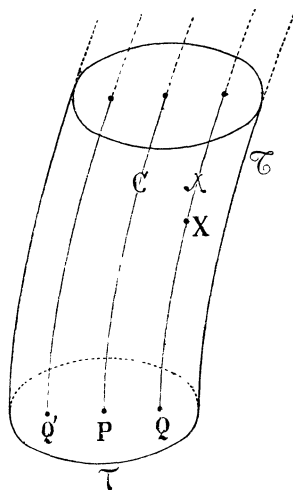


Fig. 3.

che non occorre esplicitare. A noi basterà ritenere che D è funzione finita e continua in tutto il tubo, la quale si riduce all'unità nel punto P della sezione τ , in cui C è ortogonale a τ e quindi $\frac{\partial \zeta}{\partial s} = 1$.

Tutto ciò premesso, consideriamo, per un qualsivoglia punto potenziato Q' , il potenziale newtoniano $U_{Q'}$ del tubo $\mathfrak{T}$ di densità ϱ . Rappresentando con X il generico punto potenziante e con r la distanza $\overline{XQ'}$, sarà per definizione

$$(2) \quad U_{Q'} = \int_{\mathfrak{T}} \frac{\varrho}{r} d\mathfrak{T},$$

e gioverà procedere all'integrazione mediante scissione del campo $\mathfrak{T}$ in filetti elementari: ognuno di questi si penserà costituito dalle linee χ spiccate dai singoli punti di un elemento $d\tau_Q$ della sezione τ . Poi si sommeranno i contributi dei vari filetti.

Attesa la (1), si potrà scrivere in conformità

$$(2') \quad U_{Q'} = \int_{\tau} d\tau_Q \int_{\chi} \frac{D\varrho}{r} ds.$$

L'integrale interno, che designeremo brevemente con

$$V_{Q'} = \int_{\chi} \frac{D\varrho}{r} ds$$

si presenta come il potenziale newtoniano della linea χ , su cui si trovi distribuita materia potenziante di densità lineare $\nu = D\varrho$. Fisseremo l'attenzione sui punti potenziati Q' appartenenti a τ , supponendo in particolare che si tratti di un tubo *sottile*, tale cioè che sia piccola (nel senso che ora specificheremo) la massima dimensione ε della sezione τ , e con essa ogni distanza $\overline{QQ'} \leq \varepsilon$.

Ricordiamo ora dal capitolo precedente che quella tale lunghezza costante l , la quale interviene nella espressione asintotica del potenziale di una linea, è vincolata soltanto ad essere abbastanza piccola in relazione all'andamento locale, cioè in sostanza al raggio di curvatura della linea stessa nel punto di avvicinamento asintotico. Scelta l in modo che convenga alla direttrice C , si può tranquillamente ammettere, attesa la definizione delle χ , che la stessa l serva altresì per tutte le χ , rispetto alle loro intersezioni Q con τ .

Con tale intesa circa la costante (di omogeneità) l , sappiamo che si può assumere, e noi riterremo assunto, un ε abbastanza piccolo, perchè sia trascurabile l'errore che si commette sostituendo a ciascun $V_{Q'}$ la sua espressione asintotica

$$V_{Q'}^{(a)} = 2D_Q\varrho_Q \log \frac{l}{\overline{QQ'}},$$

dove D_Q , ϱ_Q , ecc. rappresentano manifestamente i valori in Q di funzioni del punto X del tubo.

Si trae quindi dalla (2'), come espressione asintotica di $U_{Q'}$,

$$(3) \quad U_{Q'}^{(a)} = 2 \int_{\tau} D_Q \varrho_Q \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q.$$

Ora D_Q è funzione continua dei punti Q di τ , e dotata di derivate pure continue, rispetto alle coordinate cartesiane ξ, η di Q . Nel punto P della C , dal quale appunto si condusse la sezione normale τ , si ha, come osservammo già, $D=1$. Perciò si può ritenere, attesa la derivabilità di D e di ϱ ,

$$(4) \quad D_Q \varrho_Q = \varrho_P + \overline{PQ} f(P, Q),$$

dove la funzione f resta finita comunque vari Q entro τ .

D'altra parte, se è

$$(5) \quad \varrho_0 = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \varrho_Q d\tau_Q$$

il valore medio della densità nella sezione considerata, valore che è assunto dalla funzione continua ϱ_Q in un qualche punto P_0 della sezione, si ha, con sviluppo analogo a quello testè usufruito per ϱD ,

$$(6) \quad \varrho_P = \varrho_0 + \overline{P_0P} f_1(P, P_0),$$

dove f_1 è una quantità finita, che non dipende da Q .

Introduciamo una costante positiva H non inferiore ad $|f_1|$, nè al massimo di $|f|$ al variare di Q entro ε .

Si noti che una tale H può ritenersi indipendente dalla massima dimensione ε di τ , purchè soltanto ε sia abbastanza piccolo. Infatti f ed f_1 rimangono caratterizzate dalla natura delle funzioni D e ϱ in un certo campo e da una terna di punti P, Q, P_0 del campo, natura, campo e terna che possono pensarsi assegnati (quest'ultima in tutti i modi possibili) indipendentemente dallo spessore del tubo, e quindi da ε . In relazione a un dato campo, si può ricavare una determinazione per la costante positiva H , la quale vale poi per ogni ε abbastanza piccolo.

Ciò posto, dalle (4) e (6) si ha ovviamente la disuguaglianza

$$|D_Q \varrho_Q - \varrho_0| \leq 2H\varepsilon.$$

Se quindi si pone

$$R(Q', P_0) = 2 \int_{\tau} (D_Q \varrho_Q - \varrho_0) \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q,$$

e si scrive la (2') sotto la forma

$$(2'') \quad U_{Q'} = 2\varrho_0 \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q + R(Q', P_0),$$

si ha manifestamente

$$(7) \quad |R(Q', P_0)| \leq 2H\varepsilon \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q.$$

L'importante si è che, nella (2''), il secondo addendo R si può trascurare di fronte al primo. Infatti, per la (7), il rapporto non può superare, in valore assoluto,

$$\varepsilon \frac{H}{\varrho_0},$$

che è, come si vede, infinitesimo assieme alla massima dimensione trasversale del tubo.

È così giustificato di adottare

$$(8) \quad U_{Q'}^{(a)} = 2\varrho_0 \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q$$

quale espressione asintotica del potenziale newtoniano di un tubo sottile $\mathfrak{F}$, valida in ogni punto potenziato Q' interno al tubo (o anche sufficientemente vicino al tubo stesso): τ rappresenta la sezione del tubo, normale alla direttrice C , passante per Q' (avendo chiamato P l'intersezione di τ con C), e

$$(9) \quad \varrho_0 = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \varrho_Q d\tau_Q$$

il valore medio della densità.

2. - Autopotenziale Ω . Decomposizione trasversale del tubo. Espressione asintotica di Ω .

È ben noto (e del resto immediatamente verificabile, passando al limite dal caso di un numero discreto di masse potenzianti) che, se $\mathfrak{F}$ è un campo potenziante di densità ϱ , $U_{Q'}$ il suo potenziale in un generico punto interno Q' , la quantità

$$(10) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{F}} \varrho_{Q'} U_{Q'} d\mathfrak{F}_{Q'}$$

(costante che dipende funzionalmente dal campo $\mathfrak{F}$) si chiama *autopotenziale*, e rappresenta, purchè la si prenda col segno $-$, l'energia di cui si trova privato $\mathfrak{F}$ per effetto della mutua attrazione delle particelle, ossia il lavoro complessivo che bisognerebbe *spendere* per sottrarre le particelle stesse alla propria gravitazione (cioè per portarle tutte all' ∞).

Vogliamo procurarci una espressione asintotica $\Omega^{(a)}$ di Ω , valida per tubi molto sottili, nel senso che la differenza $\Omega - \Omega^{(a)}$ riesca infinitesima rispetto alla massima dimensione trasversale ε del tubo. Naturalmente in tale ricerca si trarrà essenziale partito dall'espressione asintotica testè trovata per la funzione integranda $U_{Q'}$. Giova però procedere all'integrazione, immaginando decomposto il campo $\mathfrak{F}$ in fette, anzichè in filetti. Più precisamente, fissato un punto generico P della direttrice C , e la sezione τ del tubo, normale a C in P , si considererà la fetta elementare φ di volume τds , compresa fra τ e l'analogha sezione normale a C nel punto che dista ds da P .

Il contributo recato ad Ω da una tale fetta φ sarà manifestamente

$$ds \int_{\tau} \varrho_{Q'} U_{Q'} d\tau_{Q'},$$

dove l'integrazione va eseguita rispetto ai punti Q' di τ .

Con ciò l'espressione (10) di Ω può essere scritta

$$(10') \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_C ds \int_{\tau} \varrho_{Q'} U_{Q'} d\tau_{Q'}.$$

Se ne otterrà una espressione asintotica $\Omega^{(a)}$, riducendo in primo luogo $U_{Q'}$ alla sua parte asintotica $U_{Q'}^{(a)}$, fornita dalla (8); inoltre gioverà, con considerazioni del tutto analoghe a quelle istituite alla fine del numero precedente, sostituire alla densità locale $\varrho_{Q'}$ il suo valore medio ϱ_0 . Risulta così

$$\Omega^{(a)} = \int_C \varrho_0^2 \int_{\tau} d\tau_{Q'} \int_{\tau} d\tau_Q \log \frac{l}{QQ'}.$$

Se ora si nota che la massa della fetta elementare φ vale

$$ds \int_{\tau} \varrho_{Q'} d\tau_{Q'},$$

ossia, per la (9),

$$ds \cdot \tau \varrho_0,$$

si riconosce che

$$(11) \quad \nu = \tau \varrho_0$$

rappresenta la densità lineare del tubo $\mathfrak{F}$, assimilato ad una linea materiale, avente per supporto la direttrice C .

Sostituendo ν/τ a ϱ_0 e ponendo per brevità

$$(12) \quad k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} d\tau_{Q'} \int_{\tau} d\tau_Q \log \frac{l}{QQ'},$$

la precedente espressione asintotica di Ω assume il suo aspetto definitivo

$$(13) \quad \Omega^{(a)} = \int_C k \nu^2 ds,$$

k e ν essendo ben determinate funzioni del punto P , o, se si vuole, dell'arco s di C (contato da un'origine arbitraria, in verso scelto a piacere).

La quantità k , introdotta colla posizione (12), è un puro numero, che si presenta come un *parametro di configurazione* (trasversale) del tubo, in quanto dipende esclusivamente dalla *forma* della sezione τ , normale a C in P . Per rendersene conto, basta notare che una similitudine, nella quale tutte le lunghezze (compresa l'ausiliaria l) si alterino in uno stesso rapporto, lascia k inalterata.

3. - *Attrazione.*

Al variare del tubo $\mathfrak{F}$, varia naturalmente anche il suo autopotenziale Ω , nonchè la corrispondente espressione asintotica $\Omega^{(a)}$, supposto, beninteso, che $\mathfrak{F}$, pur variando, resti abbastanza sottile perchè siano attendibili le valutazioni asintotiche.

Consideriamo in particolare spostamenti infinitesimi dei singoli elementi materiali del tubo, e sia $\delta\Omega^{(a)}$ la variazione subordinata nell'autopotenziale Ω . Atteso il significato di questo, richiamato al principio del numero precedente, $\delta\Omega^{(a)}$ rappresenterà asintoticamente (cioè tanto più esattamente quanto più il tubo è sottile) il lavoro δL eseguito dalle forze di mutua attrazione nello spostamento che si fa subire al tubo $\mathfrak{F}$. In un tale spostamento dei singoli elementi materiali, rimarranno implicate in generale sia la direttrice C , sia le sue varie sezioni normali τ , e il lavoro complessivo δL delle forze newtoniane potrà pensarsi scisso in due contributi, $\delta_1 L$ e $\delta_2 L$, da dirsi rispettivamente *longitudinale* e *trasversale*, proveniente il primo dai cambiamenti di posizione e di forma di C , il secondo dalle eventuali alterazioni delle singole sezioni.

Il calcolo completo di δL si trova sviluppato nella mia memoria del Circolo Matematico di Palermo (1912), citata nell'introduzione. Per lo scopo che abbiamo in vista ci basterà procurarci $\delta_1 L$, anzi la sua espressione asintotica, la quale si ricava materialmente da $\Omega^{(a)}$, applicando la variazione δ_1 . Una tale variazione implica uno spostamento arbitrario δP dei singoli punti P della direttrice C , mentre $\delta_1 k = 0$. Inoltre, per l'invariabilità (di fronte ad uno spostamento qualsiasi) delle massa di ciascuna fetta elementare φ di tubo, si ha

$$\delta_1(\nu ds) = 0.$$

Giova assumere $\Omega^{(a)}$, anzichè sotto la forma (13), sotto la forma equivalente

$$(13') \quad \Omega^{(a)} = \int_C k(\nu ds)^2 \frac{1}{ds},$$

con che tutto si riduce a far variare, sotto il segno, il fattore $\frac{1}{ds}$.

Lungo C si risguarderà come variabile indipendente l'arco s , e si avrà, in quanto P si consideri funzione di s ,

$$\frac{dP}{ds} = \mathbf{t},$$

designando $\mathbf{t}$ il versore della tangente alla C in P , orientato nel senso in cui si contano gli archi.

Per procurarsi la variazione subordinata nei ds dagli spostamenti δP attribuiti ai punti di C , basta variare l'identità

$$ds^2 = dP \times dP,$$

il che porge

$$ds \cdot \delta ds = dP \times \delta dP,$$

da cui, dividendo per ds e tenendo conto che $\delta dP = d\delta P$, per l'indipendenza degli spostamenti dP e δP , segue

$$\delta ds = \mathbf{t} \times d\delta P.$$

Dopo ciò si ha subito dalla (13')

$$\delta_1 \Omega^{(a)} = - \int_C \mathbf{v}^2 \mathbf{k} \mathbf{t} \times d\delta P,$$

e basta una integrazione per parti per desumerne

$$(14) \quad \delta_1 \Omega^{(a)} = \int_C d(\mathbf{v}^2 \mathbf{k} \mathbf{t}) \times \delta P - [\mathbf{v}^2 \mathbf{k} \mathbf{t} \times \delta P]_{O'}^{O'},$$

essendo O , O' (coincidenti, se si tratta di una curva chiusa, in un suo punto arbitrario) i due estremi della direttrice C .

È facile interpretare il vettore

$$d(\mathbf{v}^2 \mathbf{k} \mathbf{t}) = \frac{d}{ds} (\mathbf{v}^2 \mathbf{k} \mathbf{t}) ds,$$

per cui si trova moltiplicato scalarmente, nell'espressione (14) di $\delta_1 \Omega^{(a)}$, un generico δP (non terminale). Basta richiamarsi al significato di lavoro elementare $\delta_1 L$, spettante al $\delta_1 \Omega^{(a)}$, e procedere alla sua valutazione per fette. Dacchè, per definizione della variazione δ_1 , non si toccano le sezioni, attribuendo ai vari punti P di C gli spostamenti δP , ogni fetta elementare φ subisce un semplice spostamento traslatorio δP . Perciò, se Φds è il risultante delle attrazioni newtoniane che la fetta φ subisce da parte di tutto il rimanente tubo, essa contribuirà al lavoro $\delta_1 L$ per

$$\Phi ds \times \delta P.$$

E si avrà complessivamente

$$(15) \quad \delta_1 L = \int_C (\Phi ds \times \delta P) + \text{lavoro dovuto alle attrazioni del tubo sulle sue sezioni terminali in } O, O'.$$

Attesa l'arbitrarietà dei δP , l'identità (asintotica)

$$(16) \quad \delta_1 L = \delta_1 \Omega^{(a)}$$

richiede in primo luogo che siano eguali nei due membri i coefficienti di un generico δP , non terminale; donde

$$(17) \quad \Phi ds = \frac{d}{ds} (\mathbf{v}^2 \mathbf{k} \mathbf{t}) ds.$$

Ecco l'espressione asintotica del risultante delle attrazioni newtoniane che una generica fetta elementare φ di un tubo sottile subisce da parte di tutto il tubo residuo.

Riducendosi all'unità di lunghezza, si ha

$$(17') \quad \Phi = \frac{d}{ds} (\nu^2 k t).$$

Dalla (17) appare che (asintoticamente) non influiscono affatto le porzioni di tubo discoste dalla fetta φ che si considera; l'attrazione Φds dipende esclusivamente: dall'andamento della direttrice nell'immediata prossimità di φ , ossia del punto P (e più precisamente dalle determinazioni in P di t e di $\frac{dt}{ds}$); dalla densità lineare ν in P e sua derivata $\frac{d\nu}{ds}$; e infine dalla forma della sezione del tubo, per tramite esclusivo del parametro di configurazione k e sua derivata $\frac{dk}{ds}$, sempre in P .

Dalla (16), prendendo in considerazione anche i termini ai limiti, segue ulteriormente il significato meccanico di $\nu^2 k t$. E si giunge in modo ovvio alla conclusione che, *per un punto generico P , anche non terminale, di C , $-\nu^2 k t$ rappresenta asintoticamente la pressione (risultante) esercitantesi sulla sezione τ per P quale risultante delle attrazioni provenienti dalla porzione di tubo, che si trova, rispetto a τ , dalla banda opposta a t* : anche qui influiscono soltanto porzioni immediatamente contigue a P , poichè l'andamento longitudinale del tubo figura, nell'espressione $-\nu^2 k t$ della pressione suddetta unicamente per tramite del versore t in P .

Nel seguito non ci serviremo di questa interpretazione di $-\nu^2 k t$, ma ci basterà invocare la (17) o (17').

4. - Gradiente asintotico medio.

L'espressione asintotica

$$(8) \quad U_{Q'}^{(a)} = 2Q_0 \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q$$

del potenziale newtoniano di un tubo sottile (per punti Q' interni o nell'immediata prossimità del tubo), assegnata al n.º 2, *non* è in generale atta alla derivazione. Si vuol dire con ciò che, mentre il rapporto $U_{Q'}/U_{Q'}^{(a)}$ tende all'unità, al convergere a zero dello spessore del tubo, cioè della sua massima dimensione trasversale ε , non altrettanto può dirsi del rapporto fra due derivate omologhe di $U_{Q'}$ e $U_{Q'}^{(a)}$, rispetto alle coordinate del punto potenziato Q' .

Si potrebbe, approfondendo l'indagine istituita finora, assegnare anche più complete espressioni asintotiche del potenziale, sia di una linea che di un tubo sottile, *atte alla derivazione*. Ma l'analisi è piuttosto laboriosa, sicchè mi limiterò a riferirne il risultato al numero seguente, rimandando per la dimostrazione ai miei primi studi in argomento ⁽³⁾.

⁽³⁾ *Sulla attrazione newtoniana di un tubo sottile*, Rend. Acc. Lincei, Ser. 5ª, Vol. XVII (2º semestre 1908), pp. 413-426, 535-551.

Faccio intanto osservare che si può per altro pervenire assai rapidamente ad una valutazione asintotica del gradiente *medio*, sfruttando il risultato ottenuto al numero precedente per quanto concerne l'attrazione.

Posto infatti, per brevità di scrittura,

$$\mathbf{g} = \text{grad}_{Q'} U,$$

l'espressione rigorosa del risultante delle attrazioni, esercitate sopra la solita fetta φ , è

$$ds \int_{\tau} \varrho_{Q'} \mathbf{g} d\tau_{Q'}.$$

A meno di termini che si annullano con ε , si può, come al n.º 1, sostituire $\varrho_{Q'}$ col suo valore medio ϱ_0 e scrivere di conseguenza, attesa la (11),

$$ds \nu \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{g} d\tau_{Q'}.$$

Sempre, ben si intende, a meno di termini che si annullano con ε , cioè asintoticamente, il risultante suddetto potrà eguagliarsi al Φds , dato dalla (17). Se ne inferisce che *una espressione asintotica $\mathbf{g}^{(a)}$ del gradiente medio*

$$\frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{g} d\tau_{Q'}$$

è fornita da

$$\mathbf{g}^{(a)} = \frac{1}{\nu} \Phi,$$

ossia, per la (17'), da
(18)

$$\mathbf{g}^{(a)} = \frac{1}{\nu} \frac{d}{ds} (\nu^2 k \mathbf{t}).$$

Rimane così in particolare acquisito che, in quanto sia lecito assimilare il tubo gravitante $\mathfrak{T}$ ad una linea materiale, di densità lineare ν , avente sede sulla direttrice C , il gradiente del potenziale newtoniano di $\mathfrak{T}$, in un punto generico P della direttrice, è espresso asintoticamente dalla (18). Si è anche qui pervenuti, come era ben prevedibile, ad un risultato puramente locale, nel senso che, in base alla (18), l'andamento longitudinale del tubo influisce sul gradiente $\mathbf{g}^{(a)}$ unicamente pel tramite di $\mathbf{t}$ e di $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ in P . Del pari la forma delle sezioni trasversali e la densità intervengono anch'esse attraverso i valori in P di k , $\frac{dk}{ds}$, ν e $\frac{d\nu}{ds}$.

5. - Gradiente locale.

L'espressione asintotica di $\mathbf{g}$, locale, cioè relativa ad un ben determinato punto Q' di $\mathfrak{T}$ (o nell'immediata prossimità di $\mathfrak{T}$) non sembra desumibile dall'autopotenziale Ω nella forma asintotica particolarmente ridotta $\Omega^{(a)}$, di cui ci siamo accontentati, trascurando senz'altro tutto ciò che si annulla con ε .

Risulta per altro dalla espressione asintotica di U , *atta alla derivazione* (di cui le note lincee, citate al numero precedente) che *l'espressione asintotica*

locale $\text{grad}_{Q'}^{(a)} U_{Q'}$, pur non essendo semplicemente $\text{grad}_{Q'}$ della (8), può farsi dipendere esclusivamente dalla (8) suddetta sotto la forma

$$(19) \quad \text{grad}_{Q'}^{(a)} U_{Q'} = \text{grad}_{Q'} U_{Q'}^{(a)} + \frac{1}{2} U_{Q'}^{(a)} c \mathbf{n},$$

dove, ben si intende, la curvatura c e il versore $\mathbf{n}$ si riferiscono al punto P della direttrice C , che è proiezione normale, su C , del punto potenziato Q' (ossia che appartiene alla sezione normale a C , passante per Q').

Il secondo membro della (19) si può, sempre in via asintotica, rendere alquanto più esplicito, usufruendo di formule scalari che si trovano nella seconda delle note lincee, già ripetutamente ricordate.

All'uopo si mette in evidenza, nella espressione asintotica (8) di $U_{Q'}^{(a)}$, il potenziale logaritmico

$$(20) \quad \lambda_{Q'} = \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q$$

dell'area omogenea τ , scrivendo

$$(8') \quad U_{Q'}^{(a)} = 2\varrho_0 \lambda_{Q'};$$

e si è poi con ovvi passaggi, scindendo il $\text{grad}_{Q'}$ nei suoi due componenti longitudinale e trasversale (cioè secondo t e secondo il piano normale) alla formula

$$(19') \quad \text{grad}_{Q'}^{(a)} U_{Q'} = 2\varrho_0 \nabla \lambda_{Q'} + 2 \frac{d(\varrho_0 \lambda_{Q'})}{ds} t + \varrho_0 \lambda_{Q'} c \mathbf{n},$$

dove col simbolo ∇ si intende il gradiente limitato al piano della sezione τ . Di qua si può agevolmente ritrovare l'espressione (18) del gradiente asintotico medio

$$g^{(a)} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \text{grad}_{Q'}^{(a)} U_{Q'} d\tau_{Q'}.$$

Basta aver riguardo alla (11), nonchè alla definizione (12) di k , che, in base alla (20), si può scrivere

$$(21) \quad k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} \lambda_{Q'} d\tau_{Q'}.$$

Conviene inoltre (per la riduzione del secondo membro) invocare un'altra conseguenza della (12), cioè

$$\frac{d(\tau k)}{ds} = \int_{\tau} d\tau_{Q'} \frac{d}{ds} \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q + \int_{\tau} d\tau_Q \frac{d}{ds} \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_{Q'},$$

la quale, badando alla (20) e scambiando nel secondo addendo Q e Q' , assume l'aspetto

$$(22) \quad \frac{d(\tau^2 k)}{ds} = 2 \int_{\tau} \frac{d\lambda_{Q'}}{ds} d\tau_{Q'}.$$

6. - Costanza asintotica (rispetto a Q') di $\lambda_{Q'}/\tau$.

Riprendiamo il potenziale logaritmico

$$(20) \quad \lambda_{Q'} = \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q$$

di una generica area piana, omogenea τ per rilevarne una notevole proprietà di comportamento quando $\tau \rightarrow 0$.

Consideriamo dapprima, per trarne norma, il caso elementare in cui l'area potenziante τ è un cerchio di *diametro* (massima dimensione lineare) ε e centro O .

Si ha, rappresentando con ϱ' il raggio vettore OQ' ,

$$(23) \quad \lambda_{Q'} = \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{4\varrho'^2}{\varepsilon^2} \right) + \tau \log \frac{2l}{\varepsilon},$$

come si può ovviamente verificare, ad esempio per via indiretta, cominciando coll'osservare che, attesa la simmetria attorno ad O , $\lambda_{Q'}$ dipende soltanto da ϱ' . Siccome poi, entro il cerchio, sussiste l'equazione di POISSON

$$\Delta_2 \lambda = \frac{1}{\varrho'} \frac{d}{d\varrho'} \left(\varrho' \frac{d\lambda}{d\varrho'} \right) = -2\pi,$$

basta integrare e determinare le *due* costanti di integrazione colla condizione che $\lambda_{Q'}$ rimanga finito in O e vi assuma precisamente il valore

$$2\pi \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \log \frac{l}{\varrho'} \varrho' d\varrho' = \pi \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\log \frac{2l}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) = \tau \left(\log \frac{2l}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right),$$

per ritrovare la (23).

Dividendo per τ si ha

$$(23') \quad \frac{1}{\tau} \lambda_{Q'} = 1 - \frac{4\varrho'^2}{\varepsilon^2} + \log \frac{2l}{\varepsilon} = \left\{ 1 - \frac{4\varrho'^2}{\varepsilon^2} + \log 2 \right\} + \log \frac{l}{\varepsilon},$$

da cui, per essere (entro il cerchio e sopra la circonferenza che lo limita) $\varrho' \leq \frac{\varepsilon}{2}$, apparisce che, se si fa tendere a zero il diametro ε , il termine (variabile) entro parentesi, $1 - \frac{4\varrho'^2}{\varepsilon^2} + \log 2$, resta finito, anzi non supera mai $1 + \log 2$. Perciò esso non porta alcun contributo alla espressione asintotica di $\lambda_{Q'}$, la quale può così essere ridotta alla semplice costante $\log \frac{l}{\varepsilon}$.

Questa constatazione è molto importante perchè, qualitativamente, le cose vanno nello stesso modo anche per campi di forma qualsivoglia, quando se ne faccia decrescere indefinitamente la massima dimensione ε . Per riconoscerlo prenderemo dapprima in considerazione un campo di forma determinata e massima dimensione lineare uguale all'unità, supponendo poi di farlo restringere omoteticamente attorno ad un suo punto interno qualsiasi O .

Sia T tale campo di un piano ausiliario OXY , contenente l'origine O ; e si indichi con

$$(24) \quad \Lambda(X', Y') = \int_T \log \frac{1}{R} dT$$

il relativo potenziale logaritmico, essendo X', Y' le coordinate del punto potenziato, X, Y quelle del generico punto potenziante, e

$$R = |\sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2}|.$$

Ammessso naturalmente che il contorno di T sia regolare, o costituito da un numero finito di archi regolari, $\Lambda(X', Y')$ risulterà funzione *finita* e continua di (X', Y') , comunque vari questo punto entro T (contorno incluso).

Ciò premesso, supponiamo di far rimpicciolire il campo, eseguendo una trasformazione omografica di centro O , cioè facendo corrispondere al punto generico (X, Y) di T il punto Q di coordinate

$$(25) \quad x = \varepsilon X, \quad y = \varepsilon Y \quad (\varepsilon \text{ frazione propria}),$$

e quindi al campo T un campo τ in cui ogni lunghezza è ridotta nel rapporto di 1 ad ε , talchè in particolare

$$\tau = \varepsilon^2 T.$$

Si avrà per τ il potenziale logaritmico

$$(20) \quad \lambda_{Q'} = \int_{\tau} \log \frac{l}{QQ'} d\tau_Q,$$

dove, come già si chiarì al n.º 1, a proposito di altra argomentazione asintotica, la costante l si può ritenere scelta preventivamente, e quindi indipendente da ε .

Si faccia ora subire, nella (20), la trasformazione (25) alle coordinate x, y del punto potenziante Q e la trasformazione analoga alle coordinate x', y' del punto potenziato Q' . Si avrà

$$\lambda_{Q'} = \varepsilon^2 \int_T \log \frac{1}{R} dT + \tau \log \frac{l}{\varepsilon},$$

ossia, badando alla (24) e dividendo per $\tau = \varepsilon^2 T$,

$$(26) \quad \frac{1}{\tau} \lambda_{Q'} = \frac{\Lambda}{T} + \log \frac{l}{\varepsilon}.$$

Il rapporto Λ/T , considerato quale funzione del punto (X', Y') di T resta finito, comunque vari (X', Y') entro T e sul contorno; considerato quale funzione di x', y' , cioè del punto potenziato Q' di τ , non sarà più in generale indipendente da ε , attese le formule di trasformazione (25); però — e questo è l'essenziale — l'insieme dei suoi valori resta lo stesso, sicchè ammette un massimo finito, *indipendente da ε* .

Di qua segue, per la (26), che $\frac{1}{\tau}\lambda_{Q'}$ è *asintoticamente sostituibile con una semplice costante e precisamente con $\log \frac{l}{\varepsilon}$* , essendo ε la massima dimensione di τ .

CAPITOLO III.

Potenziale vettore di un tubo sottile e suo rotore.

1. - Distribuzione vettoriale conforme all'andamento longitudinale di un tubo. Componenti del potenziale vettore A . Loro espressioni asintotiche.

Sia ω un vettore funzione dei punti Q del tubo $\mathfrak{S}$; supponiamo anzi più particolarmente che, in ogni punto Q , ω sia diretto come la linea χ (capitolo precedente, n.º 1) passante per Q . Designamone con ω la lunghezza e con t_Q il versore, il quale si riduce in particolare a t nei punti P della direttrice C .

Il potenziale vettore A di una tale distribuzione vettoriale ω entro $\mathfrak{S}$ è dato, per un generico punto potenziente Q' , da

$$(1) \quad A_{Q'} = \int_{\mathfrak{S}} \frac{\omega}{r} d\mathfrak{S},$$

dove r indica la distanza $\overline{QQ'}$.

Se $t_{Q|i}$ ($i=1, 2, 3$) sono le componenti (coseni direttori) del versore t_Q , rispetto ad un generico sistema cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$, si avranno per $A_{Q'}$ le componenti

$$(2) \quad A_{Q'|i} = \int_{\mathfrak{S}} \frac{\omega_Q t_{Q|i}}{r} d\mathfrak{S} \quad (i=1, 2, 3).$$

Ciascuna di esse rientra manifestamente nello schema di un ordinario potenziale newtoniano $U_{Q'}$ (formula (2) del capitolo precedente), la densità cubica ϱ , essendo sostituita da $\omega_Q t_{Q|i}$.

A meno di termini dell'ordine di ε (capitolo precedente, n.º 1) si può sostituire a $t_{Q|i}$ la sua determinazione in un altro punto qualsiasi della stessa sezione τ , in particolare $t_{P|i}$, essendo P il punto di τ , che appartiene alla direttrice C : scriveremo per semplicità t_i , in luogo di $t_{P|i}$.

Del pari, ponendo

$$(3) \quad p = \int_{\tau} \omega_Q d\tau_Q,$$

si può sostituire ad ω il suo valore medio p/τ .

Così la densità media, designata con ϱ_0 per il generico potenziale $U_{Q'}$, è, per una A_i generica, asintoticamente assimilabile a

$$\frac{1}{\tau} p t_i,$$

e la densità lineare $\nu = \varrho_0 \tau$ a

$$p t_i.$$

D'altra parte sussiste, in valutazione asintotica (locale), la formula (19') del precedente capitolo. In conclusione, *si possono adottare, per i gradienti delle singole componenti A_i , in un generico punto Q' (interno o molto prossimo a $\mathfrak{S}$) le espressioni asintotiche seguenti:*

$$(4) \quad \text{grad}_{Q'}^{(a)} A_i = 2 \frac{p}{\tau} t_i \nabla \lambda_{Q'} + 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\tau} t_i \lambda_{Q'} \right) \mathbf{t} + \frac{p}{\tau} t_i \lambda_{Q'} \mathbf{cn} \quad (i=1, 2, 3).$$

Per i gradienti medi

$$(5) \quad \mathbf{g}_i = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \text{grad}_{Q'}^{(a)} A_i \cdot d\tau_{Q'}$$

si avrà più semplicemente, in base alla (18) del capitolo precedente e alla circostanza che ν va sostituito con pt_i ,

$$(6) \quad \mathbf{g}_i = \frac{1}{pt_i} \frac{d}{ds} (p^2 t_i^2 k \mathbf{t}),$$

dove k è il solito parametro di configurazione trasversale del tubo, definito dalla (12) del precedente capitolo. È appena necessario osservare che il denominatore pt_i [come già il ν nella formula di partenza (18)] è soltanto apparente, in causa del $p^2 t_i^2$, che compare nel numeratore sotto il segno di derivazione. Non c'è dunque — nè poteva esservi, data l'impostazione della questione — alcuna singolarità anche quando si annulla, come è ben possibile, qualcuno dei coseni t_i .

2. - Osservazione di calcolo vettoriale. Espressione asintotica di $\text{rot } \mathbf{A}$.

Le (4) consentono di ricavare con passaggi semplici e puramente formali l'espressione asintotica di $\text{rot } \mathbf{A}$; ed ecco come.

Le componenti cartesiane del rotore sono notoriamente date da

$$\frac{\partial A_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial A_{i+1}}{\partial x_{i+2}} \quad (i=1, 2, 3)$$

colla solita convenzione di riguardare equivalenti indici che differiscono di 3 (o di multipli di 3). Si ha quindi, designando con $\mathbf{u}_i$ i versori fondamentali del triedro $Ox_1x_2x_3$,

$$(7) \quad \text{rot } \mathbf{A} = \sum_i^3 \left(\frac{\partial A_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial A_{i+1}}{\partial x_{i+2}} \right) \mathbf{u}_i,$$

la quale, cambiando l'indice di sommatoria i , nel primo addendo, in $i+1$, e, nel secondo, in $i+2$, può essere scritta

$$\text{rot } \mathbf{A} = \sum_i^3 \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_{i+2}} \mathbf{u}_{i+1} - \frac{\partial A_i}{\partial x_{i+1}} \mathbf{u}_{i+2} \right).$$

Le identità

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+2} \wedge \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_{i+2} = -\mathbf{u}_{i+1} \wedge \mathbf{u}_i$$

consentono di attribuire al termine generale del sommatorio la forma

$$\left\{ \frac{\partial A_i}{\partial x_{i+2}} \mathbf{u}_{i+2} + \frac{\partial A_i}{\partial x_{i+1}} \mathbf{u}_{i+1} \right\} \wedge \mathbf{u}_i.$$

Qui si può, entro parentesi, immaginare aggiunto il termine $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \mathbf{u}_i$, il quale completa $\text{grad } A_i$, mentre apporta un contributo nullo al prodotto vettoriale.

Risulta quindi, specificando anche il punto, cui si riferiscono gli operatori differenziali rot e grad :

$$(7') \quad \text{rot}_{Q'} \mathbf{A} = \sum_i^3 \text{grad}_{Q'} A_i \wedge \mathbf{u}_i.$$

Giova oramai particolarizzare il triedro coordinato assumendone gli assi Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 ordinatamente paralleli agli spigoli $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ del triedro principale della direttrice C in quel punto P al cui intorno si riferiscono le valutazioni asintotiche (4) dei $\text{grad } A_i$. Avremo così, in P ,

$$(8) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{t}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{b};$$

$$(9) \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0;$$

mentre i coseni direttori di $\mathbf{n}$ saranno 0, 1, 0.

Inoltre, ove si rappresenti con c la curvatura di C in P , e si tenga presente la prima formula di FRENET $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\mathbf{n}$, sarà, sempre in P ,

$$(10) \quad \frac{dt_1}{ds} = 0, \quad \frac{dt_2}{ds} = c, \quad \frac{dt_3}{ds} = 0.$$

Badando alle (8), (9) e (10), le (4) si esplicitano sotto la forma

$$\begin{cases} \text{grad}_{Q'}^{(a)} A_1 = 2 \frac{p}{\tau} \nabla \lambda_{Q'} + 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\tau} \lambda_{Q'} \right) \mathbf{t} + \frac{p}{\tau} \lambda_{Q'} c \mathbf{n}, \\ \text{grad}_{Q'} A_2 = 2 \frac{p}{\tau} \lambda_{Q'} c \mathbf{t}, \\ \text{grad}_{Q'} A_3 = 0. \end{cases}$$

Con ciò la (7'), tenute presenti le (8), dà

$$(11) \quad \text{rot}_{Q'}^{(a)} \mathbf{A} = 2 \frac{p}{\tau} \nabla \lambda_{Q'} \wedge \mathbf{t} + \frac{p}{\tau} \lambda_{Q'} c \mathbf{b},$$

la cui determinazione media, relativa alla sezione τ , cioè

$$(12) \quad \overline{\text{rot}_{Q'}^{(a)} \mathbf{A}} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \text{rot}_{Q'}^{(a)} \mathbf{A} \cdot d\tau_{Q'},$$

ha, come vedremo, essenziale importanza nell'applicazione ai filetti vorticosi. Per il calcolo del secondo membro si noterà in primo luogo che, attesa la definizione di $\lambda_{Q'}$, fornita dalla (20) del capitolo precedente, risulta

$$(13) \quad \int_{\tau} \nabla \lambda_{Q'} \cdot d\tau_{Q'} = 0.$$

Infatti, consideriamo per esempio la componente che si riferisce all'asse

delle x (nel piano della sezione), designando con x e x' le corrispondenti coordinate di Q e Q' . Si ha identicamente

$$\int_{\tau} \frac{\partial \lambda_{Q'}}{\partial x'} d\tau_{Q'} = \int_{\tau} d\tau_{Q'} \int_{\tau} \frac{x - x'}{QQ'^2} d\tau_Q,$$

e il secondo membro si annulla perchè basta lo scambio materiale dei due punti di integrazione Q e Q' a invertirne il segno. Tenuto conto di ciò e della (21) del precedente capitolo, la (12) si esplicita sotto la forma notevolmente semplice

$$(12') \quad \overline{\text{rot}_{Q'}^{(a)} \mathbf{A}} = pkcb.$$

Il secondo membro ha, come si vede, carattere intrinseco rispetto alla direttrice C ; il comportamento trasversale del tubo in P (proiezione normale di Q' sulla direttrice) si trova riassunto nel parametro di configurazione k della sezione normale τ per P , e la distribuzione vettoriale ω interviene soltanto attraverso la intensità integrale p , spettante alla sezione τ .

CAPITOLO IV.

Liquido perfetto indefinitamente esteso con un solo filetto vorticoso.

1. - Richiami concernenti le relazioni fra campo di velocità e campo vorticoso.

Se una regione S è occupata da un liquido (fluido perfetto incompressibile) in moto, si ha, per ogni istante t , un campo (solenoidale) di velocità, corrispondendo ad un generico punto Q di S il vettore $\mathbf{v}$, velocità della particella liquida, che occupa la posizione Q all'istante t .

Il campo vorticoso è immediatamente desumibile da $\mathbf{v}$ con operazioni differenziali, avendosi, per definizione del vortice ω ,

$$(1) \quad \omega_Q = \frac{1}{2} \text{rot}_Q \mathbf{v},$$

in ogni punto Q di S .

In quelle porzioni di S dove sia eventualmente $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ si ha in particolare moto *irrotazionale*. Comunque, si può reciprocamente esprimere $\mathbf{v}$ mediante ω e circostanze accessorie concernenti il contorno del campo S ; ma c'è di mezzo l'integrazione di un sistema di equazioni (a derivate parziali) con assegnate condizioni al contorno, e la determinazione finale di $\mathbf{v}$ in un punto Q' non è locale (come quella di ω mediante $\mathbf{v}$), bensì dipende dalla distribuzione vettoriale ω in tutto il campo S .

Il caso più semplice si ha quando S si estende indefinitamente in tutti i sensi, invadendo tutto lo spazio. Allora non occorrono dati complementari e,

ammesso il cosiddetto comportamento regolare all' ∞ , basta introdurre il potenziale vettore

$$(2) \quad \mathbf{A}_{Q'} = \int_S \frac{\boldsymbol{\omega}}{r} dS$$

della distribuzione $\boldsymbol{\omega}$, per poterne classicamente ⁽⁴⁾ ricavare $\mathbf{v}$ sotto la forma

$$(3) \quad \mathbf{v}_{Q'} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{rot}_{Q'} \mathbf{A}.$$

2. - Caso di un unico filetto vorticoso. Espressione asintotica della velocità indotta nel filetto stesso.

Supponiamo in particolare che, ad un dato istante t , $\boldsymbol{\omega}$ sia diverso da zero (cioè esistano vortici) soltanto entro un tubo $\mathfrak{F}$ (necessariamente chiuso, o estendentesi nei due sensi all' ∞ , come risulta da una fondamentale proposizione dell'HELMHOLTZ), essendo irrotazionale il moto del liquido esternamente a $\mathfrak{F}$. Seguiranno naturalmente a valere le conclusioni del numero precedente, potendosi però ridurre, nella (2), il campo di integrazione dall'intero spazio S a $\mathfrak{F}$, perchè $\boldsymbol{\omega} = 0$ fuori di $\mathfrak{F}$.

Speciale interesse merita il caso in cui il tubo $\mathfrak{F}$ sia così sottile da poter essere trattato come una linea materiale, sia cioè, come suol dirsi, un semplice *filetto vorticoso*.

Per noti teoremi dovuti ad HELMHOLTZ, la superficie laterale del tubo $\mathfrak{F}$ deve essere in ogni caso costituita da linee vorticide; di queste ne passa una ed una soltanto per un punto qualsiasi interno al tubo. Ognuna di esse segue poi l'andamento longitudinale del tubo, ed è quindi lecito assumerla come direttrice C , nonchè come supporto geometrico della linea materiale cui $\mathfrak{F}$ viene assimilato. Ci troviamo così nelle condizioni specificate al capitolo precedente, e potremo senz'altro attribuire, nella (3), a $\operatorname{rot}_{Q'} \mathbf{A}$ la forma asintotica (11) di pag. 23, in cui tutto è riferito a quel punto P di C , che si trova nella stessa sezione τ cui appartiene Q' (proiezione normale di Q' su C).

$$(4) \quad \text{La} \quad p = \int_{\tau} \omega d\tau,$$

già introdotta al n.º 1 del precedente capitolo, viene a costituire l'*intensità del filetto vorticoso*, ed è — giova richiamarlo — eguale alla semicircolazione trasversa; sopra tutto una caratteristica intrinseca del filetto, nel senso che è costante, non solo lungo il filetto (cioè lungo C , qualunque sia la sezione normale τ che se ne consideri), ma anche nel tempo, quando il filetto vorticoso si sposta e si deforma in seno alla massa liquida, subordinatamente al moto di

⁽⁴⁾ Cfr. per es. H. VILLAT, *Mécanique des fluides* (Paris, Gauthier-Villars, 1930), pp. 17-19.

questa: semprechè, tale moto essendo retto dalle equazioni idrodinamiche, oltre a trattarsi di liquido perfetto, siano conservative le forze che lo sollecitano ⁽⁵⁾.

In conclusione, ove per brevità di scrittura si ponga ulteriormente

$$(5) \quad \sigma = \frac{p}{2\pi},$$

con che σ è una costante, al pari di p , la (3), in cui si introduca per $\text{rot}_{Q'}\mathbf{A}$ la sua espressione asintotica [(11) del capitolo precedente], diviene

$$(6) \quad \mathbf{v}_{Q'} = 2\sigma \frac{1}{\tau} \nabla \lambda_{Q'} \wedge \mathbf{t} + \sigma \frac{1}{\tau} \lambda_{Q'} c \mathbf{b}.$$

La determinazione media di $\mathbf{v}_{Q'}$, relativa ad una generica sezione τ ,

$$(7) \quad \mathbf{v}_P = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{v}_{Q'} d\tau_{Q'} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{\tau} \text{rot}_{Q'}^{(a)} \mathbf{A} d\tau_{Q'} = \frac{1}{2\pi} \overline{\text{rot}_{Q'}^{(a)} \mathbf{A}},$$

può evidentemente interpretarsi come velocità del baricentro (geometrico) della sezione τ , e d'altra parte può essere riguardata come funzione del punto P della direttrice, che appartiene alla sezione stessa: è perciò giustificato di designare, come abbiamo fatto nella (7), la media suddetta con $\mathbf{v}_P$. In base alla (12') del capitolo precedente e alla posizione (5), se ne trae l'espressione asintotica

$$(8) \quad \mathbf{v}_P = \sigma k c \mathbf{b},$$

fondamentale per le applicazioni che abbiamo in vista. Dei quattro fattori, di cui $\mathbf{v}_P$ è il prodotto, σ è costante, gli altri sono funzioni di P , o, se si vuole, dell'argomento s : $k(s)$ è, come sempre, il parametro di configurazione trasversale del filetto $\mathfrak{F}$, e dipende unicamente dalla forma della sezione normale τ (a C , in P); $c(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ designano la curvatura e il versore binormale della direttrice in P , e dipendono invece dal solo andamento longitudinale del filetto.

3. - Atto di moto di una generica sezione τ .

Per illustrare le conseguenze cinematiche della (8) conviene in primo luogo far subire alla (6) una ulteriore semplificazione, usufruendo della costanza (asintotica) rispetto a Q' di $\frac{1}{\tau} \lambda_{Q'}$, e quindi anche di $\lambda_{Q'}$, riconosciuta al n.º 6 del capitolo precedente. Si ha, per tale proprietà, asintoticamente,

$$\lambda_{Q'} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \lambda_{Q'} d\tau_{Q'},$$

dopo di che, badando alla (21) del capitolo II e alla (8), la formula (6) può essere scritta

$$\mathbf{v}_{Q'} = 2\sigma \frac{1}{\tau} \nabla \lambda_{Q'} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{v}_P,$$

⁽⁵⁾ Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Compendio di meccanica razionale* (Bologna, Zanichelli, 1928), T. II, pp. 279-286.

od anche, più brevemente,

$$(6') \quad \mathbf{v}_{Q'} = \mathbf{v}_P + \mathbf{V}_{Q'},$$

le quante volte si ponga

$$(9) \quad \mathbf{V}_{Q'} = 2\sigma \frac{1}{\tau} \nabla \lambda_{Q'} \wedge \mathbf{t}.$$

La (6') ci presenta così la velocità di un punto qualsiasi Q' di una generica sezione τ scissa in due addendi, di cui il primo $\mathbf{v}_P$ (indipendente da Q') corrisponde ad una semplice traslazione della τ nella direzione della binormale $\mathbf{b}$ a C in P , e quindi nel proprio piano; l'altro $\mathbf{V}_{Q'}$ definisce un atto di moto della sezione stessa, ancora nel proprio piano, però in generale *non* rigido. Per il caso particolare delle sezioni circolari segue ovviamente dalla (23) del capitolo precedente che il detto atto di moto corrisponde ad una semplice rotazione attorno all'asse del cerchio (che ha la direzione di $\mathbf{t}$); ma, per altre forme di sezione, si producono in generale deformazioni.

Sussiste per altro una proprietà, essenziale per l'applicazione che abbiamo in vista, ed è che *l'atto di moto (9) conserva sia l'area τ che il parametro k .*

Per la dimostrazione basta calcolare materialmente $\frac{d\tau}{dt}$ e $\frac{dk}{dt}$ in base alla (9), cioè all'ipotesi che la derivata rapporto a t di un generico punto Q' della sezione fosse $\mathbf{V}_{Q'}$.

Le componenti di questo vettore, rispetto ad assi x, y situati nel piano della sezione (ove si faccia altresì coincidere la direzione positiva dell'asse z con $\mathbf{t}$) sono

$$-2\sigma \frac{1}{\tau} \frac{\partial \lambda_{Q'}}{\partial y'}, \quad 2\sigma \frac{1}{\tau} \frac{\partial \lambda_{Q'}}{\partial x'},$$

x', y' designando le coordinate di Q' .

Si ha quindi, per il campo vettoriale *piano* $\mathbf{V}_{Q'}$,

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_{Q'} = 0,$$

il che assicura senz'altro l'invarianza delle aree, e in particolare dell'area totale τ , ossia $\frac{d\tau}{dt} = 0$.

Con ciò si ha dalla (21) del capitolo II

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} \nabla \lambda_{Q'} \wedge \mathbf{V}_{Q'} d\tau_{Q'},$$

dove, appunto per l'invarianza testè accertata, non si è sottoposto a derivazione nè $\frac{1}{\tau^2}$, nè l'elemento d'area $d\tau$.

La (9) mostra che $\mathbf{V}_{Q'}$ è perpendicolare a $\nabla \lambda_{Q'}$, sicchè, sotto il segno di integrale, si annulla identicamente il prodotto scalare. Ne consegue $\frac{dk}{dt} = 0$, c. d. d.

Le stesse conclusioni sussistono naturalmente per l'atto di moto complessivo $\mathbf{v}_P + \mathbf{V}_{Q'}$ (dei punti di una generica sezione τ), il quale differisce da $\mathbf{V}_{Q'}$ per una semplice traslazione.

4. - Considerazioni infinitesimali circa la migrazione del filetto in seno al liquido.

Attesa la sottigliezza del filetto vorticoso $\mathfrak{F}$, che consente di assimilarlo (quanto al campo occupato) ad una linea materiale, basterà, per seguirne le vicende, trovarsi in grado di assegnare una semplice curva geometrica (direttrice) istante per istante. E non è punto necessario, passando da un istante ad un altro, che si tratti di una *linea sostanziale*, cioè sempre costituita dalle medesime particelle.

Ciò premesso, riportiamoci alle considerazioni dei numeri precedenti, supponendo in primo luogo di conoscere, ad un dato istante t , la configurazione *completa* del filetto $\mathfrak{F}$, cioè sia la direttrice C (con che si vuol dire una qualsiasi delle curve atte a segnare l'andamento longitudinale del filetto), sia, per ogni punto P di C , la forma e la precisa ubicazione attorno a P della sezione normale τ .

Con ciò, assegnata che sia la costante $\sigma = p/2\pi$, si può costruire, per ogni punto Q' di $\mathfrak{F}$, la espressione (6), o la equivalente (6'), della velocità $v_{Q'}$; e, per la *proprietà essenziale dei vorticoidi di essere sempre costituiti dalle stesse particelle materiali*, si può desumerne la situazione $\mathfrak{F}_1$ del nostro filetto vorticoso all'istante $t+dt$, bastando all'uopo di far subire a ciascun punto Q' lo spostamento $v_{Q'}dt$. Ma questo è ancora troppo complicato.

Per semplificare, poniamoci in condizioni meno precise e d'altra parte più conformi all'indole della questione, immaginando di conoscere unicamente, oltre alla costante σ , i dati seguenti all'istante t :

a) La direttrice C , essendo — ripetiamolo ancora una volta — da risguardarsi confondibili l'una con l'altra tutte le linee geometriche che seguono l'andamento generale del filetto. Circostanza questa che ben si accorda con tutte le considerazioni asintotiche (cfr. in particolare il n.º 1 del capitolo II).

b) Per ogni punto $P(s)$ di C , un unico elemento globale della corrispondente sezione normale, e precisamente il parametro di configurazione k .

Con questi elementi si può costruire la formula (8) del numero precedente, e da essa si desume la nuova configurazione C_1 della direttrice nell'istante $t_1 = t + dt$. Infatti v_P rappresenta, per sua definizione, la velocità del baricentro della sezione τ , normale a C in $P(s)$. Tale baricentro è in verità un punto incognito se, come abbiamo supposto, i dati trasversali sono unicamente quelli indicati in b). Comunque, designandolo con $G(s)$, esso occuperà in capo al tempuscolo dt la posizione

$$P_1(s) = G(s) + v_P dt.$$

Ora — e questo è il punto in cui essenzialmente interviene l'assimilabilità del filetto ad una semplice linea materiale — la linea dei baricentri $G(s)$ (anche se a rigore incognita) è tipicamente atta a segnare l'andamento generale del filetto. Dunque è una sua direttrice, e come tale confondibile con la C , che figura, attraverso b e c , nel secondo membro della (8).

Potremo pertanto, nella equazione precedente, sostituire $P(s)$ a $G(s)$, con che

$$P_1(s) = P(s) + v_P dt,$$

dove oramai tutto è ben conosciuto, caratterizza, per l'istante $t_1 = t + dt$, la nuova configurazione C_1 della direttrice, ossia il dato a). Quanto al dato b) per t_1 , esso coincide addirittura colla sua determinazione nell'istante t , come si è dimostrato al numero precedente. k va insomma risguardata quale funzione del solo argomento s , desumibile dallo stato iniziale del filetto.

A partire dall'istante t_1 si ragiona nello stesso modo, con che le $k(s)$ rimangono sempre indipendenti da t , ecc.

Risulta così giustificata l'affermazione che il comportamento asintotico di un unico filetto vorticoso, in seno ad un liquido indefinito, è tutto contenuto nella (8). Oramai si tratterà unicamente di dar forma algebricamente rigorosa alle precedenti considerazioni infinitesimali, rendendosi esatto conto della natura analitica del problema di integrazione, posto dalla (8), e delle sue interpretazioni geometriche, cinematiche e idrodinamiche.

5. - Inestendibilità del filetto (cioè della direttrice).

Essendo assegnata la configurazione iniziale del filetto, e con essa quella della direttrice C , nonchè la funzione $k(s)$, il problema matematico si riduce, come si è mostrato al numero precedente, ad assegnare la configurazione C_t della curva C in ogni successivo istante t . Formalmente gioverà ricorrere alla rappresentazione parametrica $P(s, t)$ della C_t in un istante generico, pensando s come arco di C_t , contato, istante per istante, a partire dalla posizione che compete ad una *stessa* particella materiale O (scelta, una volta per sempre, con criterio arbitrario). Con ciò $P(0, t)$ individua sempre O , nei vari istanti t ; invece non è detto a priori che, per uno stesso valore generico di s , $P(s, t)$ individui anch'esso posizioni di una medesima particella liquida M . Invero la C è, per ipotesi (cioè per le ricordate proprietà delle linee vorticosi) costituita sempre dalle stesse particelle, ma ciò non implica che debbano conservarsi, al variare di t , gli archi di C frapposti fra particella e particella. Giova pertanto accertare anzi tutto che tale proprietà sussiste effettivamente quale conseguenza della (8), cioè che il filetto vorticoso, e, per esso, la C si comporta come se fosse inestendibile.

All'uopo basta ancora una considerazione infinitesimale, la quale mostrerà che la distanza elementare ds di due punti vicinissimi P e P' di C subisce, nel passare dall'istante t all'istante $t + dt$, un incremento nullo, o, più precisamente, d'ordine superiore al primo rispetto a dt . Lo si riconosce anche senza calcoli, pensando che gli spostamenti di P e di P' , in quanto diretti secondo le rispettive binormali alla C , riescono entrambi perpendicolari a PP' e hanno così proiezioni eguali (nulle) sulla PP' stessa. Una tale circostanza, come si sa dai

primi elementi di cinematica ⁽⁶⁾, assicura la rigidità dello spostamento, ossia la conservazione della distanza elementare PP' .

In formule, si ha dalla (8), per una posizione generica di P su C , cioè per un s generico,

$$(8') \quad \frac{dP}{dt} = \sigma kcb.$$

e quindi, per il punto P' che corrisponde al valore $s+ds$ dell'arco,

$$\frac{dP'}{dt} = \frac{dP}{dt} + \sigma \frac{d}{ds} (kcb).$$

Quest'ultima, attesa la terza formula di FRENET

$$\frac{db}{ds} = \gamma n,$$

in cui γ designa la torsione e n il versore della normale principale, può essere scritta

$$\frac{d(P'-P)}{dt} = \sigma \frac{d(kc)}{ds} b + \sigma k c \gamma n.$$

Se ora si tiene presente che

$$P' - P = t ds$$

e si moltiplica scalarmente membro a membro, risulta

$$\frac{d(P'-P)}{dt} \times (P'-P) = 0,$$

ossia $\frac{d}{dt} ds^2 = 0$, c. d. d.

6. - Sistema normale da cui dipende il problema matematico. Applicazione del teorema di unicità.

La proprietà testè stabilita porta come necessaria conseguenza che, *nella rappresentazione parametrica sostanziale* (concernente cioè, nei vari istanti, sempre la stessa particella fluida) *del numero precedente*,

$$P(s, t),$$

i due argomenti s e t , pur interpretandosi s come arco di C all'istante t , possono trattarsi come variabili indipendenti, talchè

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dP}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{dt} \right).$$

La giustificazione è immediata. Infatti, da un lato, parametri manifestamente e notoriamente indipendenti sono (per ogni sistema continuo) le coordinate iniziali e il tempo t ; nel caso nostro dunque l'arco $s = \widehat{OM}$, spettante ad una generica

⁽⁶⁾ Loco cit. a pag. 26, T. 1, p. 108.

particella liquida M , nella configurazione iniziale di C e t . D'altra parte l'inestendibilità consente di riguardare la stessa s anche come arco $\widehat{OM}$ sopra la configurazione di C corrispondente ad un altro qualsiasi istante t , c. d. d.

Ciò premesso, ricordiamo dal numero precedente che, data la configurazione iniziale del filetto, se ne desume $k(s)$; e questa funzione del solo argomento s va così considerata come un dato della questione. Incognita fondamentale, funzione delle due variabili indipendenti s e t , è invece il punto $P(s, t)$, o, se si vuole, la terna x, y, z delle sue coordinate cartesiane, posizione e terna da subordinarsi a quello stesso triedro galileiano, cui si riferiscono le velocità, espresse asintoticamente dalla (8).

La (8) stessa compendia del resto il sistema differenziale atto a definire l'incognita $P(s, t)$. Basta scriverla sotto la forma

$$(8') \quad \frac{dP(s, t)}{dt} = \sigma k c b,$$

in cui, ben si intende, la derivata rapporto a t va fatta indipendentemente da s . Nel secondo membro, oltre a σ che è una costante, e $k(s)$ che, come si è osservato poc' anzi, è una funzione della sola s , fornita direttamente dai dati iniziali, compariscono lo scalare $c(s, t)$ e il vettore $\mathbf{b}(s, t)$. L'uno e l'altro sono esprimibili mediante l'incognita fondamentale $P(s, t)$ e le sue derivate rapporto ad s , fino al secondo ordine. Lo si desume con facilità dalle formule di FRENET, che qui trascrivo tutte perchè dovrò valermene ripetutamente:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\gamma\mathbf{b} - c\mathbf{t}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \gamma\mathbf{n}. \end{array} \right.$$

Tenuto presente che $\frac{dP}{ds} = \mathbf{t}$, si ha intanto dalla prima, quadrando scalarmente,

$$(12) \quad \left(\frac{d^2P}{ds^2} \right)^2 = c^2.$$

Le sole linee per cui c si annulla identicamente sono le rette. Supponiamo che si tratti di effettive curve e escludiamo anche gli eventuali punti di inflessione (in cui c si annulla). Potremo in conformità ritenere $c > 0$, e ricavare dalla prima delle (11)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{c} \frac{d^2P}{ds^2},$$

dopo di che, da

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

segue

$$(13) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{c} \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2}.$$

Le (12) e (13) esprimono esplicitamente c e b per mezzo delle derivate prime e seconde di P rapporto ad s . La (8') definisce dunque la derivata di $P(s, t)$ rapporto alla variabile t , in funzione di elementi cognitivi, nonchè dello stesso punto incognito $P(s, t)$ e delle sue derivate (prima e seconda) rapporto ad s . Basta proiettare sugli assi coordinati per desumerne un *sistema normale* di equazioni alle derivate parziali nelle tre funzioni incognite $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$, coordinate di P . Le tre componenti della (8'), cioè

$$(8'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = \sigma k c b_x, \\ \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} = \sigma k c b_y, \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} = \sigma k c b_z \end{array} \right. \quad (7),$$

si presentano infatti risolte rispetto a $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, i secondi membri contenendo, oltre che elementi cognitivi, *derivate prime e seconde di x, y, z , riferentesi esclusivamente all'altra variabile indipendente s* .

Le (8'') costituiscono perciò un sistema *normale* in x, y, z , del primo ordine rispetto all'argomento t . Dai teoremi generali della KOWALEVSKY segue quindi (8) che assegnate arbitrariamente, per un valore iniziale t_0 di t , le determinazioni di x, y, z quali funzioni regolari dell'altro argomento s , se esistono integrali olomorfi $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$, questi rimangono univocamente determinati per $t > t_0$ (finchè tutto si comporta regolarmente). Ecco la conferma rigorosa delle considerazioni intuitive del n.º 4.

L'integrazione della (8') porta alla conoscenza di $P(s, t)$ e quindi fornisce la rappresentazione parametrica della direttrice C , in ogni istante t . Così la curva rimane completamente individuata, di forma e di posizione, rispetto al triedro di riferimento. Se però ci si accontenta di caratterizzare intrinsecamente la forma della C nei vari istanti t (prescindendo dalla sua ubicazione nello spazio), non occorre possedere addirittura $P(s, t)$, ma, come si sa dalla geometria differenziale, basta la conoscenza (istante per istante) di c e γ in termini di s . Complessivamente si tratta di procurarsi *due* funzioni scalari, $c(s, t)$ e $\gamma(s, t)$, anzichè *tre*, quante ne corrispondono a $P(s, t)$.

Vedremo nel capitolo seguente come si possa formare un sistema differenziale, anch'esso normale, atto appunto a definire le due funzioni c e γ , con che in

(7) Scrivo ora $\frac{\partial}{\partial t}$, anzichè $\frac{d}{dt}$, per uniformarmi alle consuetudini, in quanto qui, e qui soltanto, si tratta di discutere, come tale, un sistema di equazioni alle derivate parziali.

(8) Per orientamento in proposito e referenze bibliografiche, si può consultare LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Conferenze raccolte dal Dott. G. LAMPARIELLO, § 1 (Bologna, Zanichelli, 1931).

sostanza vien fatto di scindere il problema geometrico in due stadi: uno intrinseco che involge unicamente c e γ ; e uno complementare che consiste nel mettere a posto rispetto ad un dato riferimento una curva già intrinsecamente individuata (ad ogni singolo istante).

Quest'ultima fase equivale notoriamente al problema di determinare un moto rigido, nota (istante per istante) la velocità angolare rispetto ad assi solidali; problema che si riconduce ad una equazione di RICCATI ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Veggasi, ad esempio, LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, Vol. I (seconda edizione, Bologna, Zanichelli, 1930), Cap. III, pp. 224-227.

(Continua).