

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEON LICHTENSTEIN

**Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper.
Sechste Abhandlung. Weitere Beiträge zur Maxwellschen
Theorie der Saturnringe**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 1,
n° 1-2 (1932), p. 173-213

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_173_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GESTALT DER HIMMELSKÖRPER

SECHSTE ABHANDLUNG ⁽¹⁾

Weitere Beiträge zur Maxwell'schen Theorie der Saturnringe.

Von LEON LICHTENSTEIN (Leipzig).

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung.

ERSTES KAPITEL - *Permanenter Bewegungszustand des Ringes bei Vorhandensein eines störenden Körpers.*

§ 1. Grundgleichungen.

§ 2. Funktionaloperationen I und K .

§ 3. Grundgleichungen. Fortsetzung.

§ 4. Ein System linearer Integro-Differentialgleichungen. Periodische Lösungen.

§ 5. Bestimmung periodischer Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (75) und (76) durch sukzessive Approximationen.

ZWEITES KAPITEL - *Freie Schwingungen.*

Einleitung.

Den Entwicklungen dieser Arbeit liegt das bereits in der vierten Abhandlung betrachtete mechanische Modell zugrunde.

In dem Ursprung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems \hat{x}, \hat{y} möge sich eine punktförmige Masse M befinden. Auf der Kreislinie $C: \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = R^2$ sei ferner eine Massenbelegung konstanter Dichte μ für die Längeneinheit verteilt. Die einzelnen Teilchen können sich, unbehindert durch die Nachbarpartikel, nach allen Richtungen hin frei bewegen und üben keinerlei Spannkraft aufeinander aus ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Vgl. L. LICHTENSTEIN: *Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper*. Erste Abhandlung: Die Laplacesche Theorie des Erdmondes, Math. Zeitschr., 10 (1921), S. 130-159; Zweite Abhandlung: Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten, Math. Zeitschr., 12 (1922), S. 201-218; Dritte Abhandlung: Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper, Math. Zeitschr., 13 (1922), S. 82-118; Vierte Abhandlung: Zur Maxwell'schen Theorie der Saturnringe, Math. Zeitschr., 17 (1923), S. 62-110; Fünfte Abhandlung: Neue Beiträge zur Maxwell'schen Theorie der Saturnringe, Festschrift für H. v. Seeliger, Berlin, 1924, S. 200-227.

⁽²⁾ Betrachten wir irgendeine Verrückung der mit Masse belegten Kreislinie $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = R^2$, bei der der Punkt $P_0(\hat{x}, \hat{y})$ in $\dot{P}_0(\hat{x} + \Delta\hat{x}, \hat{y} + \Delta\hat{y})$ übergeht, unter $\Delta\hat{x}, \Delta\hat{y}$ Ortsfunktionen

Die einzelnen Massen sind durch Gravitationskräfte aneinander geknüpft. Die zwischen zwei in einer Entfernung r_{12} befindlichen Massen m_1 und m_2 wirkende Kraft soll den Wert

$$(1) \quad -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

der auf das logarithmische Potential führt, haben ⁽³⁾. Ein statisches Gleichgewicht kann natürlich nicht bestehen. Nimmt man aber an, dass das ganze System mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(2) \quad \omega = \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{R} (M + \pi\mu R)^{\frac{1}{2}}$$

um den Koordinatenursprung gleichförmig rotiert, so wird ein dynamisches Gleichgewicht wegen der hinzutretenden Zentrifugalkräfte möglich.

Dieser Bewegungszustand wird gestört, sobald dem System eine weitere punktförmige Masse M_s hinzugefügt wird. Wir nehmen an, dass M_s um den Körper M , der festgehalten wird, in der Ebene \hat{x}, \hat{y} gleichförmig rotiert. Die Entfernung der Masse M_s von dem Koordinatenursprung heisse R_s , die Winkelgeschwindigkeit sei β .

In der vierten Abhandlung ist gezeigt worden, dass im allgemeinen für hinreichend kleine Werte von $\frac{R}{R_s}$ und μ periodische Bewegungszustände des Systems existieren (vgl. a. a. O. S. 66-83). In dem ersten Kapitel dieser Arbeit wird dieser Existenzsatz auf beliebige μ ausgedehnt. Die Bestimmung periodischer Bewegungszustände hängt mit der Bestimmung periodischer Lösungen eines Systems nichtlinearer Integro-Differentialgleichungen zusammen, die durch sukzessive Approximationen erfolgt. Wie immer bilden die linearen Gleichungen, die man erhält, wenn man von den Gliedern zweiter und höherer Ordnung absieht, die natürliche Grundlage, auf der sich das Verfahren der

auf C verstanden, die stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Geht dabei das Bogenelement $d\hat{s}$ in P_0 in $d\hat{s}$ über, so wird die Dichte $\dot{\mu}$ der Masse in \dot{P}_0 der Gleichung $\dot{\mu}d\hat{s} = \mu d\hat{s}$ gemäss festgesetzt. Die Dichte $\dot{\mu}$, als Ortsfunktion auf C aufgefasst, hat augenscheinlich stetige Ableitung erster Ordnung.

Bei physikalischen und astronomischen Anwendungen hat man sich vorzustellen, dass die einzelnen Massenteilchen einander nicht berühren und μ die mittlere Dichte der Belegung darstellt. Die Gleichung $\dot{\mu}d\hat{s} = \mu d\hat{s}$ ist die Kontinuitätsgleichung.

⁽³⁾ Macht man die üblichen Ansätze für die Komponenten der Kräfte, die von der Gravitation des Ringes auf irgendeines seiner Teilchen herrühren, so kommt man auf Integrale, die nicht unbedingt konvergieren, jedoch bestimmte Cauchy'sche Hauptwerte haben. Das gleiche gilt, wenn der Ring eine in der vorstehenden Fussnote beschriebene Deformation erleidet. Diese Hauptwerte betrachten wir als Anziehungskräfte in unserem dynamischen Modell. Man kommt auf diese Ausdrücke, wenn man sich die gravitierende Masse zunächst über n gleich grosse, einander paarweise berührende Kreise verteilt denkt und nachher zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergeht.

sukzessiven Approximationen aufbaut. Im vorliegenden Falle bieten die « linearisierten Gleichungen » einige interessante Besonderheiten dar, auf die näher eingegangen wird (vgl. S. 190-200). Der Konvergenzbeweis stützt sich auf zwei Ungleichheitsbeziehungen, denen die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Ordnung unserer Integro- Differentialgleichungen genügt und die unter Heranziehung funktionentheoretischer Mittel gewonnen werden ⁽⁴⁾.

In dem zweiten Kapitel werden in Ausführung eines bereits in der vierten Abhandlung aufgestellten Programms (vgl. a. a. O. S. 64) kleine (*endliche*) periodische Bewegungen des Systems in der Nachbarschaft des dynamischen Gleichgewichtszustandes bei Abwesenheit eines störenden Körpers untersucht. *Es gibt, wie auch μ beschaffen sei, periodische Bewegungszustände, die sich als fortschreitende Wellen charakterisieren lassen.* Die Dauer einer Periode hängt von dem maximalen Ausschlag aus der Gleichgewichtslage ab, — diese Abhängigkeit tritt freilich erst in den Gliedern höherer Ordnung zum Vorschein. Eine mechanische Deutung dieses Resultates ist in der vierten Abhandlung (S. 64-65) gegeben worden (vgl. auch a. a. O. S. 103).

ERSTES KAPITEL

Permanenter Bewegungszustand des Ringes bei Vorhandensein eines störenden Körpers.

§ 1. - Grundgleichungen.

Wir gehen vom dynamischen Gleichgewichtszustande bei Abwesenheit eines störenden Körpers aus und beziehen die Lage des Ringes auf ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z , dessen Ursprung mit dem Ursprung des Systems \hat{x}, \hat{y} und dessen x, y -Ebene mit der Ebene \hat{x}, \hat{y} zusammenfällt. Wir nehmen an, dass das System x, y, z um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig rotiert. Zur Zeit $t=0$ sollen die beiden Achsenpaare $x, \hat{x}; y, \hat{y}$ koinzidieren. Die Lage eines bestimmten Massenteilchens P_0 des Ringes (Fig. 1) ist durch seine Polarkoordinaten $R, \frac{s}{R}$ in bezug auf das rotierende Achsenkreuz

(4) Man vergleiche in diesem Zusammenhang meine kürzlich erschienene Monographie: *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro- Differentialgleichungen nebst Anwendungen*, Berlin 1931. Dort werden u. a. Systeme von nichtlinearen Integro- Differentialgleichungen, die sich bei verschiedenen Problemen der mathematischen Physik darbieten, durch sukzessive Approximationen gelöst. Der Konvergenzbeweis wird mutatis mutandis in einheitlicher Weise unter Zugrundelegung der beiden vorhin erwähnten fundamentalen Ungleichheiten geführt.

vollkommen bestimmt ⁽⁵⁾. Tritt eine störende Kraft hinzu, so wird das Teilchen P_0 im Laufe der Zeit seine Lage gegen die rotierenden Achsen, allgemein zu reden, ändern, seine Polarkoordinaten werden die Werte

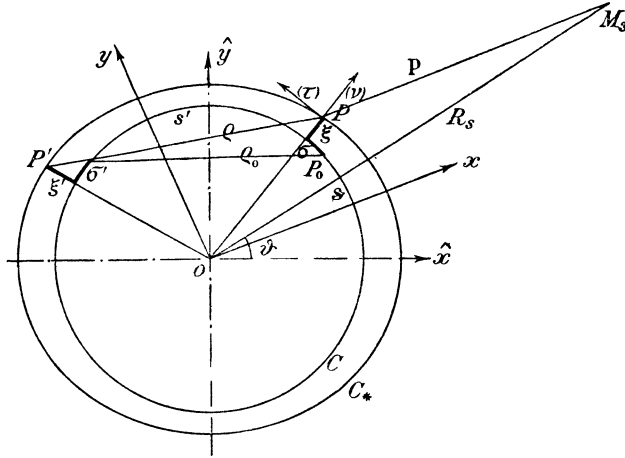


Fig. 1.

$$(3) \quad R + \xi, \quad \frac{s + \sigma}{R},$$

unter ξ und σ gewisse Funktionen der Amplitude $\frac{s}{R}$ und der Zeit t verstanden, annehmen.

Im Laufe der weiteren Betrachtungen wird es sich stets um kleine Be-

wegungen handeln. Wir wollen ein für allemal $|\xi| < R$ voraussetzen.

Es gilt jetzt

$$(4) \quad \hat{x} = (R + \xi) \cos \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right), \quad \hat{y} = (R + \xi) \sin \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right),$$

mithin

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} &= -(R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \sin \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \cos \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right), \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial t} &= (R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \cos \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \sin \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right), \end{aligned}$$

so dass die kinetische Energie \hat{T} den Wert

$$(6) \quad \hat{T} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} (R + \xi)^2 \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

hat. Man findet weiter leicht die Formeln

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{R^2} (R + \xi)^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ Hier ist s die von dem Punkte $(R, 0)$ bis zu dem gerade betrachteten Punkte gezählte Länge des Bogens des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Massenpunktes $\left(R, \frac{s}{R}\right)$ sind demnach

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 &= Q_\xi, \\ \frac{1}{R^2} (R + \xi)^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= Q_\sigma. \end{aligned}$$

Hier bezeichnen $Q_\xi \delta \xi$ und $Q_\sigma \delta \sigma$ virtuelle Arbeiten der Gravitationskräfte, die auf eine in $\left(R + \xi, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ befindliche Einheit der Masse wirken, bei ihrem Übergang in die Punkte $\left(R + \xi + \delta \xi, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ bzw. $\left(R + \xi, \frac{s + \sigma + \delta \sigma}{R}\right)$.

Sei C_* der geometrische Ort der Punkte $P = \left(R + \xi, \frac{s + \sigma}{R}\right)$. Dem Bogenelement ds von C entspricht das Bogenelement ds_* auf C_* . Wird die Liniendichte in s_* auf C_* mit μ_* bezeichnet, so gilt die Kontinuitätsgleichung

$$(9) \quad \mu ds = \mu_* ds_* \quad (6).$$

Sei ϱ die Entfernung des Punktes $P = \left(R + \xi, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ von einem beliebigen Punkte $P' = \left(R + \xi', \frac{s' + \sigma'}{R}\right)$ auf C_* . Der von der Eigengravitation des Ringes herrührende Beitrag zu Q_ξ hat den Wert

$$(10) \quad \varkappa \int_{C_*} \mu_*' ds_*' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} = \varkappa \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho}.$$

Hier bezeichnet ds_*' das Bogenelement der Kurve C_* im Punkte P' ; die Massendichte ist dort gleich μ_*' . Ferner bezeichnet das Symbol $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Ableitung in der Richtung der Normale zu C in P (Fig. 1). Die Integrale (10) sind als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen. Diese sind gewiss vorhanden, wenn, wie vorausgesetzt werden soll, ξ und σ , als Funktionen von s aufgefasst, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben (7). Man kommt auf den Ausdruck (10) für die Anziehungskraft, wenn man sich die gravitierende Masse zunächst über n gleich grosse, einander berührende Kreise, deren Mittelpunkte auf C_* liegen, verteilt denkt und nachher zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergeht.

(6) Vgl. die Fussnote (2). Augenscheinlich kann man *einen* Punkt des gestörten Ringes einem beliebigen Punkte des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ zuordnen. Ist aber die Wahl einmal getroffen, so ist damit auch die paarweise Zuordnung aller übrigen Punkte der beiden Figuren vollkommen bestimmt. Wegen (9) ist nämlich

$$\int \mu ds = \int \mu_* ds_*,$$

die Integration links und rechts zwischen zusammengehörigen Punktepaaren auf C und C_* erstreckt gedacht.

(7) Man vergleiche die Betrachtungen auf S. 180-183 sowie die Ausführungen in dem IV Kapitel der vierten Abhandlung dieser Reihe.

Der Beitrag der Gravitationskräfte des Ringes zu Q_σ hat, wie man sich leicht überzeugt, den Wert

$$(11) \quad \varkappa \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \int_{\dot{C}_*} \mu_*' ds_*' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho} = \varkappa \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \int_{\dot{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho},$$

unter $\frac{\partial}{\partial \tau}$ die Ableitung in der Richtung senkrecht auf (ν) in P verstanden (Fig. 1) ⁽⁸⁾.

Ist die Entfernung des störenden Körpers M_s von P gleich P , so sind die von seiner Anziehung herrührenden Beiträge zu Q_ξ und Q_σ entsprechend gleich

$$(12) \quad \varkappa M_s \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{P} \quad \text{und} \quad \varkappa \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) M_s \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{P} \quad (9).$$

Die Anziehung des Zentralkörpers gibt nur zu Q_ξ einen Beitrag. Dieser hat den Wert

$$(13) \quad -\frac{M\varkappa}{R + \xi}.$$

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lauten demnach

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \\ = -\frac{M\varkappa}{R + \xi} + \varkappa \int_{\dot{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} + \varkappa M_s \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{P}, \\ (R + \xi)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ = \varkappa \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \int_{\dot{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho} + \varkappa \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) M_s \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{P}. \end{aligned}$$

Sei ϱ_0 der Abstand der Punkte $R, \frac{s}{R}$ und $R, \frac{s'}{R}$ auf C , (ν_0) die nach aussen gerichtete Normale, (τ_0) die Tangente in $\left(R, \frac{s}{R}\right)$ zu C . Wie man leicht sieht, ist

$$(15) \quad \int_{\dot{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu_0} \log \frac{R}{\varrho_0} = -\pi\mu, \quad \int_{\dot{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{R}{\varrho_0} = 0.$$

Es sei Ω_0 eine hinreichend kleine Zahl, und es möge

$$(16) \quad |\xi|, |\sigma|, \left| \frac{\partial \xi}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \right| \leq \Omega_0$$

⁽⁸⁾ In der Tat ist z. B., unter \hat{X} und \hat{Y} vorübergehend die Komponenten der betrachteten Gravitationskräfte in der Richtung der \hat{x} - und der \hat{y} -Achse verstanden, der gesuchte Beitrag zu Q_σ gleich

$$\begin{aligned} \left(\hat{X} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \sigma} + \hat{Y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \sigma} \right) \delta \sigma = \delta \sigma \left\{ -\hat{X} \sin \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right) + \hat{Y} \cos \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right) \right\} \frac{R + \xi}{R} \\ = \varkappa \delta \sigma \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \int_{\dot{C}_*} \mu_*' ds_*' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho}. \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ Vgl. die Fussnote ⁽⁸⁾.

sein. Wie wir alsbald zeigen werden, lässt sich der Ausdruck

$$\int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{\varrho}$$

in eine Reihe von der Form

$$(17) \quad I = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{\varrho} = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial v_0} \log \frac{R}{\varrho_0} + I^{(1)} + I^{(2)} + \dots \\ = -\pi\mu + I^{(1)} + \hat{I}$$

entwickeln, unter $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(n)}, \dots$ Integralausdrücke verstanden, die in bezug auf $\xi, \sigma; \xi', \sigma'$ und ihre Ableitungen erster Ordnung nach s bzw. s' entsprechend vom 1^{ten}, 2^{ten}, ..., n ^{ten}, ... Grade sind.

Ebenso gilt

$$(18) \quad K = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho} = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{R}{\varrho_0} + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots \\ = K^{(1)} + \hat{K}$$

Mit Rücksicht auf (17) und (18) kann man (14) nach einer naheliegenden Vereinfachung auf die Form bringen

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (R + \xi) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + \frac{\varkappa}{R} (M + \pi R \mu) - \frac{M \varkappa}{R^2} \xi - \varkappa I^{(1)} \\ = -M \varkappa \left(\frac{1}{R + \xi} - \frac{1}{R} + \frac{\xi}{R^2} \right) + \varkappa \hat{I} + \varkappa M_s \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{P},$$

$$(20) \quad (R + \xi) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2 \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} - \varkappa K^{(1)} = \varkappa \hat{K} + \varkappa M_s \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{P}.$$

Wir setzen

$$(21) \quad \omega^2 = \frac{\varkappa}{R^2} (M + \pi R \mu)$$

und erhalten nach einer weiteren leichten Umformung

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \left(\omega^2 + \frac{M \varkappa}{R^2} \right) \xi - \varkappa I^{(1)} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + 2\xi \frac{\omega}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \xi \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \\ - M \varkappa \frac{1}{R} \left(\frac{\xi^2}{R^2} - \frac{\xi^3}{R^3} + \dots \right) + \varkappa \hat{I} + \varkappa M_s \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{P},$$

$$(23) \quad R \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2R\omega \frac{\partial \xi}{\partial t} - \varkappa R K^{(1)} = -\xi \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varkappa R \hat{K} + \varkappa R M_s \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{P}.$$

Jetzt finden sich Glieder erster Ordnung links, Glieder zweiter und höherer Ordnung rechts vereinigt.

§ 2. - Funktionaloperationen I und K .

Bevor zur weiteren Behandlung der Differentialgleichungen (22), (23) und, was unser nächstes Ziel ist, zu einer Restimmung ihrer periodischen Lösungen geschritten werden kann, müssen die Entwicklungen (17) und (18) abgeleitet

werden. Insbesondere erscheinen explizite Ausdrücke für $I^{(4)}$ und $K^{(4)}$ von Interesse.

Zu dem Zwecke betrachten wir, wie wiederholt früher bei ähnlichen Untersuchungen ⁽¹⁰⁾, neben C und C_* eine einparametrische Schar geschlossener ebener

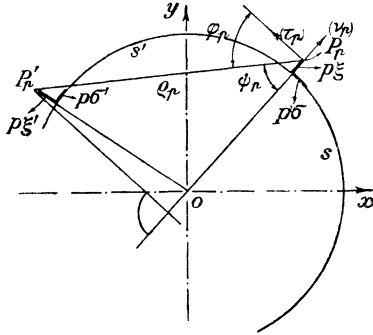


Fig. 2.

Kurven C_p , die sich symbolisch in der Form $C+p(C_*-C)$ darstellen lässt. Dem Punkte $P=(R+\xi, \frac{s+\sigma}{R})$ auf C_* entspricht auf C_p der Punkt mit den Polarkoordinaten $R+p\xi, \frac{s+p\sigma}{R}$. Augenscheinlich ist die Kurve C_p stetig gekrümmt.

Es sei q_p der Abstand der Punkte

$$P_p = \left(R + p\xi, \frac{s + p\sigma}{R} \right)$$

und

$$P_{p'} = \left(R + p\xi', \frac{s' + p\sigma'}{R} \right),$$

es möge (ν_p) die Normale zu C durch P_p (vgl. Fig. 2), ψ_p den von den beiden Vektoren $\vec{P_p P_{p'}}$ und $\vec{P_p O}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnen. Betrachten wir den Ausdruck (vgl. Fig. 2)

$$\begin{aligned} (24) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{q_p} &= -\frac{\cos \psi_p}{q_p} = -\frac{1}{q_p^2} \left[R + p\xi - (R + p\xi') \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right] \\ &= - \left[R + p\xi - (R + p\xi') \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right] \left[(R + p\xi)^2 + (R + p\xi')^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(R + p\xi)(R + p\xi') \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right]^{-1} \\ &= - \left[R + p\xi - (R + p\xi') \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right] \left[R^2 + 2Rp\xi + p^2\xi^2 \right. \\ &\quad \left. + R^2 + 2Rp\xi' + p^2\xi'^2 - 2(R^2 + Rp(\xi + \xi') + p^2\xi\xi') \left(\cos \frac{s' - s}{R} \cos \frac{p(\sigma' - \sigma)}{R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \frac{s' - s}{R} \sin \frac{p(\sigma' - \sigma)}{R} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Das Integral

$$(25) \quad I_p = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{q_p},$$

wie die vorhin betrachteten Integralausdrücke (17) und (18) als Cauchyscher Hauptwert aufgefasst, hat, falls ξ, σ und ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung absolut hinreichend klein sind, etwa die Ungleichheiten (16) erfüllen,

⁽¹⁰⁾ Man vergleiche bsp. meine erste Abhandlung zur *Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Math. Zeitschr., 1 (1918), S. 229-284, insb. S. 239 ff.

für alle reellen und *komplexen* p mit $|p| \leq p^*$, $p^* > 1$ eine bestimmte Bedeutung und stellt eine in der Kreisfläche $|p| < p^*$ analytische und reguläre Funktion von p dar. Dies kann man leicht so zeigen. Es sei \bar{C} derjenige Teil von C , der in einer Kreisfläche um P vom Radius \bar{r} enthalten ist. Es ist

$$(26) \quad I_p = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \int_{\bar{C}-\bar{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial v_p} \log \frac{R}{\varrho_p}.$$

Der Integralausdruck rechts ist gewiss für alle $\bar{r} > 0$ und alle p mit $|p| \leq p^*$ regulär, und da, wie man sich wegen (16) leicht überzeugt, der Grenzübergang gleichmässig ist, so ist auch I_p , wie behauptet, in der Kreisfläche $|p| < p^*$ regulär ⁽¹¹⁾. Es gilt darum

$$(27) \quad I_p = I^{(0)} + pI^{(1)} + \dots + p^m I^{(m)} + \dots$$

mit

$$(28) \quad I^{(m)} = \frac{1}{m!} \int_{\bar{C}} \mu ds' \left[\frac{\partial^m}{\partial p^m} \frac{\partial}{\partial v_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right]_{p=0} \quad (12),$$

⁽¹¹⁾ Gelten, wie vorausgesetzt worden ist, die Beziehungen (16), so ist für alle $|p| \leq p^*$ gewiss

$$\frac{\varrho_p}{\varrho} = 1 + k(p) \quad \text{mit} \quad |k(p)| < 1.$$

Ferner ist

$$R + p\xi - (R + p\xi') \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} = p(\xi - \xi') + (R + p\xi') \left[1 - \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right].$$

Der Klammerausdruck verhält sich für $s' \rightarrow s$ wie ϱ^2 . Augenscheinlich bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\int_{\bar{C}-\bar{C}} \frac{\xi' - \xi}{\varrho_p^2} ds'$$

für $\bar{r} \rightarrow 0$ gleichmässig konvergiert. Es sei $\bar{r}_1 < \bar{r}$, und es möge \bar{C}_1 den in der Kreisfläche vom Radius \bar{r}_1 um P enthaltenen Teil von C bezeichnen. Offenbar ist \bar{C}_1 ganz in \bar{C} enthalten. Unsere Behauptung ist bewiesen, sobald gezeigt ist, dass

$$\int_{\bar{C}-\bar{C}_1} \frac{\xi' - \xi}{\varrho_p^2} ds'$$

für $\bar{r} \rightarrow 0$ und alle $\bar{r}_1 < \bar{r}$ gegen Null konvergiert und zwar für alle P auf C gleichmässig. Nun ist

$$\int_{\bar{C}-\bar{C}_1} \frac{\xi' - \xi}{\varrho_p^2} ds' = \frac{\partial \xi}{\partial s} \int_{\bar{C}-\bar{C}_1} \frac{s' - s}{\varrho_p^2} ds' + \frac{1}{2} \int_{\bar{C}-\bar{C}_1} \frac{(s' - s)^2}{\varrho_p^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} ds',$$

unter $\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ den Wert der fraglichen Ableitung in einem geeigneten zwischen s und s' gelegenen Punkte verstanden. Der zweite Summand konvergiert, wie unmittelbar ersichtlich, für $\bar{r} \rightarrow 0$ und zwar gleichmässig. Dass auch der erste Summand diese Eigenschaft hat, sieht man nach einigen Zwischenrechnungen, wenn man allemal die zu den entgegengesetzt gleichen Werten von $s' - s$ gehörigen Integrationselemente zusammenfasst.

⁽¹²⁾ Es ist leicht einzusehen, dass alle Integralausdrücke $I^{(m)}$, als Cauchysche Hauptwerte

und für $p=1$

$$(30) \quad \int_{\bar{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} = I^{(0)} + I^{(1)} + I^{(2)} + \dots + I^{(m)} + \dots$$

Augenscheinlich ist

$$I^{(0)} = \int_{\bar{C}} \mu' ds' \frac{\partial}{\partial \nu_0} \log \frac{R}{\varrho_0} = -\pi\mu.$$

Des weiteren ist

$$(31) \quad I^{(1)} = \int_{\bar{C}} \mu ds' \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right)_{p=0}$$

und nach (24)

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{\varrho_p} = \frac{1}{\varrho_p^4} \frac{\partial \varrho_p^2}{\partial p} \left[R + p\xi - (R + p\xi') \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right] \\ - \frac{1}{\varrho_p^2} \left[\xi - \xi' \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} + (R + p\xi') \frac{\sigma' - \sigma}{R} \sin \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right].$$

Ferner ist

$$(33) \quad \frac{\partial(\varrho_p^2)}{\partial p} = 2(R + p\xi)\xi + 2(R + p\xi')\xi' - 2[(R + p\xi)\xi' + (R + p\xi')\xi] \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \\ + 2(R + p\xi)(R + p\xi') \frac{\sigma' - \sigma}{R} \sin \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R},$$

darum

$$(34) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right)_{p=0} = \frac{2}{\varrho_0^4} \left[R\xi + R\xi' - (R\xi' + R\xi) \cos \frac{s' - s}{R} \right. \\ \left. + R(\sigma' - \sigma) \sin \frac{s' - s}{R} \right] \left[R - R \cos \frac{s' - s}{R} \right] - \frac{1}{\varrho_0^2} \left[\xi - \xi' \cos \frac{s' - s}{R} + (\sigma' - \sigma) \sin \frac{s' - s}{R} \right] \\ = \frac{4R^2}{\varrho_0^4} \left[2(\xi + \xi') \sin^2 \frac{s' - s}{2R} + (\sigma' - \sigma) \sin \frac{s' - s}{R} \right] \sin^2 \frac{s' - s}{2R} \\ - \frac{1}{\varrho_0^2} \left[\xi - \xi' \cos \frac{s' - s}{R} + (\sigma' - \sigma) \sin \frac{s' - s}{R} \right].$$

Nun ist aber

$$\varrho_0^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{s' - s}{2R},$$

so dass (34) sich zu

$$(35) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right)_{p=0} = \frac{4R^2}{\varrho_0^4} \sin^2 \frac{s' - s}{2R} \left[2(\xi + \xi') \sin^2 \frac{s' - s}{2R} - \xi + \xi' - 2\xi' \sin^2 \frac{s' - s}{2R} \right] \\ = \frac{4R^2}{\varrho_0^4} \sin^2 \frac{s' - s}{2R} \left[2\xi \sin^2 \frac{s' - s}{2R} - \xi + \xi' \right] = \frac{\xi}{2R^2} - \frac{\xi - \xi'}{\varrho_0^2}$$

aufgefasst, einen bestimmten Sinn haben. In der Tat ist dem in der Fussnote ⁽¹¹⁾ benutzten Satze über die Folgen analytischer Funktionen zufolge

$$(29) \quad I^{(m)} = \lim_{\bar{C} \rightarrow 0} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m}{\partial p^m} \int_{\bar{C}-\bar{C}} \mu ds' \left(\frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right) \right]_{p=0} \\ = \lim_{\bar{C} \rightarrow 0} \frac{1}{m!} \int_{\bar{C}-\bar{C}} \mu ds' \left[\frac{\partial^m}{\partial p^m} \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right]_{p=0}.$$

vereinfacht. Man bestätigt leicht, dass der Integralausdruck

$$(36) \quad I^{(1)} = \int_C \mu ds' \left(\frac{\xi}{2R^2} - \frac{\xi - \xi'}{\varrho_0^2} \right) = \frac{\pi\mu\xi}{R} - \mu \int_C \frac{\xi - \xi'}{\varrho_0^2} ds',$$

als Cauchyscher Hauptwert aufgefasst, eine bestimmte Bedeutung hat.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen gewinnen wir die Entwicklung

$$(37) \quad \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{R}{\varrho} = K^{(0)} + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots$$

mit

$$(38) \quad K^{(m)} = \frac{1}{m!} \int_C \mu ds' \left(\frac{\partial^m}{\partial p^m} \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho} \right)_{p=0}.$$

Insbesondere ist

$$(39) \quad K^{(0)} = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{R}{\varrho_0} = 0$$

und

$$(40) \quad K^{(1)} = \int_C \mu ds' \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho} \right)_{p=0}.$$

Er ist nun (vgl. die Fig. 2)

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho_p} = \frac{\varrho_p \cos \varphi_p}{\varrho_p^2} = \frac{1}{\varrho_p^2} (R + p\xi') \sin \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R},$$

mithin

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho_p} &= -\frac{1}{\varrho_p^4} \frac{\partial(\varrho_p^2)}{\partial p} (R + p\xi') \sin \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \\ &+ \frac{1}{\varrho_p^2} \left[\xi' \sin \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} + (R + p\xi') \frac{\sigma' - \sigma}{R} \cos \frac{s' - s + p(\sigma' - \sigma)}{R} \right]. \end{aligned}$$

Beachtet man (33), so findet man

$$(43) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right)_{p=0} &= -\frac{2R^2}{\varrho_0^4} \left(\xi + \xi' - (\xi + \xi') \cos \frac{s' - s}{R} + (\sigma' - \sigma) \sin \frac{s' - s}{R} \right) \sin \frac{s' - s}{R} \\ &+ \frac{1}{\varrho_0^2} \left[\xi' \sin \frac{s' - s}{R} + (\sigma' - \sigma) \cos \frac{s' - s}{R} \right] = -\frac{2R^2}{\varrho_0^4} \sin \frac{s' - s}{R} \left[2(\xi + \xi') \sin^2 \frac{s' - s}{2R} \right. \\ &\left. + (\sigma' - \sigma) \sin \frac{s' - s}{R} \right] + \frac{1}{\varrho_0^2} \left[\xi' \sin \frac{s' - s}{R} + (\sigma' - \sigma) \cos \frac{s' - s}{R} \right] \end{aligned}$$

oder nach einer einfachen Umformung mit Rücksicht auf $\varrho_0^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{s' - s}{2R}$

$$(44) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right)_{p=0} = -\frac{\sigma' - \sigma}{\varrho_0^2} - \frac{\xi}{\varrho_0^2} \sin \frac{s' - s}{R}.$$

Da ferner

$$\int_C \frac{1}{\varrho_0^2} \sin \frac{s' - s}{R} ds' = 0$$

ist, so erhalten wir endgültig

$$(45) \quad K^{(1)} = \int_C \mu ds' \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \tau_p} \log \frac{R}{\varrho_p} \right)_{p=0} = -\mu \int_C \frac{\sigma' - \sigma}{\varrho_0^2} ds',$$

und auch hier kann man leicht verifizieren, dass $K^{(4)}$, als ein Cauchyscher Hauptwert aufgefasst, eine bestimmte Bedeutung hat. Setzt man die eben gefundenen Werte von $I^{(4)}$ und $K^{(4)}$ in die Bewegungsgleichungen (22) und (23) ein, so erhält man

$$(46) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2\omega^2 \xi + \kappa \mu \int_C \frac{\xi - \xi'}{e^{\frac{1}{2}\sigma}} ds' = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + 2\xi \frac{\omega}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ + \xi \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 - M\kappa \frac{1}{R} \left(\frac{\xi^2}{R^2} - \frac{\xi^3}{R^3} + \dots \right) + \kappa \hat{I} + \kappa M_s \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{P},$$

$$(47) \quad R \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2R\omega \frac{\partial \xi}{\partial t} + \kappa \mu R \int_C \frac{\sigma' - \sigma}{e^{\frac{1}{2}\sigma}} ds' = -\xi \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \kappa R \hat{K} \\ + \kappa R M_s \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{P}.$$

Es sei

$$(48) \quad \Omega = \text{Max} \left\{ |\xi|, |\sigma|; \left| \frac{\partial \xi}{\partial s} \right|, \dots, \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \right| \right\}.$$

Wie wir sogleich zeigen werden, ist, wenn Ω hinreichend klein, etwa $\Omega \leq \frac{1}{2} \Omega_0$, vorausgesetzt wird,

$$(49) \quad |\hat{I}|, |\hat{K}| \leq a_1 \Omega^2,$$

unter a_1 eine Konstante verstanden, wie später unter a_2, a_3, \dots . Wir führen zum Beweise eine einparametrische Schar geschlossener ebener Kurven C_p ein, indem wir dem Punkte $P = \left(R + \xi, \frac{s + \sigma}{R} \right)$ auf C_* den Punkt

$$R + \frac{p}{\Omega} \xi, \quad \frac{1}{R} \left(s + \frac{p}{\Omega} \sigma \right)$$

zuordnen, und bezeichnen den zu C_p gehörigen Wert des Integralausdruckes I mit I_p ,

$$(50) \quad I_p = \int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu_p} \log \frac{R}{e_p}.$$

Für $p=0$ deckt sich C_p mit C , für $p=\Omega$ aber mit C_* ; darum ist I_p für $p=\Omega$ gleich I , für $p=0$ aber gleich I_0 . Den Entwicklungen auf S. 180-182 gemäss ist I_p eine in der Kreisfläche $|p| \leq \Omega_0$ stetige, für $|p| < \Omega_0$ reguläre Funktion von p , übrigens auch, wenn man unter ξ und σ beliebige der Beziehung $\Omega \leq \frac{1}{2} \Omega_0$ genügende, nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige *komplexe* Ortsfunktionen auf C versteht.

Wir finden jetzt augenscheinlich

$$(51) \quad I_p = I^{(0)} + I^{(1)} \frac{p}{\Omega} + I^{(2)} \frac{p^2}{\Omega^2} + \dots + I^{(m)} \frac{p^m}{\Omega^m} + \dots$$

Es sei Γ der Kreis vom Radius Ω_0 um den Koordinatenursprung in der komplexen Ebene der Variablen p . Für alle $|p| \leq \Omega$ ist gewiss

$$(52) \quad I_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{I_\delta}{\delta - p} d\delta, \quad \delta = \Omega_0 e^{i\psi}, \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$

sowie weiter

$$(53) \quad \frac{\partial^2 I_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}^2} = \frac{2}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{I_{\delta}}{(\delta - \mathbf{p})^3} d\delta.$$

Wie man sich ohne ernstliche Schwierigkeiten überzeugt, ist für alle der Beziehung $\Omega \leq \frac{1}{2} \Omega_0$ genügenden reellen oder komplexen ξ und σ und alle $\delta = \Omega_0 e^{i\nu}$

$$(54) \quad |I_{\delta}| \leq a_2 \quad (13).$$

Wegen $\Omega \leq \frac{1}{2} \Omega_0$ ist

$$|\delta - \mathbf{p}| \geq \frac{1}{2} \Omega_0, \quad \frac{1}{\delta - \mathbf{p}} \leq \frac{2}{\Omega_0},$$

darum

$$(55) \quad \left| \frac{\partial^2 I_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}^2} \right| \leq \frac{2}{2\pi} \cdot 2\pi \Omega_0 \cdot \frac{8a_2}{\Omega_0^3} = \frac{16a_2}{\Omega_0^2}.$$

Beachtet man, dass

$$(56) \quad \hat{I} = I^{(2)} + I^{(3)} + \dots = I - I^{(0)} - I^{(1)} = \int_0^{\Omega} d\mathbf{p}_1 \int_0^{\mathbf{p}_1} \frac{\partial^2 I_{\mathbf{p}_2}}{\partial \mathbf{p}_2^2} d\mathbf{p}_2$$

gesetzt werden kann, so überzeugt man sich sogleich, dass in der Tat

$$(57) \quad |\hat{I}| \leq a_1 \Omega^2$$

gilt. In einer ganz ähnlichen Weise wird gezeigt, dass auch

$$(57') \quad |\hat{K}| \leq a_1 \Omega^2$$

ist.

Wir nehmen von nun an $\Omega \leq \frac{1}{4} \Omega_0$ an und bezeichnen mit $\dot{\xi}, \dot{\sigma}$ ein System ganz wie ξ, σ beschaffener, reeller oder komplexer Funktionen, so dass insbesondere

$$(58) \quad |\dot{\xi}|, |\dot{\sigma}|, \left| \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial s} \right|, \dots, \left| \frac{\partial^2 \dot{\sigma}}{\partial s^2} \right| \leq \Omega \leq \frac{1}{4} \Omega_0$$

gilt. Es sei weiter

$$(59) \quad |\dot{\xi} - \xi|, |\dot{\sigma} - \sigma|, \left| \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\xi} - \xi) \right|, \dots, \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\dot{\sigma} - \sigma) \right| \leq \bar{\sigma} \leq \frac{1}{2} \Omega.$$

Die zu $\dot{\xi}, \dot{\sigma}$ gehörige, C_* entsprechende Kurve heisse \dot{C}_* . Der zugehörige Wert des Integralausdruckes I ist

$$(60) \quad \dot{I} = \int_{\dot{C}} \mu ds' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho},$$

unter ϱ der Abstand der Punkte $\left(R + \xi, \frac{s + \dot{\sigma}}{R} \right)$ und $\left(R + \xi', \frac{s' + \dot{\sigma}'}{R} \right)$ verstanden.

Dem Integralausdruck \hat{I} entspricht jetzt ein ganz analog gebauter Ausdruck $\overset{\wedge}{\dot{I}}$. Dann gilt eine Ungleichheit von der Form

$$(61) \quad |\overset{\wedge}{\dot{I}} - \hat{I}| \leq a_3 \bar{\sigma} \Omega.$$

(13) Man vergleiche namentlich die Formel (24) und die Bemerkungen der Fussnote (11).

Zum Beweise schalten wir zwischen C_* und \dot{C}_* eine stetige einparametrische Schar von Kurven C_{*q} ein, indem wir diesmal dem Punkte $P = \left(R + \xi, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ auf C_* den Punkt $P_q = \left(R + \xi + q \frac{\dot{\xi} - \xi}{\sigma}, \frac{1}{R} \left(s + \sigma + q \frac{\dot{\sigma} - \sigma}{\sigma}\right)\right)$ zuordnen. Für $q=0$ deckt sich C_{*q} mit C_* , für $q=\sigma$ mit \dot{C}_* .

Der Integralausdruck

$$\int_C \mu ds' \frac{\partial}{\partial v_q} \log \frac{R}{\varrho_q},$$

(ϱ_q Abstand der Punkte P_q und P'_q , v_q der vom Kreismittelpunkt nach P_q hin gerichtete Vektor), der sich für $q=0$ mit I , für $q=\sigma$ aber mit \dot{I} deckt, ist eine für alle reellen oder komplexen q mit $|q| \leq \Omega$ stetige, für alle $|q| < \Omega$ reguläre Funktion von q .

Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, wenn man die Formel (24) und die darauf folgenden Entwicklungen betrachtet und beachtet, dass für alle $|q| \leq \Omega$ wegen (48) und (59)

$$(62) \quad \left| \xi + q \frac{\dot{\xi} - \xi}{\sigma} \right|, \quad \left| \sigma + q \frac{\dot{\sigma} - \sigma}{\sigma} \right| \leq \Omega + \Omega = 2\Omega \leq \frac{1}{2} \Omega_0.$$

Also hat auch der zu I_q gehörige Ausdruck \hat{I}_q die gleiche Eigenschaft ⁽¹⁴⁾.

Es sei jetzt I_0 der Kreis vom Radius Ω um den Koordinatenursprung in der Ebene der komplexen Veränderlichen q . Es gilt dann für alle $|q| \leq \sigma$ gewiss

$$(63) \quad \hat{I}_q = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_0} \frac{\hat{I}_\vartheta}{q - \vartheta} d\vartheta, \quad \vartheta = \Omega e^{i\psi}, \quad 0 \leq \psi < 2\pi,$$

mithin

$$(64) \quad \frac{\partial \hat{I}_q}{\partial q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_0} \frac{\hat{I}_\vartheta}{(\vartheta - q)^2} d\vartheta.$$

Wegen

$$|\vartheta - q| \geq \frac{1}{2} \Omega \quad \text{und} \quad |\hat{I}_\vartheta| \leq \alpha_1 \Omega^2 \quad (15)$$

⁽¹⁴⁾ Es gilt

$$\hat{I} = I - I^{(0)} - I^{(4)}$$

mit

$$I^{(0)} = -\pi\mu \quad \text{und} \quad I^{(4)} = \frac{\pi\mu\xi}{R} - \mu \int \frac{\xi - \xi'}{\varrho_0^3} ds'.$$

Im vorliegenden Falle tritt für ξ der Ausdruck $\xi + q \frac{\dot{\xi} - \xi}{\sigma}$ ein. Wir finden

$$\hat{I}_q = I_q + \pi\mu - \frac{\pi\mu}{R} \left(\xi + q \frac{\dot{\xi} - \xi}{\sigma} \right) + \mu \int \frac{ds'}{\varrho_0^3} \left[\xi - \xi' + q \frac{\dot{\xi} - \xi - \dot{\xi}' + \xi'}{\sigma} \right].$$

Es ist darum tatsächlich \hat{I}_q eine für alle $|q| \leq \Omega$ stetige, für $|q| < \Omega$ reguläre Funktion von q .

⁽¹⁵⁾ Man beachte die Ungleichheiten (62) und die analogen Ungleichheiten, denen die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\xi + q \frac{\dot{\xi} - \xi}{\sigma}$ und $\sigma + q \frac{\dot{\sigma} - \sigma}{\sigma}$ genügen. Sie entsprechen der Beziehung $\Omega \leq \frac{1}{2} \Omega_0$, die bei der Ableitung von (49) zugrunde gelegt worden ist.

ist

$$(65) \quad \left| \frac{\partial \hat{I}_q}{\partial q} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi \Omega \alpha_1 \Omega^2 4}{\Omega^2} = 4\alpha_1 \Omega,$$

darum infolge

$$(66) \quad \hat{I} - \hat{I} = \int_0^{\bar{\sigma}} \frac{\partial \hat{I}_q}{\partial q} dq,$$

wie behauptet,

$$(67) \quad |\hat{I} - \hat{I}| \leq \alpha_3 \bar{\sigma} \Omega.$$

In einer ganz ähnlichen Weise kann man zeigen, dass, in naheliegender Bezeichnungweise,

$$(67') \quad |\hat{K} - \hat{K}| \leq \alpha_4 \bar{\sigma} \Omega$$

gilt.

Vorhin ist $\bar{\sigma} \leq \frac{1}{2} \Omega$ angenommen worden. Diese Einschränkung kann man auf folgende Weise aufheben. Neben den Kurven C_* und \hat{C}_* betrachten wir die Kurven $C_{*\frac{1}{4}}$, $C_{*\frac{1}{2}}$, $C_{*\frac{3}{4}}$, indem wir dem Punkte P auf C_* entsprechend die Punkte

$$(68) \quad \begin{aligned} R + \xi + \frac{1}{4}(\xi - \xi), & \quad s + \frac{1}{R} \left(\sigma + \frac{1}{4}(\sigma - \sigma) \right), \\ R + \xi + \frac{1}{2}(\xi - \xi), & \quad s + \frac{1}{R} \left(\sigma + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma) \right), \\ R + \xi + \frac{3}{4}(\xi - \xi), & \quad s + \frac{1}{R} \left(\sigma + \frac{3}{4}(\sigma - \sigma) \right) \end{aligned}$$

zuordnen. Die zu $C_{*\frac{1}{4}}$, $C_{*\frac{1}{2}}$, $C_{*\frac{3}{4}}$ gehörigen Werte der Integralausdrücke \hat{I} und \hat{K} mögen $\hat{I}_{\frac{1}{4}}$, $\hat{I}_{\frac{1}{2}}$, $\hat{I}_{\frac{3}{4}}$; $\hat{K}_{\frac{1}{4}}$, $\hat{K}_{\frac{1}{2}}$, $\hat{K}_{\frac{3}{4}}$ heißen. Da stets $\bar{\sigma} \leq 2\Omega$ ist, so genügen

$$C_* \text{ und } C_{*\frac{1}{4}}; \quad C_{*\frac{1}{4}} \text{ und } C_{*\frac{1}{2}}; \quad C_{*\frac{1}{2}} \text{ und } C_{*\frac{3}{4}}; \quad C_{*\frac{3}{4}} \text{ und } \hat{C}_*$$

den vorhin eingeführten Voraussetzungen. Es gilt darum

$$|\hat{I}_{\frac{1}{4}} - \hat{I}|, \quad |\hat{I}_{\frac{1}{2}} - \hat{I}_{\frac{1}{4}}|, \quad |\hat{I}_{\frac{3}{4}} - \hat{I}_{\frac{1}{2}}|, \quad |\hat{I} - \hat{I}_{\frac{3}{4}}| \leq \alpha_3 \Omega \frac{\bar{\sigma}}{4},$$

mithin

$$|\hat{I} - \hat{I}| \leq \alpha_3 \Omega \bar{\sigma}.$$

Ebenso findet man

$$|\hat{K} - \hat{K}| \leq \alpha_4 \Omega \bar{\sigma}.$$

§ 3. - Grundgleichungen. Fortsetzung.

Sei β die Winkelgeschwindigkeit des Körpers M_s , und es seien R_s , ϑ seine Polarkoordinaten in der festen \hat{x} , \hat{y} -Ebene zur Zeite t . Offenbar ist

$$(69) \quad \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \beta t, & P^2 &= (R + \xi)^2 + R_s^2 - 2R_s(R + \xi) \cos \left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R} - \vartheta \right), \\ \varrho^2 &= (R + \xi)^2 + (R + \xi')^2 - 2(R + \xi)(R + \xi') \cos \left(\frac{s + \sigma}{R} - \frac{s' + \sigma'}{R} \right). \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit der relativen Bewegung von M_s gegen das rotierende Achsenkreuz (x, y) ist gleich $\beta - \omega = \gamma$. Wir nehmen $\gamma \neq 0$ an. Wäre $\gamma = 0$, so würde dies bedeuten, dass der störende Körper im rotierenden Achsenkreuz feststeht. Es würde sich dann um ein Problem des relativen Gleichgewichtes handeln. Wir suchen Lösungen der Differentialgleichungen (22), (23) von der Form

$$(70) \quad \xi = \xi(s, t) = Z(s - R\gamma t) = Z(u), \quad \sigma' = \sigma(s, t) = S(s - R\gamma t) = S(u)$$

zu bestimmen, unter $Z(u)$ und $S(u)$ periodische Funktionen mit der Periode $2\pi R$ verstanden. Das von uns betrachtete, auf den Punkt R, s des Kreises C bezogene Massenteilchen des Ringes hat zur Zeit t in der Ebene x, y die Polarkoordinaten

$$(71) \quad R + Z(s - R\gamma t) = R + Z(u), \quad \frac{s + S(s - R\gamma t)}{R} = \frac{s + S(u)}{R}.$$

Seine Bahn in der x, y -Ebene erhält man, wenn man in (70) s konstant hält. Sie ist eine geschlossene Kurve, die in der Zeit $\frac{2\pi}{\gamma}$ einmal voll beschrieben wird.

Hält man in (70) t fest und lässt s das Intervall $(0, 2\pi R)$ beschreiben, so

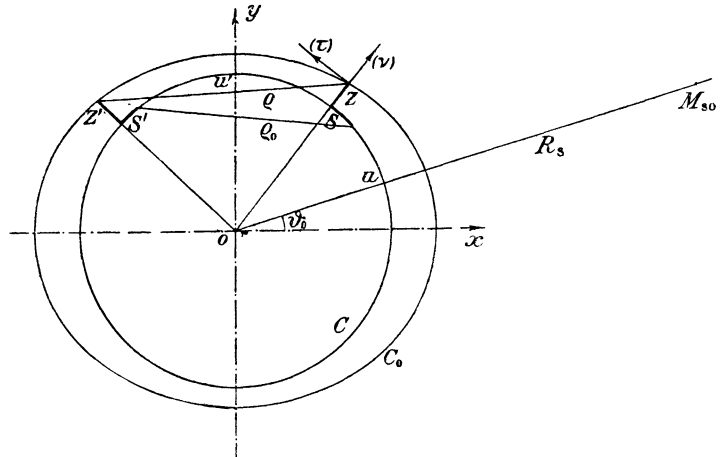


Fig. 3.

erhält man die vorhin betrachtete Kurve C_* , den geometrischen Ort aller Teilchen des Ringes zur Zeit t in der x, y -Ebene. Sei C_0 der geometrische Ort der Punkte

$$(72) \quad R + Z(s), \quad \frac{s + S(s)}{R}$$

in der Ebene x, y , d. h. die Lage des Ringes zur Zeit $t=0$ (Fig. 3). Die Kurve C_* kann man augenscheinlich dadurch gewinnen, dass man C_0 um den Koordinatenursprung durch den Winkel γt im positiven Sinne dreht. Da der Körper M_s in der Zeit t denselben Winkelraum beschreibt, so bleibt die relative Lage der Kurve C_* und des Körpers M_s unverändert. *Die Konfiguration des Systems*

ändert sich also nicht mit der Zeit. Freilich verschiebt sich die Lage eines bestimmten Teilchens gegen M_s fortwährend. Die Polarkoordinaten der Masse M_s zur Zeit $t=0$ sind offenbar R_s, ϑ_0 .

Bevor wir die speziellen Funktionen (70) in (23), (24) einsetzen, wollen wir den geometrischen Ort der Punkte

$$(73) \quad R + Z(u), \quad \frac{u + S(u)}{R}$$

in der Ebene \hat{x}, \hat{y} einführen. Dieser ist natürlich die vorhin mit C_0 bezeichnete Kurve, die Lage des Ringes zur Zeit $t=0$ ⁽¹⁶⁾. Sei M_{s_0} der Punkt mit den Polarkoordinaten R_s, ϑ_0 .

Betrachten wir jetzt wieder das Teilchen, das auf den Punkt (R, s) des Kreises C bezogen wird, zur Zeit t . Es gilt zunächst

$$(74) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -R\gamma \frac{dZ}{du}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = R^2 \gamma^2 \frac{d^2 Z}{du^2}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -R\gamma \frac{dS}{du}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = R^2 \gamma^2 \frac{d^2 S}{du^2}.$$

Die Lage aller übrigen Teilchen und des Körpers M_s gegen das betrachtete Massenteilchen zur Zeit t ist, wie man nach dem Vorstehenden leicht sieht, dieselbe wie die Lage des Punktes $R + Z(u), \frac{u + S(u)}{R}$ ($u = s - R\gamma t$) gegen die Kurve C_0 und den Punkt M_{s_0} . Dreht man die Kurve C_* durch den Winkel $-\gamma t$, so fällt sie mit C_0 zusammen. Um nicht neue Buchstaben einführen zu müssen, wollen wir unter $\varrho_0, \varrho, P, \dots$ Grössen verstehen, die aus den vorhin ebenso bezeichneten Grössen durch die vorerwähnte Drehung entstehen (Fig. 3). Es ist also z. B. jetzt ϱ der Abstand der Punkte $R + Z(u), \frac{u + S(u)}{R}$ und $R + Z(u'), \frac{u' + S(u')}{R}$ ⁽¹⁷⁾. Aus (46), (47) und (74) folgen nunmehr die weiteren Gleichungen:

$$(75) \quad L^{(1)}(Z, S) \equiv \gamma^2 R^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + 2\gamma R\omega \frac{dS}{du} - 2\omega^2 Z - \kappa\mu \int_C \frac{Z' - Z}{\varrho_0^3} du'$$

$$= R\gamma^2 \left(\frac{dS}{du}\right)^2 - 2\gamma\omega Z \frac{dS}{du} + \gamma^2 Z \left(\frac{dS}{du}\right)^2 - M\kappa \frac{1}{R} \left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \dots\right)$$

$$+ \kappa \hat{I} + \kappa M_s \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{P} \equiv \mathbf{A}^{(1)}(Z, S),$$

$$(76) \quad L^{(2)}(Z, S) \equiv \gamma^2 R^2 \frac{d^2 S}{du^2} - 2\gamma R\omega \frac{dZ}{du} + \kappa\mu \int_C \frac{S' - S}{\varrho_0^3} du' = -\gamma^2 RZ \frac{d^2 S}{du^2}$$

$$- 2\gamma^2 R \frac{dS}{du} \frac{dZ}{du} + \kappa \hat{K} + \kappa M_s \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{R}{P} \equiv \mathbf{A}^{(2)}(Z, S).$$

Im Einklang mit einer vorhin gemachten Bemerkung bedeuten jetzt \hat{I} und \hat{K} Ausdrücke, die sich aus den auf S. 184 ebenso bezeichneten Ausdrücken ergeben, indem man in diesen s, ξ, σ entsprechend durch u, Z, S ersetzt.

⁽¹⁶⁾ Zur Zeit $t=0$ fallen ja die Achsenkreuze x, y und \hat{x}, \hat{y} zusammen.

⁽¹⁷⁾ Für $Z(u'), S(u')$ wird kürzer Z', S' geschrieben.

**§ 4. - Ein System linearer Integro-Differentialgleichungen.
Periodische Lösungen.**

Wir beginnen mit der Untersuchung des Systems der Integro-Differentialgleichungen

$$(77) \quad \begin{aligned} \gamma^2 R^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + 2\gamma R\omega \frac{dS}{du} - 2\omega^2 Z - \kappa\mu \int_C \frac{Z' - Z}{e^{\frac{3}{\alpha}}} du' &= F_1(u), \\ \gamma^2 R^2 \frac{d^2 S}{du^2} - 2\gamma R\omega \frac{dZ}{du} + \kappa\mu \int_C \frac{S' - S}{e^{\frac{3}{\alpha}}} du' &= F_2(u), \end{aligned}$$

unter $F_1(u)$ und $F_2(u)$ stetige, periodische, reelle oder *komplexe* Funktionen des reellen Argumentes u mit der Periode $2\pi R$ verstanden. Gesucht werden periodische, nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösungen mit der gleichen Periode.

Vor allem, was die homogenen Gleichungen $F_1(u)=0$, $F_2(u)=0$ betrifft.

Sie haben höchstens endlich viele linear unabhängige Lösungen. Dies kann man auf folgendem Wege zeigen.

Es sei $G(\xi, u)$ die gewiss vorhandene periodische Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} Z = 0 \quad (18).$$

Es gilt demnach

$$(78) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} G &= 0, \\ G(\xi, 0) &= G(\xi, 2\pi R), \quad \frac{\partial}{\partial u} G(\xi, 0) = \frac{\partial}{\partial u} G(\xi, 2\pi R), \\ (79) \quad \frac{\partial}{\partial u} G(\xi, \xi+0) - \frac{\partial}{\partial u} G(\xi, \xi-0) &= -1 \quad (19). \end{aligned}$$

Sie ist in bezug auf ξ und u symmetrisch. Wie man sich leicht überzeugt, ist übrigens G Funktion von $\xi-u$, etwa $G(\xi, u) = \Lambda(\xi-u)$. Hieraus und aus der Symmetrieeigenschaft $G(\xi, u) = G(u, \xi)$ folgt

$$G(-\xi, -u) = \Lambda(-\xi+u) = \Lambda(u-\xi) = G(u, \xi) = G(\xi, u).$$

(18) Der Buchstabe ξ bezeichnet jetzt etwas anderes als in den vorhergehenden Paragraphen. Eine Gefahr der Verwechslung liegt nicht vor.

(19) Das allgemeine Integral von (78) ist

$$C_1 e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{\gamma R}} + C_2 e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{\gamma R}}.$$

Periodische Lösungen mit der Periode $2\pi R$ sind nicht vorhanden. Also existiert, wie man weiss, die Greensche Funktion G .

Offenbar ist

$$(80) \quad \int_C \frac{\partial}{\partial u} G(\xi, u) du = - \int_C \frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi, u) = 0,$$

$$(81) \quad \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} \int_C G(\xi, u) du = \int_C \frac{\partial^2}{\partial u^2} G(\xi, u) du = \left[\frac{\partial}{\partial u} G(\xi, u) \right]_{\xi+0}^{\xi-0}.$$

Wir schreiben die zu (77) gehörigen homogenen Gleichungen in der Form

$$(82) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 Z}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} Z &= -2 \frac{\omega}{\gamma R} \frac{dS}{du} + \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} \int_C \frac{Z' - Z}{\varrho_0^3} du', \\ \frac{d^2 S}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} S &= 2 \frac{\omega}{\gamma R} \frac{dZ}{du} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} S - \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} \int_C \frac{S' - S}{\varrho_0^3} du' \end{aligned}$$

und setzen

$$(83) \quad \frac{d^2 Z}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} Z = \overset{\circ}{Z}, \quad \frac{d^2 S}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} S = \overset{\circ}{S}.$$

Nach bekannten Sätzen folgt aus (83)

$$(84) \quad \begin{aligned} Z(u) &= - \int_C G(u, u'') \overset{\circ}{Z}(u'') du'', \\ S(u) &= - \int_C G(u, u'') \overset{\circ}{S}(u'') du''. \end{aligned}$$

Dies, in (82) eingesetzt, liefert

$$(85) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{Z}(u) &= 2 \frac{\omega}{\gamma R} \int_C \frac{\partial}{\partial u} G(u, u'') \overset{\circ}{S}(u'') du'' \\ &\quad - \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} \int_C \frac{du'}{\varrho_0^3} \int_C [G(u', u'') - G(u, u'')] \overset{\circ}{Z}(u'') du'', \end{aligned}$$

$$(86) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{S}(u) &= -2 \frac{\omega}{\gamma R} \int_C \frac{\partial}{\partial u} G(u, u'') \overset{\circ}{Z}(u'') du'' + \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} \int_C G(u, u'') \overset{\circ}{S}(u'') du'' \\ &\quad + \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} \int_C \frac{du'}{\varrho_0^3} \int_C [G(u', u'') - G(u, u'')] \overset{\circ}{S}(u'') du''. \end{aligned}$$

Wie wir sogleich zeigen werden, ist

$$(87) \quad \begin{aligned} \int_C \frac{du'}{\varrho_0^3} [G(u', u'') - G(u, u'')] &= \int_C \frac{du'}{\varrho_0^3} [G(u'', u') - G(u'', u)] \\ &= L(u, u'') = O(\log |u - u''|). \end{aligned}$$

Die Beziehungen (85) und (86) stellen ein System linearer homogener Integralgleichungen, die der Fredholmschen Theorie zugänglich sind, dar.

Es ist vor allem leicht einzusehen, dass $L(u, u'')$ nur von $u - u''$ abhängt. In der Tat ist

$$L(u, u'') = \int_C \frac{d(u' + \beta)}{\varrho_0^3} [G(u'' + \beta, u' + \beta) - G(u'' + \beta, u + \beta)] = L(u + \beta, u'' + \beta),$$

da ϱ_0 augenscheinlich mit dem Abstände der Punkte $u' + \beta$ und $u + \beta$ identisch ist.

Man überzeugt sich ferner ohne Mühe, dass

$$(88) \quad L(u, u'') = L(u'', u)$$

gilt. In der Tat ist

$$L(u, u'') = \int_{\dot{c}} \frac{du'}{\varrho_0^2} [G(u', u'') - G(u, u'')]$$

und (Fig. 4), wie man leicht sieht,

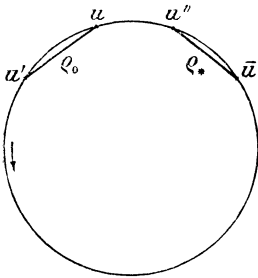


Fig. 4.

$$L(u'', u) = \int_{\dot{c}} \frac{d\bar{u}}{\varrho_*^2} [G(\bar{u}, u) - G(u'', u)].$$

Wir denken uns (Fig. 4) \bar{u} allemal u' so zugeordnet, dass $u' - u'' = u - \bar{u}$ gilt. Alsdann ist

$$\varrho_* = \varrho_0, \quad G(u', u'') = G(u, \bar{u}) = G(\bar{u}, u),$$

da $G(\xi, u)$ lediglich eine Funktion von $\xi - u$ ist. Da endlich $G(u, u'') = G(u'', u)$ ist, so gilt in der Tat die Beziehung (88).

Es sei jetzt u irgendein fester Wert in dem Intervalle $\langle 0, 2\pi R \rangle$, und es möge $\varepsilon > 0$ eine feste, im übrigen beliebig kleine Grösse bezeichnen. Es genügt wegen (88), um (87) zu beweisen, das Verhalten des Integralausdruckes (87) für alle u'' in dem Intervalle $u \leq u'' \leq u + \varepsilon$ festzustellen. Wir setzen (Fig. 5)

$$(89) \quad L(u, u'') = \int_{\dot{c}} \frac{du'}{\varrho_0^2} [G(u'', u') - G(u'', u)] = \int_{u+2\pi R-\alpha^0}^{u+\alpha^0} + \int_{u+\alpha^0}^{u+2\pi R-\alpha^0} \\ = L_1 + L_2, \quad (\alpha^0 \text{ konstant, } \varepsilon < \alpha^0 < \pi R).$$

Offenbar brauchen wir uns nur mit dem Integralausdruck L_1 zu beschäftigen. Wir bemerken, dass $\frac{\partial^2}{\partial u'^2} G(u'', u')$ sich gewiss überall stetig verhält, indessen $\frac{\partial}{\partial u'} G(u'', u')$ im Punkte u'' einen Sprung erleidet,

$$\frac{\partial}{\partial u'} G(u'', u'' + 0) - \frac{\partial}{\partial u'} G(u'', u'' - 0) = -1.$$

Sei jetzt

$$(90) \quad \bar{G}(u'', u') = \begin{cases} G(u'', u') + (u' - u'') & \text{für } u'' \leq u' \leq u + \alpha^0, \\ G(u'', u') & \text{für } u + 2\pi R - \alpha^0 \leq u' \leq u''. \end{cases}$$

Augenscheinlich sind $\bar{G}(u'', u')$, $\frac{\partial}{\partial u'} \bar{G}$, $\frac{\partial^2}{\partial u'^2} \bar{G}$ in dem Bezeiche

$$u + 2\pi R - \alpha^0 \leq u' \leq u + \alpha^0, \quad u \leq u'' \leq u + \varepsilon$$

stetig, so dass das Integral

$$\int_{u+2\pi R-\alpha^0}^{u+\alpha^0} \frac{du'}{\varrho_0^2} [\bar{G}(u'', u') - \bar{G}(u'', u)]$$

gewiss existiert und, wie man leicht zeigen kann, eine stetige Funktion von u'' darstellt.

Der Integralausdruck (89) verhält sich nach alledem wie

$$-\int_{u''}^{u+\alpha^0} \frac{u' - u''}{g^2} du' = -\log \frac{1}{u'' - u} + g(u'' - u),$$

unter g eine stetige Funktion verstanden, w. z. b. w.

Es sei noch bemerkt, dass wir bei dem Übergang zu Fredholmschen Integralgleichungen in (85) und (86) in den Doppelintegralen rechterhand die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen haben. Die Zulässigkeit dieser Vertauschung ist leicht einzusehen.

Einem Fundamentalsatze der Fredholmschen Theorie zufolge kann das System (85), (86) höchstens endlich viele linear unabhängige Nulllösungen haben.

Wir beweisen, dass die (nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung) stetigen periodischen Lösungen $Z(u)$, $S(u)$ der Integro-Differentialgleichungen (82) stetige Ableitungen aller Ordnungen haben.

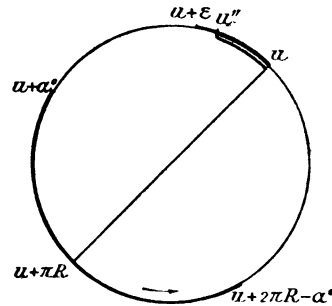


Fig. 5.

In den Tat bilden, wie man sich durch Einsetzen in (82) leicht überzeugt, die Funktionen $Z(u + \alpha)$, $S(u + \alpha)$ für alle α ebenfalls ein System periodischer Lösungen von (82). Offenbar haben die Funktionen

$$(1) \begin{aligned} Z(u) &= \int_0^{\alpha_0} Z(u + \alpha) d\alpha = \int_u^{u+\alpha_0} Z(\beta) d\beta, \\ S(u) &= \int_0^{\alpha_0} S(u + \alpha) d\alpha = \int_u^{u+\alpha_0} S(\beta) d\beta \end{aligned} \quad (\alpha_0 \text{ konstant})$$

die gleiche Eigenschaft. Darum auch die Funktionenpaare

$$(2) \begin{aligned} Z(u) &= \int_u^{u+\alpha_0} (1)Z(\beta) d\beta, & S(u) &= \int_u^{u+\alpha_0} (1)S(\beta) d\beta, \\ (3)Z(u) &= \int_u^{u+\alpha_0} (2)Z(\beta) d\beta, & (3)S(u) &= \int_u^{u+\alpha_0} (2)S(\beta) d\beta, \dots \end{aligned}$$

Da es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger periodischer Lösungen gibt, so bestehen gewiss Beziehungen von der Form

$$(93) \begin{aligned} Z(u) + {}^1a^{(1)}Z(u) + \dots + {}^l a^{(l)}Z(u) &= 0, \\ S(u) + {}^1a^{(1)}S(u) + \dots + {}^l a^{(l)}S(u) &= 0, \end{aligned} \quad ({}^1a, \dots, {}^l a \text{ konstant}).$$

Augenscheinlich besitzen ${}^{(1)}Z(u), \dots, {}^{(l)}Z(u)$; ${}^{(1)}S(u), \dots, {}^{(l)}S(u)$ stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen, also haben auch $Z(u)$ und $S(u)$ die gleiche Eigenschaft. Dies hat zur Folge, dass ${}^{(1)}Z(u), \dots, {}^{(l)}S(u)$ und darum auch $Z(u)$ und $S(u)$ auch noch stetige Ableitungen vierter Ordnung haben u. s. w. Man sieht jetzt leicht ein, dass auch $\frac{dZ}{du}, \frac{dS}{du}; \frac{d^2Z}{du^2}, \frac{d^2S}{du^2}$ u. s. w. die Gleichungen (82) erfüllen. In der Tat bilden $\frac{d}{du}{}^{(1)}Z(u) = Z(u + \alpha_0) - Z(u)$ und $\frac{d}{du}{}^{(1)}S(u) = S(u + \alpha_0) - S(u)$ ein System von Lösungen der Gleichungen (82). Aber auch die Funktionen

$$\frac{d}{du}{}^{(2)}Z(u), \frac{d}{du}{}^{(2)}S(u), \dots; \quad \frac{d}{du}{}^{(l)}Z(u), \frac{d}{du}{}^{(l)}S(u),$$

erfüllen diese Gleichungen. Aus (93) folgt, das auch $\frac{dZ}{du}, \frac{dS}{du}$ die gleiche Eigenschaft zukommt. Darum auch $\frac{d^2Z}{du^2}, \frac{d^2S}{du^2}$ u. s. w. Da, wie vorhin bemerkt, die Gleichungen (82) nur endlich viele linear unabhängige periodische Lösungen haben, so erfüllen Z und S je eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(94) \quad \begin{aligned} \frac{d^l Z}{du^l} + \gamma_1 \frac{d^{l-1} Z}{du^{l-1}} + \dots + \gamma_l Z &= 0, \\ \frac{d^l S}{du^l} + \gamma_1 \frac{d^{l-1} S}{du^{l-1}} + \dots + \gamma_l S &= 0. \end{aligned}$$

Die periodischen Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (82) sind darum notwendigerweise trigonometrische Polynome von der Form

$$(95) \quad Z(u) = \sum_{k=0}^p P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R}, \quad S(u) = \sum_{k=0}^p Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R},$$

($P_k^{(1)}, P_k^{(2)}; Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}$ konstant).

Dieses Ergebnis kann man leicht wie folgt präzisieren.

Aus dem System von Lösungen (95) erhält man durch Differentiation die weiteren Systeme:

$$(96) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 Z}{du^2} &= - \sum_{k=1}^p \frac{k^2}{R^2} \left(P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \right), \\ \frac{d^2 S}{du^2} &= - \sum_{k=1}^p \frac{k^2}{R^2} \left(Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \right), \end{aligned}$$

ferner

$$(97) \quad \begin{aligned} \frac{d^4 Z}{du^4} &= \sum_{k=1}^p \frac{k^4}{R^4} \left(P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \right), \\ \frac{d^4 S}{du^4} &= \sum_{k=1}^p \frac{k^4}{R^4} \left(Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \right), \end{aligned}$$

zuletzt

$$(98) \quad \begin{aligned} \frac{d^{2p} Z}{du^{2p}} &= (-1)^p \sum_{k=1}^p \frac{k^{2p}}{R^{2p}} \left(P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \right), \\ \frac{d^{2p} S}{du^{2p}} &= (-1)^p \sum_{k=1}^p \frac{k^{2p}}{R^{2p}} \left(Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \right). \end{aligned}$$

Die Beziehungen (96) bis (98) können als lineare, nichthomogene Gleichungen zur Bestimmung von

$$P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \quad (k=1, \dots, p)$$

einerseits,

$$Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \quad (k=1, \dots, p)$$

andererseits aufgefasst werden. Die Determinante der Koeffizienten

$$(99) \quad (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{R^2}, & \frac{2^2}{R^2}, & \dots, & \frac{p^2}{R^2} \\ \frac{1}{R^4}, & \frac{2^4}{R^4}, & \dots, & \frac{p^4}{R^4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{R^{2p}}, & \frac{2^{2p}}{R^{2p}}, & \dots, & \frac{p^{2p}}{R^{2p}} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(p!)^2}{R^{p(p+1)}} \begin{vmatrix} 1, & 1^2, & \dots, & 1^{2p-2} \\ 1, & 2^2, & \dots, & 2^{2p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & p^2, & \dots, & p^{2p-2} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden. Also kann man die besagten Gleichungen nach

$$P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \quad \text{bzw.} \quad Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R} \quad (k=1, \dots, p)$$

auflösen. Demnach lassen sich alle periodischen Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (82), wenn man von den trivialen Lösungen $Z=P_0^{(1)}, S=Q_0^{(1)}$ absieht, aus Lösungen von der Form

$$(100) \quad P_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + P_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R}, \quad Q_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + Q_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R}$$

linear zusammensetzen. Man überzeugt sich übrigens sofort durch Einsetzen, dass $Z=0, S=Q_0^{(1)}$ für alle γ den Gleichungen (82) genügen, $Z=P_0^{(2)} \neq 0, S=0$ diese indessen nicht befriedigen.

Das Problem ist also auf eine Bestimmung der Lösungen von der Form (100) zurückgeführt worden. Durch eine geeignete Drehung des Achsenkreuzes kann man diese Lösungen auf die Form

$$(101) \quad \bar{P}_k \cos \frac{ku}{R}, \quad \bar{Q}_k^{(1)} \cos \frac{ku}{R} + \bar{Q}_k^{(2)} \sin \frac{ku}{R}$$

bringen. Führt man diese Ausdrücke in (82) hinein, so findet man nach einer leichten Rechnung $\bar{Q}_k^{(1)}=0$. Die periodischen Lösungen unserer Gleichungen sind also von der Form

$$(102) \quad h_k \cos \frac{ku}{R}, \quad \alpha_k h_k \sin \frac{ku}{R},$$

oder, wenn wir das Achsenkreuz in seine ursprüngliche Lage versetzen,

$$(103) \quad h_k \cos \left(\frac{ku}{R} + \alpha^* \right), \quad \alpha_k h_k \sin \left(\frac{ku}{R} + \alpha^* \right).$$

Die Bestimmung der Lösungen von der Form (103) ist in der vierten Abhandlung dieser Reihe in allen Einzelheiten durchgeführt worden (vgl. a. a.

O. S. 97-103). Wir können uns an dieser Stelle mit der Angabe der Resultate begnügen.

Es sei $M^r = 2\pi R\mu$ die Gesamtmasse des Ringes. Zu einer jeden Zahl

$$k < m_0 = \frac{4M}{M^r} + 2$$

gehören vier periodische Lösungen der Integro- Differentialgleichungen (82) von der Form

$$(104) \quad h_j \cos\left(\frac{ku}{R} + a^*\right), \quad a_j h_j \sin\left(\frac{ku}{R} + a^*\right), \quad (j=1, \dots, 4)$$

mit

$$(105) \quad a_j = \frac{2\omega\gamma_j}{k\gamma_j^2 + \frac{\kappa}{2} \frac{M^r}{R^2}} \quad (^{20}).$$

Sie gehören zu den Werten γ_j von γ ,

$$(106) \quad \begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{kR} \left\{ 2M + M^r \left(1 - \frac{k}{2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_{3,4} &= \pm \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{kR} \left(M^r \frac{k}{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es möge nunmehr γ von allen diesen Werten verschieden sein. Betrachten wir die nichthomogenen Integro- Differentialgleichungen (77) und setzen wie vorhin

$$(107) \quad \begin{aligned} Z(u) &= - \int_C G(u, u'') \mathring{Z}(u'') du'', \\ S(u) &= - \int_C G(u, u'') \mathring{S}(u'') du'', \\ \frac{d^2 Z}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} Z &= \mathring{Z}, \quad \frac{d^2 S}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} S = \mathring{S}; \end{aligned}$$

$\mathring{Z}(u)$ und $\mathring{S}(u)$ erfüllen die der Fredholmschen Theorie zugänglichen Integralgleichungen

$$(108) \quad \begin{aligned} \mathring{Z}(u) &= 2 \frac{\omega}{\gamma R} \int_C \frac{\partial}{\partial u} G(u, u'') \mathring{S}(u'') du'' - \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} \int_C L(u, u'') \mathring{Z}(u'') du'' + \frac{1}{\gamma^2 R^2} F_1(u), \\ \mathring{S}(u) &= -2 \frac{\omega}{\gamma R} \int_C \frac{\partial}{\partial u} G(u, u'') \mathring{Z}(u'') du'' + \frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} \int_C G(u, u'') \mathring{S}(u'') du'' \\ &\quad + \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} \int_C L(u, u'') \mathring{S}(u'') du'' + \frac{1}{\gamma^2 R^2} F_2(u). \end{aligned}$$

Sie bilden ein sich selbst adjungiertes System. Dies sieht man leicht wie

⁽²⁰⁾ In der vierten Abhandlung S. 102 ist für a_j versehentlich ein anderer Wert angegeben worden.

folgt ein. Nach einer schon von Fredholm gemachten Bemerkung kann man das System (108) ohne weiteres auf eine einzige Integralgleichung zurückführen,

$$(109) \quad \dot{\mathbf{Z}}(u) = \int_0^{4\pi R} \mathbf{K}(u, u'') \dot{\mathbf{Z}}(u'') du'' + \Phi(u),$$

indem man die beiden Argumente u und u'' je das Intervall $\langle 0, 4\pi R \rangle$ durchlaufen lässt. Die Werte des Kernes $\mathbf{K}(u, u'')$ der resultierenden Integralgleichung sind in der folgenden Tabelle enthalten

	$\mathbf{K}(u, u'')$	
	$0 \leq u'' \leq 2\pi R$	$2\pi R < u'' \leq 4\pi R$
$0 \leq u \leq 2\pi R$	$-\frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} L(u, u'')$	$2 \frac{\omega}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial u} G(u, u'' - 2\pi R)$
$2\pi R < u \leq 4\pi R$	$-2 \frac{\omega}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial u} G(u - 2\pi R, u'')$	$\frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} G(u - 2\pi R, u'' - 2\pi R) + \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} L(u - 2\pi R, u'' - 2\pi R)$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}}(u) &= \dot{\mathbf{Z}}(u), & 0 \leq u \leq 2\pi R, & \quad \dot{\mathbf{Z}}(u) = \dot{\mathbf{S}}(u - 2\pi R), & \quad 2\pi R < u \leq 4\pi R, \\ \Phi(u) &= \frac{1}{\gamma^2 R^2} F_1(u), & 0 \leq u \leq 2\pi R, & \quad \Phi(u) = \frac{1}{\gamma^2 R^2} F_2(u - 2\pi R), & \quad 2\pi R < u \leq 4\pi R. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle ergibt jetzt $\mathbf{K}(u'', u)$

	$\mathbf{K}(u'', u)$	
	$0 \leq u'' \leq 2\pi R$	$2\pi R < u'' \leq 4\pi R$
$0 \leq u \leq 2\pi R$	$-\frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} L(u'', u)$	$-2 \frac{\omega}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial u''} G(u'' - 2\pi R, u)$
$2\pi R < u \leq 4\pi R$	$2 \frac{\omega}{\gamma R} \frac{\partial}{\partial u''} G(u'', u - 2\pi R)$	$\frac{2\omega^2}{\gamma^2 R^2} G(u'' - 2\pi R, u - 2\pi R) + \frac{\kappa\mu}{\gamma^2 R^2} L(u'' - 2\pi R, u - 2\pi R)$

Beachtet man, dass $G(u'', u)$ nur von $u'' - u$ abhängt, somit $\frac{\partial G}{\partial u''} = -\frac{\partial G}{\partial u}$ gilt, sowie ferner, dass

$$G(u, u'') = G(u'', u), \quad L(u'', u) = L(u, u'')$$

ist, so findet man in der Tat die Symmetriemformel

$$\mathbf{K}(u'', u) = \mathbf{K}(u, u'').$$

Die zu (108) gehörigen homogenen Integralgleichungen haben eine einzige Nulllösung $\mathring{Z}_* = 0$, $\mathring{S}_* = 1$. Sie entspricht der, wie wir vorhin gesehen haben, immer vorhandenen Lösung

$$Z_* = 0, \quad S_* = -\frac{\gamma^2 R^2}{2\omega^2}$$

der Gleichungen (82). Die zu (109) gehörige homogene Integralgleichung

$$(110) \quad \mathring{Z}(u) = \int_0^{4\pi R} \mathbf{K}(u, u'') \mathring{Z}(u'') du''$$

hat eine einzige Nulllösung $\mathring{Z}_*(u)$. Sie ist gleich 0 für $0 \leq u \leq 2\pi R$, gleich 1 für $2\pi R < u \leq 4\pi R$. Die inhomogene Gleichung (109), darum auch die Gleichungen (108) sind nur lösbar, wenn $F_1(u)$ und $F_2(u)$ eine bestimmte Integralbeziehung erfüllen. Sie lautet

$$(111) \quad \int_0^{4\pi R} \Phi(u) \mathring{Z}_*(u) du = \int_c F_2(u) du = 0.$$

Wir setzen diese Bedingung von nun an als erfüllt voraus.

Nach bekannten Sätzen sind die Lösungen der Gleichungen (108) in den Formeln

$$(112) \quad \begin{aligned} \mathring{Z}(u) &= \frac{1}{\gamma^2 R^2} F_1(u) - \frac{1}{\gamma^2 R^2} \int_c H_{11}(u, u'') F_1(u'') du'' \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2 R^2} \int_c H_{12}(u, u'') F_2(u'') du'', \\ \mathring{S}(u) &= \frac{1}{\gamma^2 R^2} F_2(u) - \frac{1}{\gamma^2 R^2} \int_c H_{21}(u, u'') F_1(u'') du'' \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2 R^2} \int_c H_{22}(u, u'') F_2(u'') du'' + \mathring{c} \end{aligned}$$

enthalten. Die Funktionen H_{11} , H_{12} , H_{21} , H_{22} , die « Pseudoresolventen », verhalten sich für $(u'' - u) \rightarrow 0$ wie $L(u, u'')$.

Nach bekannten Sätzen gilt für alle u''

$$(113) \quad \int_c H_{21}(u, u'') du = \int_c H_{22}(u, u'') du = 0.$$

Dies sieht man leicht so ein. Die Integralgleichungen (108) sind, wie wir vorhin gesehen haben, der Integralgleichung mit symmetrischem Kern

$$(114) \quad \mathring{Z}(u) = \int_0^{4\pi R} \mathbf{K}(u, u'') \mathring{Z}(u'') du'' + \Phi(u)$$

äquivalent. Sie ist lösbar, wenn

$$\int_0^{4\pi R} \Phi(u) \overset{\circ}{Z}_*(u) du = \int_0^{2\pi R} F_2(u) du = 0$$

ist, wie wir bereits vorhin bemerkt haben. Die Lösungen können in der Form

$$(115) \quad \overset{\circ}{Z}(u) = \Phi(u) - \int_0^{4\pi R} \mathbf{H}(u, u'') \mathbf{F}(u'') du'' + \overset{\circ}{c} \overset{\circ}{Z}_*(u)$$

geschrieben werden, unter \mathbf{H} diejenige symmetrische Pseudoresolvente verstanden, die der Beziehung

$$(115') \quad \int_0^{4\pi R} \mathbf{H}(u, u'') \overset{\circ}{Z}_*(u) du = 0$$

gemäss normiert ist ⁽²¹⁾. Setzt man

$$(116) \quad \mathbf{H}(u, u'') = \begin{cases} H_{11}(u, u'') \dots & 0 \leq u \leq 2\pi R, & 0 \leq u'' \leq 2\pi R, \\ H_{12}(u, u'' - 2\pi R) \dots & 0 \leq u \leq 2\pi R, & 2\pi R < u'' \leq 4\pi R, \\ H_{21}(u - 2\pi R, u'') \dots & 2\pi R < u \leq 4\pi R, & 0 \leq u'' \leq 2\pi R, \\ H_{22}(u - 2\pi R, u'' - 2\pi R) \dots & 2\pi R < u \leq 4\pi R, & 2\pi R < u'' \leq 4\pi R, \end{cases}$$

so findet man ausgehend von (115) die Formeln (112). Die Beziehung (115') ergibt zugleich die Integralbeziehungen (113). Aus der zweiten Gleichung (112) folgt mit Rücksicht auf (111) und (113) durch Integration

$$(117) \quad \overset{\circ}{c} = \frac{1}{2\pi R} \int_{\overset{\circ}{C}} \overset{\circ}{S}(u) du$$

und wegen (83) weiter

$$(118) \quad \overset{\circ}{c} = - \frac{1}{\pi R} \frac{\omega^2}{\gamma^2 R^2} \int_{\overset{\circ}{C}} S(u) du,$$

da augenscheinlich $\int_{\overset{\circ}{C}} \frac{d^2 S}{du^2} du = 0$ ist.

Wir spezialisieren die Lösung durch die Festsetzung

$$(119) \quad \int_{\overset{\circ}{C}} S(u) du = 0,$$

mithin $\overset{\circ}{c} = 0$.

Ist

$$(120) \quad |F_1(u)|, |F_2(u)| \leq A \quad (A \text{ konstant}),$$

so gilt nach (112)

$$(121) \quad |\overset{\circ}{Z}(u)|, |\overset{\circ}{S}(u)| \leq a_5 A.$$

⁽²¹⁾ Man vergleiche die ins Einzelne gehenden analogen Betrachtungen des zweiten Kapitels, S. 210.

Wegen (107) gilt zugleich

$$(122) \quad |Z(u)|, |S(u)|, \left| \frac{dZ}{du} \right|, \dots, \left| \frac{d^2S}{du^2} \right| \leq a_6 A.$$

Ist insbesondere

$$(123) \quad F_1(u) = F_1(2\vartheta_0 - u), \quad F_2(u) = -F_2(2\vartheta_0 - u), \quad (\vartheta_0 \text{ konstant})$$

so genügen die jetzt betrachteten Lösungen mit

$$\int_0^{2\pi R} S(u) du = 0$$

den Beziehungen

$$(124) \quad Z(u) = Z(2\vartheta_0 - u), \quad S(u) = -S(2\vartheta_0 - u) \quad (22).$$

Sind $Z(u)$ und $S(u)$ mit

$$\int_C S(u) du = 0$$

Lösungen der Gleichungen (77), so ist, wie man ohne Mühe sieht,

$$Z(2\vartheta_0 - u), \quad -S(2\vartheta_0 - u)$$

ein weiteres System von Lösungen der betrachteten speziellen Art. Da es aber nur ein System dieser Eigenschaft gilt, so gelten in der Tat die Formeln (124).

§ 5. - Bestimmung periodischer Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (75) und (76) durch sukzessive Approximationen.

Handelt es sich jetzt um die Gleichungen (75) und (76), so ist

$$(125) \quad F_1(u) = \gamma^2 R \left(\frac{dS}{du} \right)^2 - 2\gamma\omega Z \frac{dS}{du} + \gamma^2 Z \left(\frac{dS}{du} \right)^2 - M\kappa \frac{1}{R} \left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \dots \right) + \kappa \overset{\Delta}{I} + \kappa M_s \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{P} \equiv \mathbf{A}^{(1)}(Z, S),$$

$$(126) \quad F_2(u) = -\gamma^2 R Z \frac{d^2S}{du^2} - 2\gamma^2 R \frac{dS}{du} \frac{dZ}{du} + \kappa \overset{\Delta}{K} + \kappa M_s \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R}{P} \equiv \mathbf{A}^{(2)}(Z, S).$$

Setzt man in (125) und (126) für Z und S irgendwelche Funktionen mit der Periode $2\pi R$ ein, die nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind und überdies den Gleichungen

$$Z(u) = Z(2\vartheta_0 - u), \quad S(u) = -S(2\vartheta_0 - u)$$

genügen (23), so findet man ohne Schwierigkeit

$$F_1(u) = F_1(2\vartheta_0 - u), \quad F_2(u) = -F_2(2\vartheta_0 - u)$$

(22) Die Punkte u und $2\vartheta_0 - u$ liegen in bezug auf die Verbindungsgerade von O und M_{s_0} symmetrisch.

(23) Die unter Zugrundelegung der Funktionen $Z(u)$, $S(u)$ konstruierte Kurve C_0 ist in bezug auf den Strahl $y = x \operatorname{tg} \vartheta_0$ symmetrisch.

und darum auch

$$\int_{\mathcal{C}} F_2(u) du = 0.$$

Es sei jetzt

$$(127) \quad \Omega = \text{Max} \left\{ |Z|, |S|, \left| \frac{dZ}{du} \right|, \dots, \left| \frac{d^2 S}{du^2} \right| \right\}, \quad \Omega \leq \frac{1}{4} \Omega_0 \quad (2^4).$$

Den Ergebnissen auf S. 185 gemäss ist

$$(128) \quad |\dot{I}|, |\dot{K}| \leq a_1 \Omega^2,$$

darum, wie man fast unmittelbar sieht, auch

$$(129) \quad |A^{(1)}(Z, S)|, |A^{(2)}(Z, S)| \leq a_7 (\Omega^2 + \Omega_1), \quad \Omega_1 = \frac{R}{P}.$$

Es sei ferner \dot{Z}, \dot{S} irgendein wie Z, S beschaffenes System von Funktionen, so dass insbesondere

$$(130) \quad |\dot{Z}|, |\dot{S}|, \left| \frac{d\dot{Z}}{du} \right|, \dots, \left| \frac{d^2 \dot{S}}{du^2} \right| \leq \Omega$$

gilt, und es möge

$$(131) \quad |\dot{Z} - Z|, |\dot{S} - S|, \dots, \left| \frac{d^2 \dot{S}}{du^2} - \frac{d^2 S}{du^2} \right| \leq \mathcal{O}$$

sein. Dann gilt (vgl. S. 187-188)

$$(132) \quad |\dot{I} - I| \leq a_3 \Omega \mathcal{O}, \quad |\dot{K} - K| \leq a_4 \Omega \mathcal{O}.$$

Wie man leicht verifiziert, ist demnach

$$(133) \quad |A^{(1)}(\dot{Z}, \dot{S}) - A^{(1)}(Z, S)|, |A^{(2)}(\dot{Z}, \dot{S}) - A^{(2)}(Z, S)| \leq a_8 (\Omega + \Omega_1) \mathcal{O}.$$

Wir versuchen jetzt periodische Lösungen der Gleichungen (75) und (76) wie folgt durch sukzessive Approximationen zu gewinnen.

Wir setzen

$$Z_0 = 0, \quad S_0 = 0$$

und bestimmen nacheinander die periodischen Lösungen der Gleichungen

$$(134) \quad \begin{cases} L^{(1)}(Z_1, S_1) = A^{(1)}(Z_0, S_0), \\ L^{(2)}(Z_1, S_1) = A^{(2)}(Z_0, S_0), \end{cases} \quad \int_{\mathcal{C}} S_1(u) du = 0, \\ \begin{cases} L^{(1)}(Z_2, S_2) = A^{(1)}(Z_1, S_1), \\ L^{(2)}(Z_2, S_2) = A^{(2)}(Z_1, S_1), \end{cases} \quad \int_{\mathcal{C}} S_2(u) du = 0, \\ \begin{cases} L^{(1)}(Z_3, S_3) = A^{(1)}(Z_2, S_2), \\ L^{(2)}(Z_3, S_3) = A^{(2)}(Z_2, S_2), \end{cases} \quad \int_{\mathcal{C}} S_3(u) du = 0, \\ \dots \end{cases}$$

(24) Wir benutzen sinngemäss dieselben Bezeichnungen wie in § 2.

Nach den vorhergehenden Ausführungen steht der Bestimmung der Funktionen $Z_1, S_1; Z_2, S_2; \dots$ nichts im Wege. In der Tat ist zunächst

$$\int_C A^{(2)}(Z_0, S_0) du = 0,$$

so dass Z_1 und S_1 existieren und gewiss stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Da überdies

$$\int_C A^{(2)}(Z_1, S_1) du = 0$$

ist, so sind Z_2, S_2 vorhanden und haben stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. So geht man sukzessive weiter.

Es sei jetzt

$$(135) \quad W_k = \text{Max} \left\{ |Z_k|, |S_k|, \left| \frac{dZ_k}{du} \right|, \dots, \left| \frac{d^2 S_k}{du^2} \right| \right\}. \quad (k \geq 1)$$

Nach (129) ist

$$(136) \quad |A^{(1)}(Z_k, S_k)|, |A^{(2)}(Z_k, S_k)| \leq \alpha_7 (W_k^2 + \Omega_1),$$

darum wegen (120) und (122)

$$(137) \quad W_{k+1} = \text{Max} \left\{ |Z_{k+1}|, \dots, \left| \frac{d^2 S_{k+1}}{du^2} \right| \right\} \leq \alpha_6 \alpha_7 (W_k^2 + \Omega_1),$$

kürzer

$$(138) \quad W_{k+1} \leq \alpha_9 (W_k^2 + \Omega_1), \quad (k \geq 1)$$

während augenscheinlich

$$(139) \quad W_1 \leq \alpha_9 \Omega_1$$

gilt. Aus (138) und (139) folgt, wie wir sogleich zeigen werden, dass für alle k

$$(140) \quad W_k \leq \tau_*$$

gilt, unter τ_* ein geeigneter mit Ω_1 gegen Null konvergierender Wert verstanden. Insbesondere ist, sofern Ω_1 hinreichend klein, etwa $\leq \alpha_{10}$ gewählt worden ist,

$$W_k \leq \frac{1}{4} \Omega_0.$$

Die sukzessiven Approximationen können demnach unbegrenzt fortgesetzt werden ⁽²⁵⁾.

Es sei τ_* die mit Ω_1 gegen Null konvergierende Wurzel der Gleichung

$$(141) \quad \tau = \alpha_9 (\tau^2 + \Omega_1),$$

und es möge für $\Omega_1 \leq \alpha_{10}$ bereits $\tau_* \leq \frac{1}{4} \Omega_0$ sein. Aus (138), (139), (140) und (141) folgt nacheinander

$$W_1 \leq \tau_*, \quad W_2 \leq \alpha_9 (\tau_*^2 + \Omega_1) = \tau_*, \quad W_3 \leq \alpha_9 (\tau_*^2 + \Omega_1) = \tau_* \quad \text{u. s. w.}$$

⁽²⁵⁾ Man beachte, dass wir auf S. 185 $\Omega \leq \frac{1}{4} \Omega_0$ vorausgesetzt hatten.

Also ist in der Tat für alle k

$$(142) \quad W_k \leq \frac{1}{4} \Omega_0.$$

Wir setzen jetzt zur Vereinfachung

$$(143) \quad \text{Max} \left\{ |Z_k - Z_{k-1}|, |S_k - S_{k-1}|, \left| \frac{d}{du} (Z_k - Z_{k-1}) \right|, \dots, \left| \frac{d^2}{du^2} (S_k - S_{k-1}) \right| \right\} = V_k.$$

Aus (134) ergibt sich

$$(144) \quad L^{(1)}(Z_k - Z_{k-1}, S_k - S_{k-1}) = \Lambda^{(1)}(Z_{k-1}, S_{k-1}) - \Lambda^{(1)}(Z_{k-2}, S_{k-2}),$$

$$(145) \quad L^{(2)}(Z_k - Z_{k-1}, S_k - S_{k-1}) = \Lambda^{(2)}(Z_{k-1}, S_{k-1}) - \Lambda^{(2)}(Z_{k-2}, S_{k-2}).$$

Nach (133), (140), (143) ist

$$(146) \quad |L^{(1)}(Z_k - Z_{k-1}, S_k - S_{k-1})|, |L^{(2)}(Z_k - Z_{k-1}, S_k - S_{k-1})| \leq \alpha_8(\tau_* + \Omega_1) V_{k-1},$$

wegen (143) und (122) mithin

$$(147) \quad V_k \leq \alpha_8 \alpha_8 (\tau_* + \Omega_1) V_{k-1}.$$

Es ist nunmehr einleuchtend, dass man Ω_1 so klein wählen kann, etwa

$$(148) \quad \Omega_1 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_{10},$$

dass

$$(149) \quad \alpha_8 \alpha_8 (\tau_* + \Omega_1) \leq q < 1$$

wird, demnach die Reihe

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

wie eine geometrische Reihe konvergiert.

Sei jetzt

$$(150) \quad Z = Z^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} (Z^{(k)} - Z^{(k-1)}), \quad S = S^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} (S^{(k)} - S^{(k-1)}).$$

Die Funktionen Z und S sind offenbar nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, periodisch mit der Periode $2\pi R$ und erfüllen, wie sich ohne ernstliche Schwierigkeiten durch Grenzübergang zeigen lässt, die Integro-Differentialgleichungen (75) und (76). Es ist

$$(151) \quad \int_0^{2\pi R} S(u) du = 0.$$

Man kann schliesslich durch Betrachtungen, die den soeben durchgeführten analog sind, beweisen, dass die gewonnenen Lösungen die einzigen der Beziehung (151) und den Ungleichheiten von der Form (127) genügenden Lösungen sind ⁽²⁶⁾.

⁽²⁶⁾ Ist $\tilde{Z}(u), \tilde{S}(u)$ ein anderes System von Lösungen dieser Art, so werden die Differenzen $\tilde{Z} - Z_n, \tilde{S} - S_n$ betrachtet und es wird gezeigt, dass sie für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.

Wir haben uns bis jetzt auf die Bestimmung der Lösungen beschränkt, die durch die Beziehung (151) spezialisiert sind. Es ist jetzt leicht, zu allgemeinen Lösungen überzugehen. Man überzeugt sich leicht, dass die Funktionen

$$(152) \quad \hat{Z}(u) = Z(u + \varepsilon), \quad \hat{S}(u) = S(u + \varepsilon) + \varepsilon$$

für beliebiges ε den Gleichungen (75) und (76) genügen. Der Übergang von S und Z zu \hat{S} und \hat{Z} lässt die Konfiguration des Systems ungeändert und bedeutet geometrisch nur so viel, dass man als die ungestörte Lage des Teilchens $s + \varepsilon + S(s + \varepsilon)$, $R + Z(s + \varepsilon)$, das zur Zeit $t=0$ betrachtet wird, nicht den Punkt R , $s + \varepsilon$ des Kreises C , sondern den Punkt R , s ansieht. Jetzt finden wir aber

$$(153) \quad \int_0^{2\pi R} \hat{S}(u) du = \int_0^{2\pi R} S(u + \varepsilon) du + \varepsilon \int_0^{2\pi R} du = 2\pi R \varepsilon.$$

Das von uns betrachtete mechanische Problem hat also nur eine Lösung.

ZWEITES KAPITEL

Freie Schwingungen.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der möglichen Schwingungszustände des Systems bei Abwesenheit eines störenden Körpers über. Man erhält die Bewegungsgleichungen, indem man in (46) I und (47) I einfach $M_s = 0$ setzt.

Wie in § 3 des ersten Kapitels suchen wir Lösungen dieser Gleichungen von der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi(s, t) = Z(s - R\delta t) = Z(u), \\ \sigma &= \sigma(s, t) = S(s - R\delta t) = S(u) \end{aligned}$$

zu bestimmen, unter $Z(u)$ und $S(u)$ periodische Funktionen mit der Periode $2\pi R$ verstanden. Die Bewegungsgleichungen gehen jetzt über in

$$(2) \quad \begin{aligned} \delta^2 R^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + 2\delta R \omega \frac{dS}{du} - 2\omega^2 Z - \kappa \mu \int_C \frac{Z' - Z}{e_0^3} du' \\ = \delta^2 R \left(\frac{dS}{du} \right)^2 - 2\delta \omega Z \frac{dS}{du} + \delta^2 Z \left(\frac{dS}{du} \right)^2 - M \kappa \frac{1}{R} \left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \dots \right) + \kappa \hat{I}, \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta^2 R^2 \frac{d^2 S}{du^2} - 2\delta R \omega \frac{dZ}{du} + \kappa \mu \int_C \frac{S' - S}{e_0^3} du' \\ = -\delta^2 R Z \frac{d^2 S}{du^2} - 2\delta^2 R \frac{dS}{du} \frac{dZ}{du} + \kappa \hat{K}. \end{aligned}$$

Sieht man für einen Augenblick von den Gliedern höherer Ordnung ab, so

findet man zur Bestimmung von Z und S die beiden linearen Integro-Differentialgleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} \delta^2 R^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + 2\delta R\omega \frac{dS}{du} - 2\omega^2 Z - \kappa\mu \int_C \frac{Z' - Z}{\varrho^3} du' &= 0, \\ \delta^2 R^2 \frac{d^2 S}{du^2} - 2\delta R\omega \frac{dZ}{du} + \kappa\mu \int_C \frac{S' - S}{\varrho^3} du' &= 0. \end{aligned}$$

Hat δ einen der auf S. 196 angegebenen Werte, er heiße δ_0 , so haben diese Gleichungen periodische Lösungen mit der Periode $2\pi R$ von der Form

$$(5) \quad h \cos \frac{mu}{R}, \quad ah \sin \frac{mu}{R},$$

oder aber

$$(6) \quad h \sin \frac{mu}{R}, \quad -ah \cos \frac{mu}{R}$$

mit

$$a = \frac{2\omega\delta_0}{m\delta_0^3 + \frac{\kappa M r}{2R^2}},$$

sowie die Lösung

$$0, \quad 1,$$

unter m irgendeine natürliche Zahl $< m_0 = \frac{4M}{M^*} + 2$ verstanden.

Gibt es für hinreichend kleine $|\eta|$ und $\delta = \delta_0 + \eta$ periodische Lösungen der vollständigen Gleichungen (2) und (3) von der Form

$$(7) \quad \begin{aligned} Z(u) &= d \cos \frac{mu}{R} + d\mathbb{P}^{(1)}(d; u), \\ S(u) &= ad \sin \frac{mu}{R} + d\mathbb{P}^{(2)}(d; u), \end{aligned}$$

bzw.

$$(8) \quad \begin{aligned} Z(u) &= d \sin \frac{mu}{R} + d\mathbb{P}^{(3)}(d; u), \\ S(u) &= -ad \cos \frac{mu}{R} + d\mathbb{P}^{(4)}(d; u)? \end{aligned}$$

In (7) und (8) bezeichnet d einen Parameter; $\mathbb{P}^{(1)}, \dots, \mathbb{P}^{(4)}$ sind Potenzreihen in d , die für alle hinreichend kleinen $|d|$ und alle u in $\langle 0, 2\pi R \rangle$ konvergieren. Gleichzeitig soll

$$(9) \quad \eta = \mathbb{P}^{(5)}(d)$$

sein. Wir beschränken uns im folgenden auf die Bestimmung der Lösungen von der Form (7), setzen in (2) und (3) für δ den Ausdruck $\delta_0 + \eta$ ein und erhalten nach einer Umordnung

$$(10) \quad \begin{aligned} \delta_0^2 R^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + 2\delta_0 R\omega \frac{dS}{du} - 2\omega^2 Z - \kappa\mu \int_C \frac{Z' - Z}{\varrho^3} du' \\ = -\eta \left(2\delta_0 R^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + 2R\omega \frac{dS}{du} \right) - R^2 \eta^2 \frac{d^2 Z}{du^2} + \delta^2 R \left(\frac{dS}{du} \right)^2 - 2\delta\omega Z \frac{dS}{du} \\ + \delta^2 Z \left(\frac{dS}{du} \right)^2 - M\kappa \frac{1}{R} \left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \dots \right) + \kappa \hat{I} = \hat{A}^{(4)}(Z, S), \end{aligned}$$

$$(11) \quad \delta_0^2 R^2 \frac{d^2 S}{du^2} - 2\delta_0 R \omega \frac{dZ}{du} + \kappa \mu \int_C \frac{S' - S}{e_0^2} du' = -\eta \left(2\delta_0 R^2 \frac{d^2 S}{du^2} - 2R \omega \frac{dZ}{du} \right) \\ - R^2 \eta^2 \frac{d^2 S}{du^2} - \delta^2 R Z \frac{d^2 S}{du^2} - 2\delta^2 R \frac{dS}{du} \frac{dZ}{du} + \kappa \hat{K} = \hat{A}^{(2)}(Z, S).$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist η in (10) und (11) rechterhand nur in den beiden ersten Gliedern mit Grössen erster Ordnung in bezug auf Z und S multipliziert.

Sind $Z(u)$, $S(u)$ Lösungen dieser Integro-Differentialgleichungen, so sind es auch die Funktionen

$$(12) \quad \hat{Z}(u) = Z(u + \varepsilon), \quad \hat{S}(u) = S(u + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Dies bedeutet, wie bereits am Schluss des ersten Kapitels auseinandergesetzt worden ist, dass man als die ungestörte Lage des Teilchens $s + \varepsilon + S(s + \varepsilon)$, $Z(s + \varepsilon)$, das zur Zeit $t=0$ betrachtet wird, nicht den Punkt R , $s + \varepsilon$, sondern den Punkt R , s ansieht. Die Konfiguration des Systems bleibt dabei ungeändert. Jetzt kann man darüber hinaus auch noch den Ring als Ganzes um einen beliebigen Winkel u_0 drehen, wodurch man zu den Funktionen

$$(13) \quad \hat{Z}(u) = \hat{Z}(u - u_0) = Z(u - u_0 + \varepsilon), \\ \hat{S}(u) = \hat{S}(u - u_0) = S(u - u_0 + \varepsilon) + \varepsilon$$

gelangt. Man kann nun u_0 und ε so wählen, dass

$$(14) \quad \int_C \left[\sin \frac{mu}{R} \hat{Z}(u) - a \cos \frac{mu}{R} \hat{S}(u) \right] du = 0, \quad \int_C \hat{S}(u) du = 0$$

gilt. In der Tat ist, wie man leicht verifiziert,

$$(15) \quad \int_C \left[\sin \frac{mu}{R} \hat{Z}(u) - a \cos \frac{mu}{R} \hat{S}(u) \right] du \\ = \int_C \left[\sin \frac{m(u + u_0 - \varepsilon)}{R} Z(u) - a \cos \frac{m(u + u_0 - \varepsilon)}{R} S(u) \right] du \\ = \cos \frac{m(u_0 - \varepsilon)}{R} \int_C \left[\sin \frac{mu}{R} Z(u) - a \cos \frac{mu}{R} S(u) \right] du \\ + \sin \frac{m(u_0 - \varepsilon)}{R} \int_C \left[\cos \frac{mu}{R} Z(u) + a \sin \frac{mu}{R} S(u) \right] du.$$

Ist der Faktor von $\cos \frac{m(u_0 - \varepsilon)}{R}$ gleich Null, so setzen wir $u_0 - \varepsilon = 0$, im anderen Falle gibt die Gleichung (15) den erforderlichen Wert von $\cotg \frac{m(u_0 - \varepsilon)}{R}$ an. Dass die Beziehung

$$\int_C \hat{S}(u) du = 0$$

hernach erfüllt werden kann, ist selbstverständlich. Wir können uns demnach im folgenden auf die Bestimmung periodischer Lösungen der Gleichungen (10) und (11) beschränken, die den Beziehungen (14) genügen.

Aus (14) folgt durch zweimalige teilweise Integration sogleich

$$\int_C \left[\sin \frac{mu}{R} \frac{d^2}{du^2} Z(u) - a \cos \frac{mu}{R} \frac{d^2}{du^2} S(u) \right] du = 0,$$

somit in naheliegender Bezeichnungweise

$$(16) \quad \int_C \left[\sin \frac{mu}{R} \overset{\circ}{Z}(u) - a \cos \frac{mu}{R} \overset{\circ}{S}(u) \right] du = 0.$$

Es sei $G_*(\xi, u)$ die periodische Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$(17) \quad \frac{d^2 Z}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\delta_0^3 R^2} Z = 0.$$

Wie wir im ersten Kapitel von den Integro-Differentialgleichungen (75) I und (76) I zu den Gleichungen (108) I, (125) I, (126) I kamen, so kommen wir jetzt von den Gleichungen (10) und (11), indem wir ⁽²⁷⁾

$$(18) \quad \begin{cases} Z(u) = - \int_C G_*(u, u'') \overset{\circ}{Z}(u'') du'', \\ S(u) = - \int_C G_*(u, u') \overset{\circ}{S}(u') du', \\ L_*(u, u') = \int_C \frac{du'}{\varrho_0^3} [G_*(u', u'') - G_*(u, u'')] \end{cases}$$

setzen, zu den Gleichungen

$$(19) \quad \overset{\circ}{Z}(u) = 2 \frac{\omega}{\delta_0 R} \int_C \frac{\partial}{\partial u} G_*(u, u'') \overset{\circ}{S}(u'') du'' - \frac{\kappa\mu}{\delta_0^3 R^2} \int_C L_*(u, u'') \overset{\circ}{Z}(u'') du'' + \frac{1}{\delta_0^3 R^2} \overset{\circ}{A}^{(1)}[Z(u), S(u)],$$

$$(20) \quad \overset{\circ}{S}(u) = -2 \frac{\omega}{\delta_0 R} \int_C \frac{\partial}{\partial u} G_*(u, u') \overset{\circ}{Z}(u') du' + \frac{2\omega^2}{\delta_0^3 R^2} \int_C G_*(u, u') \overset{\circ}{S}(u') du' + \frac{\kappa\mu}{\delta_0^3 R^2} \int_C L_*(u, u') \overset{\circ}{S}(u') du' + \frac{1}{\delta_0^3 R^2} \overset{\circ}{A}^{(2)}[Z(u), S(u)],$$

die wir wie im ersten Kapitel (vgl. S. 196-197) zu der einen Gleichung

$$(21) \quad \overset{\circ}{Z}(u) = \int_C \overset{\circ}{K}(u, u'') \overset{\circ}{Z}(u'') du'' + \overset{\circ}{\Psi}(u),$$

$$(22) \quad \overset{\circ}{\Psi}(u) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_0^3 R^2} \overset{\circ}{A}^{(1)}(Z, S) & \text{für } 0 \leq u \leq 2\pi R, \\ \frac{1}{\delta_0^3 R^2} \overset{\circ}{A}^{(2)}(Z, S) & \text{für } 2\pi R < u \leq 4\pi R \quad (28) \end{cases}$$

⁽²⁷⁾ Der Einfachheit halber schreiben wir für $Z(u), S(u), \dots$ weiterhin $Z(u), S(u), \dots$

⁽²⁸⁾ In $\overset{\circ}{A}^{(2)}(Z, S)$ hat dabei das Argument den Wert $u - 2\pi R$.

zusammenfassen können. Der Kern $\overset{*}{\mathbf{K}}(\xi, u)$ ist (vgl. S. 197-198) symmetrisch,

$$(23) \quad \overset{*}{\mathbf{K}}(\xi, u) = \overset{*}{\mathbf{K}}(u, \xi).$$

Er hat drei normierte, zu einander orthogonale Nulllösungen

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_1(u) &= \begin{cases} h \cos \frac{mu}{R}, & 0 \leq u \leq 2\pi R, \\ ah \sin \frac{m(u-2\pi R)}{R}, & 2\pi R < u \leq 4\pi R, \end{cases} \\ \mathbf{w}_2(u) &= \begin{cases} h \sin \frac{mu}{R}, & 0 \leq u \leq 2\pi R, \\ -ah \cos \frac{m(u-2\pi R)}{R}, & 2\pi R < u \leq 4\pi R, \end{cases} \\ \mathbf{w}_3(u) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq 2\pi R, \\ (2\pi R)^{-\frac{1}{2}}, & 2\pi R < u \leq 4\pi R. \end{cases} \end{aligned} \quad h^2 = \frac{1}{\pi R(1+a^2)}$$

Nach bekannten Sätzen hat der Kern

$$(25) \quad \overset{*}{\mathbf{N}}(\xi, u) = \overset{*}{\mathbf{K}}(\xi, u) - \mathbf{w}_1(\xi)\mathbf{w}_1(u) - \mathbf{w}_2(\xi)\mathbf{w}_2(u) - \mathbf{w}_3(\xi)\mathbf{w}_3(u)$$

keine Nulllösungen mehr. Die Werte des Kernes $\overset{*}{\mathbf{N}}(\xi, u)$ sind in der folgenden Tabelle enthalten

	$\overset{*}{\mathbf{N}}(\xi, u)$	
	$0 \leq u \leq 2\pi R$	$2\pi R < u \leq 4\pi R$
$0 \leq \xi \leq 2\pi R$	$-\frac{\kappa\mu}{\delta_0^2 R^2} L_*(\xi, u) - h^2 \cos \frac{m(u-\xi)}{R}$	$2 \frac{\omega}{\delta_0 R} \frac{\partial}{\partial \xi} G_*(\xi, u-2\pi R) + ah^2 \sin m \frac{\xi-u}{R}$
$2\pi R < \xi \leq 4\pi R$	$-2 \frac{\omega}{\delta_0 R} \frac{\partial}{\partial \xi} G_*(\xi-2\pi R, u) - ah^2 \sin m \frac{\xi-u}{R}$	$\frac{2\omega^2}{\delta_0^2 R^2} G_*(\xi-2\pi R, u-2\pi R) + \frac{\kappa\mu}{\delta_0^2 R^2} L_*(\xi-2\pi R, u-2\pi R) - a^2 h^2 \cos m \frac{\xi-u}{R} - \frac{1}{2\pi R}$

Drückt man jetzt $\overset{*}{\mathbf{K}}(\xi, u)$ durch $\overset{*}{\mathbf{N}}(\xi, u)$ aus, so findet man nach einer Ordnung der Glieder die Gleichung

$$(26) \quad \overset{*}{Z}(u) = \int_0^{4\pi R} \overset{*}{\mathbf{N}}(u, u'') \overset{*}{Z}(u'') du'' + \mathbf{w}_1(u) \int_0^{4\pi R} \overset{*}{Z}(u'') \mathbf{w}_1(u'') du'' + \mathbf{w}_2(u) \int_0^{4\pi R} \overset{*}{Z}(u'') \mathbf{w}_2(u'') du'' + \mathbf{w}_3(u) \int_0^{4\pi R} \overset{*}{Z}(u'') \mathbf{w}_3(u'') du'' + \overset{*}{\Psi}(u).$$

Da wir uns auf die Bestimmung periodischer Lösungen beschränken, die den Beziehungen (14) genügen, so dürfen wir

$$(27) \quad \int_0^{4\pi R} \overset{*}{Z}(u'') \mathbf{w}_2(u'') du'' = 0, \quad \int_0^{4\pi R} \overset{*}{Z}(u'') \mathbf{w}_3(u'') du'' = 0$$

annehmen. Setzt man nunmehr

$$(28) \quad \int_0^{4\pi R} \overset{*}{Z}(u'') \mathbf{w}_1(u'') du'' = \int_C \overset{*}{Z}(u'') \cos \frac{mu''}{R} du'' + a \int_C \overset{*}{S}(u'') \sin \frac{mu''}{R} du'' = d,$$

so findet man

$$(29) \quad \overset{*}{Z}(u) = \int_0^{4\pi R} \overset{*}{N}(u, u'') \overset{*}{Z}(u'') du'' + d \mathbf{w}_1(u) + \overset{*}{\Psi}(u),$$

und diese Beziehung ist natürlich einem System von zwei leicht explizite angebbaren Integro-Differentialgleichungen gleichwertig.

Den Ergebnissen des ersten Kapitels zufolge haben diese Integro-Differentialgleichungen verbunden mit den Beziehungen (18) für hinreichend kleine Werte von d und η ein und nur ein System von Lösungen ⁽²⁹⁾. Diese Lösungen lassen sich nach Potenzen von d und η entwickeln ⁽³⁰⁾.

Es ist nicht schwer, zu zeigen, dass

$$(30) \quad \overset{*}{Z}(-u) = \overset{*}{Z}(u), \quad \overset{*}{S}(-u) = -\overset{*}{S}(u)$$

und darum auch

$$(31) \quad Z(-u) = Z(u), \quad S(-u) = -S(u)$$

gilt ⁽³¹⁾.

⁽²⁹⁾ Der Beweis wäre wie auf S. 200 ff. zu führen.

⁽³⁰⁾ Es ist leicht zu zeigen, dass alle sukzessiven Approximationen analytische und reguläre Funktionen von d und η darstellen. Also gilt für $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$ das gleiche.

⁽³¹⁾ Dass (31) aus (30) folgt, sieht man leicht so. Es ist

$$Z(-u) = - \int_0^{2\pi R} G_*(-u, u'') \overset{*}{Z}(u'') du'' = \int_0^{-2\pi R} G_*(-u, -u'') \overset{*}{Z}(-u'') du''$$

und wegen $G_*(-u, -u'') = G_*(u, u'')$ nach (30)

$$Z(-u) = - \int_C G_*(u, u'') \overset{*}{Z}(u'') du'' = Z(u)$$

und analog

$$\begin{aligned} S(-u) &= - \int_0^{2\pi R} G_*(-u, u'') \overset{*}{S}(u'') du'' = \int_0^{-2\pi R} G_*(-u, -u'') \overset{*}{S}(-u'') du'' \\ &= \int_C G_*(u, u'') \overset{*}{S}(u'') du'' = -S(u). \end{aligned}$$

Die Beziehungen von der Form (30) gelten nämlich, wie man sich ohne Mühe überzeugt, für jede einzelne Näherung der Gleichung (29).

Es sei $\overset{*}{H}(u, u'')$ der lösende Kern der Integralgleichung

$$(32) \quad \overset{*}{Z}(u) = \int_0^{4\pi R} \overset{*}{N}(u, u'') \overset{*}{Z}(u'') du'' + \Theta(u), \quad \Theta(u) = d w_1(u) + \overset{*}{\Psi}(u).$$

Es gilt

$$(33) \quad \overset{*}{Z}(u) = \Theta(u) - \int_0^{4\pi R} \overset{*}{H}(u, u'') \Theta(u'') du''.$$

Für die weitere Verwendung stellen wir die folgende Tabelle zusammen:

	$\overset{*}{H}(\xi, u)$	
	$0 \leq u \leq 2\pi R$	$2\pi R < u \leq 4\pi R$
$0 \leq \xi \leq 2\pi R$	$\overset{*}{H}_{11}(\xi, u)$	$\overset{*}{H}_{12}(\xi, u - 2\pi R)$
$2\pi R < \xi \leq 4\pi R$	$\overset{*}{H}_{21}(\xi - 2\pi R, u)$	$\overset{*}{H}_{22}(\xi - 2\pi R, u - 2\pi R)$

Die Integro-Differentialgleichung (33) ist dem System von Integro-Differentialgleichungen

$$(34) \quad \overset{*}{Z}(u) = dh \cos \frac{mu}{R} + \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \overset{*}{A}^{(1)}(Z, S) - \int_C \overset{*}{H}_{11}(u, u'') \left[dh \cos \frac{mu''}{R} \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \overset{*}{A}^{(1)}(Z'', S'') \right] du'' - \int_C \overset{*}{H}_{12}(u, u'') \left[dah \sin \frac{mu''}{R} + \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \overset{*}{A}^{(2)}(Z'', S'') \right] du'',$$

$$(35) \quad \overset{*}{S}(u) = dah \sin \frac{mu}{R} + \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \overset{*}{A}^{(2)}(Z, S) - \int_C \overset{*}{H}_{21}(u, u'') \left[dh \cos \frac{mu''}{R} \right. \\ \left. + \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \overset{*}{A}^{(1)}(Z'', S'') \right] du'' - \int_C \overset{*}{H}_{22}(u, u'') \left[dah \sin \frac{mu''}{R} + \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \overset{*}{A}^{(2)}(Z'', S'') \right] du''$$

äquivalent. Wir schreiben zur Abkürzung Z'', S'' für $Z(u'')$ und $S(u'')$. Sie lässt sich, wie bereits erwähnt, durch sukzessive Näherungen auflösen und liefert für $\overset{*}{Z}(u)$, d. h. für $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$ unendliche Reihen, die nach Potenzen von d und η aufsteigen. Es ist leicht zu sehen, dass in der Entwicklung von $\overset{*}{Z}(u)$, d. h. von $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$ von d unabhängige Glieder, d. h. Glieder von der Form

$$\sum_k^{1, \dots, \infty} a_k \eta^k$$

nicht auftreten. In der Tat enthält die Entwicklung jeder einzelnen der sukzessiven Näherungen d als Faktor.

Wir bestimmen jetzt diejenigen Glieder in den Endformeln für $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$, die entsprechend d und $d\eta$ enthalten. Was die zuerst genannten Glieder betrifft, so sind sie einfach gleich

$$(36) \quad dh \cos \frac{mu}{R} \quad \text{und} \quad dah \sin \frac{mu}{R}.$$

Nach bekannten Sätzen ist nämlich

$$\int_0^{4\pi R} \overset{*}{\mathbf{H}}(u, u'') \mathbf{w}_1(u'') du'' = 0.$$

Die Entwicklungen von $Z(u)$ und $S(u)$ beginnen demgemäss (vgl. die Formeln (18)) mit

$$(37) \quad {}_1Z(u) = -dh \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \cos \frac{mu''}{R} du''$$

bzw.

$$(38) \quad {}_1S(u) = -dah \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \sin \frac{mu''}{R} du''.$$

Um die Glieder von der Form $d\eta\chi(u)$ der Entwicklungen von $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$ zu ermitteln, bestimmen wir vor allem die in (10) und (11) rechterhand vorkommenden Ausdrücke

$$P(u) = -\eta \left(2\delta_0 R^2 \frac{d_1^2 Z}{du^2} + 2R\omega \frac{d_1 S}{du} \right)$$

und

$$Q(u) = -\eta \left(2\delta_0 R^2 \frac{d_1^2 S}{du^2} - 2R\omega \frac{d_1 Z}{du} \right).$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$\frac{d_1^2 Z}{du^2} - \frac{2\omega_1^2 Z}{\delta_0^2 R^2} = dh \cos \frac{mu}{R},$$

$$\frac{d_1^2 S}{du^2} - \frac{2\omega_1^2 S}{\delta_0^2 R^2} = dah \sin \frac{mu}{R},$$

mithin

$$(39) \quad P(u) = -\eta \left(2\delta_0 R^2 \frac{d_1^2 Z}{du^2} + 2R\omega \frac{d_1 S}{du} \right) = -\eta \left[2\delta_0 R^2 dh \cos \frac{mu}{R} - 2\delta_0 R^2 \frac{2\omega^2}{\delta_0^2 R^2} dh \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \cos \frac{mu''}{R} du'' - 2R\omega dah \int_{\dot{C}} \frac{\partial G_*}{\partial u} \sin \frac{mu''}{R} du'' \right].$$

Es ist nun $\frac{\partial G_*}{\partial u} = -\frac{\partial G_*}{\partial u''}$ ⁽³²⁾. Nach einer teilweisen Integration finden wir darum

$$\int \frac{\partial G_*}{\partial u} \sin \frac{mu''}{R} du'' = \frac{m}{R} \int G_*(u, u'') \cos \frac{mu''}{R} du'',$$

so dass sich (39) zu

$$-\eta dh \left\{ 2\delta_0 R^2 \cos \frac{mu}{R} - \left(\frac{4\omega^2}{\delta_0} + 2\omega ma \right) \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \cos \frac{mu''}{R} du'' \right\}$$

⁽³²⁾ Es sei daran erinnert, dass $G_*(u, u'')$ eine Funktion von $u - u''$ allein ist.

zusammenziehen lässt. Der Integralausdruck

$$w = \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \cos \frac{mu''}{R} du''$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{du^2} - \frac{2\omega^2}{\delta_0^2 R^2} w = -\cos \frac{mu}{R}$$

und ist periodisch mit der Periode $2\pi R$. Man verifiziert leicht hiernach, dass

$$w = \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \cos \frac{mu''}{R} du'' = \frac{\delta_0 R^2}{m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2} \cos \frac{mu}{R}$$

ist. Alles in allem erweist sich jetzt

$$(40) \quad P(u) = -\eta dh \cos \frac{mu}{R} \left\{ 2\delta_0 R^2 - \left(\frac{4\omega^2}{\delta_0} + 2\omega ma \right) \frac{\delta_0^2 R^2}{m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2} \right\}.$$

Ganz analog erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(u) &= -\eta \left[2\delta_0 R^2 dah \sin \frac{mu}{R} - 2\delta_0 R^2 \frac{2\omega^2}{\delta_0^2 R^2} dah \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \sin \frac{mu''}{R} du'' \right. \\ &\quad \left. + 2R\omega dh \int_{\dot{C}} \frac{\partial G_*}{\partial u} \cos \frac{mu''}{R} du'' \right] \\ &= -\eta dh \left[2\delta_0 R^2 a \sin \frac{mu}{R} - \left(2\delta_0 R^2 \frac{2\omega^2}{\delta_0^2 R^2} a \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2R\omega \frac{m}{R} \right) \int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \sin \frac{mu''}{R} du'' \right] \end{aligned}$$

und mit

$$\int_{\dot{C}} G_*(u, u'') \frac{\sin mu''}{R} du'' = \frac{\delta_0^2 R^2}{m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2} \sin \frac{mu}{R}$$

endgültig

$$(41) \quad Q(u) = -\eta dh \sin \frac{mu}{R} \left[2\delta_0 R^2 a - \left(\frac{4\omega^2}{\delta_0} a + 2\omega m \right) \frac{\delta_0^2 R^2}{m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2} \right].$$

Die Glieder mit ηd in der Entwicklung von $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$ sind nach (34) und (35) entsprechend gleich

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{P(u)}{\delta_0^2 R^2} &- \int_{\dot{C}} \overset{*}{H}_{11}(u, u'') \frac{P(u'')}{\delta_0^2 R^2} du'' - \int_{\dot{C}} \overset{*}{H}_{12}(u, u'') \frac{Q(u'')}{\delta_0^2 R^2} du'', \\ \frac{Q(u)}{\delta_0^2 R^2} &- \int_{\dot{C}} \overset{*}{H}_{21}(u, u'') \frac{P(u'')}{\delta_0^2 R^2} du'' - \int_{\dot{C}} \overset{*}{H}_{22}(u, u'') \frac{Q(u'')}{\delta_0^2 R^2} du''. \end{aligned}$$

Führt man in (28) für $\overset{*}{Z}(u)$ und $\overset{*}{S}(u)$ ihre Entwicklungen nach Potenzen von d und η ein, so erhält man die Verzweigungsgleichung. Der Koeffizient des Gliedes mit $d\eta$ hat nach (28) den Wert

$$(43) \quad A_{11} = \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \int_{\dot{C}} \left(P(u) \cos \frac{mu}{R} + a Q(u) \sin \frac{mu}{R} \right) du.$$

In der Tat ist nach bekannten Sätzen

$$\int_0^{4\pi R} \mathbf{w}_1(u) \overset{*}{\mathbf{H}}(u, u') du = 0.$$

Aus (40), (41) und (43) folgt nach einer Umformung

$$A_{11} = -2h\pi R \left\{ \frac{1}{\delta_0} - \left(\frac{2\omega^2}{\delta_0} + \omega m a \right) / m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2 \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{\delta_0} - \left(\frac{2\omega^2 \alpha^2}{\delta_0} + \omega m a \right) / m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2 \right\},$$

wofür man nach einer leichten Umrechnung auch schreiben kann

$$(44) \quad A_{11} = -2h\pi R m \frac{(1 + \alpha^2)m\delta_0 - 2\omega a}{m^2 \delta_0^2 + 2\omega^2}.$$

Ist $A_{11} \neq 0$, so liefert die Verzweigungsgleichung, da, wie wir wissen, alle ihre Glieder den Faktor d haben, nach Division durch d einen Ausdruck von der Form

$$\eta = \eta(d), \quad \eta(0) = 0,$$

unter $\eta(d)$ eine Potenzreihe verstanden, die für hinreichend kleine $|d|$ konvergiert. Sollte A_{11} verschwinden, so müssten Glieder höherer Ordnung herangezogen werden.

Man überzeugt sich leicht, dass für $\mu = 0$, somit auch für hinreichend kleine Werte der Dichte μ jedenfalls $A_{11} \neq 0$ ist, somit periodische Lösungen von der vorhin betrachteten Form existieren.

Des weiteren sieht man leicht ein, dass bsp. zu dem Werte

$$\delta_0 = \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{R} \left\{ 2M + \frac{M'}{2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

der sich aus den auf S. 196 entwickelten Formeln für $\gamma_{1,2}$ mit $k=1$ ergibt, für beliebige Werte von μ eine periodische Lösung existiert. Jetzt ist nämlich

$$m=1, \quad \frac{1 + \alpha^2}{2a} \geq 1, \quad \delta_0 > \omega = \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{R} \left(M + \frac{M'}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

darum gewiss $A_{11} > 0$.