Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giorgio Roncali

Sugli insiemi non misurabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 15 (1927), exp. nº 3, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1927_1_15__A3_0>

GIORGIO RONCALI

SUGLI INSIEMI

NON MISURABILI

I.

Quando Lebesgue introdusse la sua nozione di misura che rendeva misurabili molti insiemi che prima non lo erano, sorse spontanea la domanda se, anche secondo questa nuova definizione esistessero insiemi non misurabili.

Questa domanda rimase a lungo senza risposta finchè Caratheodory potè mostrare esempii di insiemi non misurabili.

Le considerazioni che seguono nelle quali si fa uso, come fece del resto anche Caratheodory, del postulato di Zermelo consentono di arrivare con procedimenti più semplici ad una ampia classe di insiemi non misurabili.

DEF. 1. — *Due insiemi M ed N li diremo geometricamente eguali quando si possa porre fra i loro punti una corrispon-*

AVVERTENZA. — In quanto segue indicherò sempre con $m'\chi$ ed $m''\chi$ rispettivamente le misure interna ed esterna dell' insieme χ, definite al modo di Lebesgue e con $m\chi$ la sua misura qualora sia misurabile.

denza biunivoca tale che la distanza di due punti di uno di essi sia eguale alla distanza dei punti omologhi.

Teor. 1. — *Due o più insiemi lineari geometricamente eguali, hanno eguali rispettivamente le misure interne e le misure esterne.*

La dimostrazione di questo teorema è immediata.

Def. 2. — *Un insieme lineare E lo diremo equidistribuito in un certo insieme aperto U che lo contenga se, dato ε positivo, arbitrario, si può trovare una divisione di U in dominii parziali ciascuno di misura inferiore a ε tale che per ogni singolo intervallo D_n valgano le relazioni:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{m'(E \times D_n)}{m\, D_n} &= \frac{m'\, E}{m\, U} = \alpha' \\ \frac{m''(E \times D_n)}{m\, D_n} &= \frac{m''\, E}{m\, U} = \alpha'' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

α' ed α'' risultano quindi due costanti dipendenti solamente da E e da U comprese tra zero ed uno.

Def. 3. — *Un insieme E lo diremo uniforme in un certo insieme aperto V che lo contenga se per qualunque insieme aperto O contenuto in V valgono le relazioni*

$$\frac{m'(E \times O)}{m\, O} = \frac{m'\, E}{m\, U} = \alpha'$$

$$\frac{m''(E \times O)}{m\, O} = \frac{m''\, E}{m\, U} = \alpha''$$

cioè se le formule (1) valgono ancora sostituendo all'intervallo D_n un insieme aperto qualsiasi, purchè contenuto in U.

Teor. 2. — *Ogni insieme lineare E equidistribuito è anche uniforme.*

Sia l'insieme F equidistribuito in U e sia O un insieme aperto qualsiasi contenuto in U, quest'ultimo sarà la somma di un numero finito o di una infinità numerabile di intervalli. Indichiamo con I_n l'intervallo ennesimo. Dividiamo ora l'insieme aperto U in intervalli parziali D ognuno di misura inferiore a $\frac{\sigma}{2^{n+1}}$ in modo che sia soddisfatta la condizione di cui alla Def. (2) $\left(\text{risulta } \varepsilon = \frac{\sigma}{2^{n+1}}\right)$; questa divisione è possibile poichè E per ipotesi è equidistribuito in U.

Indichiamo ora con G la somma degli intervalli D interni ad I_n e con H, G aumentato (eventualmente) dei due intervalli D solo parzialmente interni ad I_n; sarà intanto

$$m\,H - m\,G < \frac{\sigma}{2^n} \tag{2}$$

Ora, evidentemente

$$H > I_n > G$$

$$(H \times E) > (I_n \times E) > (G \times E)$$

e quindi per le misure

$$\begin{aligned} m'\,(H \times E) &\geqslant m'\,(I_n \times E) \geqslant m'\,(G \times E) \\ m''(H \times E) &\geqslant m''\,(I_n \times E) \geqslant m''\,(G \times E) \end{aligned} \tag{3}$$

e poichè H e G sono somme di un numero finito di intervalli D per cui valgono le condizioni di cui alla Def. 2 si avrà

$$\begin{aligned} m'(E \times H) &= \alpha' \, m \, H \\ m''(E \times H) &= \alpha'' \, m \, H \\ m'(E \times G) &= \alpha' \, m \, G \\ m''(E \times G) &= \alpha'' \, m \, G \end{aligned} \tag{4}$$

Sostituendo nelle (3) avremo

$$\begin{aligned} \alpha' \, m \, H &\geqslant m'(E \times I_n) \geqslant \alpha' \, m \, G \\ \alpha'' \, m \, H &\geqslant m''(E \times I_n) \geqslant \alpha'' \, m \, G \end{aligned} \tag{5}$$

D'altra parte noi abbiamo

$$m \, H \geqslant m \, I_n \geqslant m \, G \tag{6}$$

e moltiplicando la (6) prima per α' poi per α'' abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha' \, m \, H &\geqslant \alpha' \, m \, I_n \geqslant \alpha' \, m \, G \\ \alpha'' \, m \, H &\geqslant \alpha'' \, m \, I_n \geqslant \alpha'' \, m \, G \end{aligned} \tag{7}$$

e confrontando le (7) con le (5) tenendo conto di (2) si à

$$\begin{aligned} |\alpha' \, m \, I_n - m'(E \times I_n)| &\leq \frac{\sigma}{2^n} \alpha' \leq \frac{\sigma}{2^n} \\ [\alpha'' \, m \, I_n - m'(E \times I_n)| &\leq \frac{\sigma}{2^n} \alpha' \leq \frac{\sigma}{2^n} \end{aligned} \tag{8}$$

e sommando le (8) rispetto ad n $(O = \sum I_n)$

$$\begin{aligned} |\alpha' \, m \, O - m'(E \times O)| &\leq \sigma \\ |\alpha'' \, m \, O - m''(E \times O)| &\leq \sigma \end{aligned} \tag{9}$$

ed essendo σ arbitrario

$$\begin{aligned} m'(E \times O) &= \alpha' m O \\ m''(E \times O) &= \alpha'' m O \end{aligned} \tag{10}$$

ma per le (1)

$$\alpha' = \frac{m' E}{m U}$$

$$\alpha'' = \frac{m'' E}{m U}$$

otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{m'(E \times O)}{m O} &= \frac{m' E}{m U} = \alpha' \\ \frac{m''(E \times O)}{m O} &= \frac{m'' E}{m U} = \alpha'' \end{aligned} \tag{11}$$

che sono appunto le formule cercate cioè le (1) scritte per un insieme aperto qualsiasi purchè contenuto in U.

TEOR. 3. — *Se un insieme è uniforme in U è anche uniforme in U il suo complementare.*

La dimostrazione è immediata.

TEOR. 4. — *Se un insieme I è uniforme in un insieme aperto U, si verifica uno di questi tre casi:*

1. — *I à misura nulla.*

2. — *I à misura eguale a quella di U.*

3. — *I non è misurabile ed à misura interna nulla e misura esterna eguale alla misura di U.*

Sia infatti

$$J = U - I \tag{12}$$

sarà

$$\begin{aligned} m' J &= m\, U - m'' I \\ m'' J &= m\, U - m' I \end{aligned} \qquad (13)$$

Prendiamo un insieme aperto W contenuto in U, contenente J tale che sia

$$m\, W = m'' J + \sigma \qquad (14)$$

dove σ è positivo, arbitrario, piccolo a piacere; un tale insieme W esiste certamente per la definizione di misura esterna.

Poniamo

$$\begin{aligned} W \times I &= Z \\ m' (W \times I) &= m' Z \\ m'' (W \times I) &= m'' Z \end{aligned} \qquad (15)$$

e siccome I è uniforme in U per qualunque insieme aperto contenuto in U, quindi anche per W sarà

$$\begin{aligned} \frac{m' (W \times I)}{m\, W} &= \frac{m' I}{m\, U} \\ \frac{m'' (W \times I)}{m\, W} &= \frac{m'' I}{m\, U} \end{aligned} \qquad (16)$$

da cui tenendo conto di (15)

$$\begin{aligned} m' Z &= \frac{m\, W\, m' I}{m\, U} \\ m'' Z &= \frac{m\, W\, m'' I}{m\, U} \end{aligned} \qquad (17)$$

e per la (14)

$$m' Z = \frac{(m'' J + \sigma)\, m' I}{m\, U}$$

$$m'' Z = \frac{(m'' J + \sigma)\, m' I}{m\, U} \tag{18}$$

e tenendo conto delle (13)

$$m' Z = \frac{(m\, U - m' I + \sigma)\, m' I}{m\, U}$$

$$m'' Z = \frac{(m\, U - m' I + \sigma)\, m'' I}{m\, U} \tag{19}$$

Osservando poi che

$$J \times I = O \tag{20}$$

sarà anche

$$W \times I - J \times I = Z$$

$$(W - J) \times I = Z \tag{21}$$

e passando alle misure

$$m' [(W - J) \times I] = m' Z$$

$$m'' [(W - J) \times I] = m'' Z \tag{22}$$

da cui

$$m' Z \leq m' (W - J)$$

$$m' Z \leq m\, W - m'' J$$

e per le (14)

$$m' Z \leq \sigma \tag{23}$$

e confrontando la prima delle (19) con la (23)

$$\frac{(m\, U - m' I + \sigma)\, m' I}{m\, U} \leq \sigma \tag{24}$$

Ora, siccome nella (24) non compare W essa deve valere qualunque sia σ; sarà quindi

$$\frac{(m\,U - m'\,I)\,m'\,I}{m\,U} = 0 \tag{25}$$

da cui si ricava σ

$$\left.\begin{array}{l} m'\,I = 0 \\ m'\,I = m\,U \end{array}\right\} \tag{26}$$

oppure

Ripetendo parola per parola lo stesso ragionamento sul complementare J di I rispetto ad U, che per il Teor. 3 è anch'esso uniforme in U, si otterrebbe analogamente a

$$m'\,J = 0$$

oppure

$$m'\,J = m\,F$$

da cui per le (13) si à σ

$$\left.\begin{array}{l} m''\,I = 0 \\ m''\,I = m\,U \end{array}\right\} \tag{27}$$

oppure

Dalle (26) e dalle (27) tenendo conto che è evidentemente

$$m'\,I \leq m''\,I$$

si ricava che i soli casi possibili sono appunto quelli enunciati dal teorema c. d. d.

Da questo teorema si à una regola per trovare una ampia classe di insiemi non misurabili: basterà prendere un insieme uniforme in un certo insieme aperto U che sia misurabile e di misura non nulla e trovarne una divisione in numero finito od in una infinità numerabile di parti (a due a due senza punti comuni) che siano di eguali misure (p. es. geometricamente eguali) pure uniformi in U.

Il teorema 4 ci dà la certezza che queste parti non sono misurabili poichè altrimenti dovrebbero avere o tutte misura nulla ed allora anche l'insieme da cui siamo partiti che è la loro somma avrebbe misura nulla contrariamente all'ipotesi, oppure tutte quante misure eguali a quelle dell'insieme U nel quale sono contenute il che è evidentemente assurdo.

Gli insiemi non misurabili trovati da Caratheodory rientrano nella classe sopraddetta come vedremo in seguito.

II.

Sia $N(x)$ l'insieme dei numeri irrazionali compresi tra zero ed uno x sia un punto di $N(x)$.

$I'(x)$ sia l'insieme dei punti y di N tali che $y - x$ sia razionale.

$I''(x)$ sia l'insieme definito rispetto ad $I - x$ come $I'(x)$ rispetto ad x.

$J(x)$ sia la somma di $I'(x)$ ed $I''(x)$.

L'insieme N è (come vedremo in seguito) la somma di tanti insiemi del tipo $J(x)$.

Prendiamo ora un insieme A tale che esso contenga uno ed un sol punto per ciascuno di detti insiemi J. (Si vede quindi che l'arbitrarietà di detto insieme è grandissima); indichiamone con x il punto generico. Poniamo:

$$B(A) = \sum I'(x)$$

$$C(A) = \sum I''(x)$$

Gli insiemi $B(A)$ e $C(A)$ qualunque sia l'insieme A, purchè soddisfacente alla suddetta condizione, non sono misurabili ed ànno misura interna nulla e misura esterna eguale ad uno.

Osserviamo di sfuggita, come si può del resto facilmente dimostrare, che l'insieme degli insiemi $B(A)$ e $C(A)$ ottenibili facendo variare A à potenza superiore a quella del continuo.

Premettiamo ora i seguenti teoremi:

Teor. 5. — $I'(x)$ ed $I''(x)$ *non ànno alcun punto in comune.*

Se infatti z fosse un punto comune ad $I'(x)$ e ad $I''(x)$ vorrebbe dire per le definizioni di $I'(x)$ ed $I''(x)$ che sarebbero razionali tanto $z - x$ quanto $z - (I - x)$ quindi anche la loro differenza $z - x - [z - (I - x)] = I - 2x$ quindi anche x contrariamente all'ipotesi.

Teor. 6. — *$J(x)$ ed $J(x)$ o coincidono o non ànno nessun punto comune.*

Infatti sia z un punto comune ad $J(x)$ e ad $J(x)$, sia t un punto qualunque di $J(x)$, voglio far vedere che t apporterà anche ad $J(y)$.

Per questo osserviamo che appartenendo z ad $J(x)$ e ad $J(y)$ si avvererà (per la definizione di J) uno dei quattro seguenti casi:

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{l} z - x = \text{razionale} \\ z - y = \text{raz.} \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{l} z - (1 - x) = \text{raz.} \\ z - y = \text{raz.} \end{array}\right.$$

$$\text{III.}\quad \left\{\begin{array}{l} z - x = \text{raz.} \\ z - (1 - y) = \text{raz.} \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}\quad \left\{\begin{array}{l} z - (1 - x) = \text{raz.} \\ z - (1 - y) = \text{raz.} \end{array}\right.$$

da (I) o da (IV) si ricava

$$x - y = \text{raz.}$$

da (II) o da (III)

$$x + y = \text{raz.}$$

Adesso se t appartiene ad $J(x)$ sarà evidentemente

$$\sigma \qquad t - x = \text{raz.}$$

$$\text{oppure } t - (1 - x) = \text{raz.}$$

saranno quindi ancora possibili quattro casi

$$\text{I.} \quad \begin{cases} t - x = \text{raz.} \\ x - y = \text{raz.} \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} t - (1 - x) = \text{raz.} \\ x - y = \text{raz.} \end{cases}$$

$$\text{III.} \quad \begin{cases} t - x = \text{raz.} \\ x + y = \text{raz.} \end{cases}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} t - (1 - x) = \text{raz.} \\ x + y = \text{raz.} \end{cases}$$

da (I) o da (IV) si ricava

$$t - y = \text{raz.}$$

da (II) o da (III)

$$(t - 1 - y) = \text{raz.}$$

nel primo caso t appartiene ad $I'(x)$ nel secondo ad $J''(y)$ quindi sempre ad $J(y)$ come dovevamo dimostrare.

Dato poi un punto qualunque di $J(y)$ si vedrebbe analogamente che appartiene anche ad $J(x)$; possiamo quindi affermare che due insiemi $J(u)$ ed $J(v)$ se ànno un punto comune coincidono.

Osserviamo ora che ogni punto x di N appartiene ad uno $J(x)$ e ad un solo insieme J (se x appartenesse a due insiemi J_y ed J_z questi per il teorema precedente coinciderebbero).

Si può quindi decomporre l'insieme N nella somma di tanti insiemi J.

TEOR. 7. — *Gli insiemi $B(A)$ e $C(A)$ non ànno alcun punto comune e la loro somma è N.*

Se z fosse un punto comune a $B(A)$ e $C(A)$ sarebbe

$$z \lessdot I'(x)$$

$$z < I''(y)$$

dove x ed y sono due punti appartenenti ad A; intanto non può essere $x = y$ perchè allora lo stesso punto apparterrebbe ad $I'(x)$ e ad $I''(x)$ contrariamente al teorema 5; se $x \neq y$ z apparterrebbe contemporaneamente ad J_x e ad J_y che coinciderebbero (Teor. 6), ma allora ad A apparterrebbero due punti diversi dello stesso insieme J il che è assurdo, perchè in contrasto con la definizione di A.

Facciamo ora vedere che un punto u qualunque di N *o* è in B *o* è in C; consideriamo $J(u)$ un certo punto v di esso apparterrà ad A; intanto $J(u)$ coinciderà con $J(v)$ ed ed u appartenendo ad $J(v)$ apparterrà o ad $I'(v)$ o ad $I''(v)$; nel primo caso apparterrà a B, nel secondo a C.

TEOR. 8. — *Gli insiemi $B(A)$ e $C(A)$ sono geometricamente eguali.*

Infatti sia x un punto di $B(A)$ esso apparterrà per la definizione di $B(A)$ od $I'(y)$ dove y è un punto di A; sarà dunque $x - y =$ raz.

Consideriamo il punto $x = I - x$; osservando che $x - y =$ raz. sarà anche $(I - x) - (I - y) =$ raz. ossia $z - (I - y) =$ raz. cioè z appartiene ad $I''(y)$ e quindi a C.

Dunque se x è un punto di B $I - x$ è un punto di c e (si dimostra analogamente) viceversa.

B e C sono dunque geometricamente eguali.

TEOR. 9. — *Gli insiemi B e C sono uniformi nell'intervallo* $(0 \overline{\quad} 1)$.

Basterà per il teor. 2 far vedere che essi sono equidistribuiti. Per questo dato σ positivo arbitrario e piccolo a piacere consideriamo un numero intero $n > \frac{I}{\sigma}$ e dividiamo l'intervallo $(0 \overline{\quad} 1)$ in intervalli parziali mediante i punti $\frac{K}{n}$ $(1 \leq K \leq n - 1)$ cosicchè ogni intervallo parziale avrà misura $\frac{I}{n}$, quindi minore di σ.

Facciamo ora vedere che le parti di B comprese in due intervalli parziali qualsiasi sono geometricamente eguali. Siano ad esempio gli intervalli:

$$I_h = \left(\frac{h}{n} - \frac{h+I}{n}\right) \qquad I_k = \left(\frac{K}{n} \quad \frac{K+I}{n}\right)$$

Sia x un punto di $B \times I_h$ voglio far vedere che $x + \frac{K-h}{n}$ appartiene a $B \times I_k$. Sia ancora y il punto di A tale che x appartiene ad $I'(y)$ sarà $x - y =$ raz. ed essendo $\frac{k-h}{n} =$ raz. poichè h, k ed n sono interi sarà anche

$$\left(x + \frac{K-h}{n}\right) - y = \text{raz.}$$

quindi $x + \frac{K-h}{n}$ appartiene ad $I'(y)$ e quindi a $B(A)^n$; siccome poi appartiene evidentemente I_k apparterrà anche a $B(A) \times I_k$. Analogamente per ogni punto di I_k ne esisterà uno di I_h che è eguale ad esso diminuito di $\frac{K-h}{n}$.

Dunque tutte queste parti sono geometricamente eguali ed ànno quindi eguali misure interne ed eguali misure esterne. Potremo scrivere le formule.

$$\frac{m'(B \times I_1)}{\left(\frac{I}{n}\right)} = \frac{m'(B \times I_2)}{\left(\frac{I}{n}\right)} = \ldots = \frac{\Sigma\, m'(B \times I_h)}{\left(\frac{I}{n}\right)} = \frac{m'(B \times I)}{1}$$

$$\frac{m''(B \times I_1)}{\left(\frac{I}{n}\right)} = \frac{m''(B \times I_2)}{\left(\frac{I}{n}\right)} = \ldots = \frac{\Sigma\, m''(B \times I_h)}{\Sigma\left(\frac{I}{n}\right)} = \frac{m''(B \times I)}{1}$$

che ci dicono che B è equidistribuito c. d. d.

Lo stesso ragionamento si può ripetere parola per parola su C.

Gli insiemi $B(A)$ e $C(A)$ così costruiti soddisfano a tutte le condizioni richieste dalla regola: difatti noi siamo partiti dall'insieme N che essendo compreso nell'intervallo $(0 \overline{\quad} 1)$ è equidistribuito nel medesimo intervallo perchè avendo evidentemente misura 1, la misura di quella parte di esso che è contenuta in un qualsiasi intervallo D (interno a sua volta a $(0 \overline{\quad} 1)$ è eguale alla misura di D; lo abbiamo diviso in due insiemi $B(A)$ e $C(A)$ senza punti comuni (Teor. 7) geometricamente eguali (Teor. 8) pure uniformi in $(0 \overline{\quad} 1)$ (Teor. 9); quindi non sono misurabili.

III.

Le considerazioni fatte si possono generalizzare ad uno spazio avente un numero qualunque di dimensioni.

Osserviamo anzitutto che la definizione di insiemi geometricamente eguali vale ancora in questo caso ed è ancora immediato il teorema che dice: « *Due insiemi geometricamente eguali ànno eguali misure interne ed eguali misure esterne* ».

Def. 4. — *Un insieme E lo diremo equidistribuito in un certo insieme aperto U che lo contenga se dato ε positivo arbitrario si può trovare una divisione di U in intervalli parziali con i lati paralleli agli assi coordinati ciascuno di diametro inferiore a ε tale che per ogni singolo intervallo D_n valgano le relazioni*

$$\frac{m'(E \times D_n)}{m\, D_n} = \frac{m'\, E}{m\, U} = \alpha'$$

$$\frac{m''(E \times D_n)}{m\, D_n} = \frac{m''\, E}{m\, U} = \alpha''$$

dove α' ed α'' risultano quindi due costanti dipendenti solamente da E e da U comprese tra 0 ed I.

Si vede subito come la definizione degli insiemi equidistribuiti già data per il caso degli insiemi lineari non è altro che un caso particolare di questa.

Def. 5 — *Un insieme E lo diremo uniforme in un certo insieme aperto U che lo contenga se per qualunque insieme* *aperto* O *contenuto in U valgono le relazioni*

$$\frac{m'(E \times O)}{m\,O} = \frac{m'\,E}{m\,U} = \alpha'$$

$$\frac{m''(E \times O)}{m\,O} = \frac{m''\,E}{m\,U} = \alpha''$$

Questa definizione è identica a quella già data per gli insiemi lineari.

TEOR. 10. — *Dato un dominio D in uno spazio ad n dimensioni e dato un numero ε positivo arbitrario si può trovare un numero σ tale che la somma delle misure di quanti si vogliano dominii non aventi punti comuni tra loro due a due, aventi almeno un punto comune col contorno di D ed aventi diametro non superiore a σ sua minore di ε.*

Consideriamo una faccia del dominio D; essa abbia le dimensioni $l_1\, l_2 \ldots l_{n-1}$. È evidente che tutti i dominii di diametro minore di σ che ànno un punto (almeno) comune con essa sono contenute in un dominio di dimensioni $l_1 + 2\,\sigma$, $l_2 + 2\,\sigma \ldots l_n + 2\,\sigma$; la cui misura possiamo quindi scrivere sotto la forma $\sigma\,R(\sigma)$ dove $R(\sigma)$ è un polinomio in σ a coefficienti dipendenti solamente da D; e siccome essi non ànno a due a due punti comuni la somma delle loro misure sarà quindi eguale o minore di $\sigma\,R(\sigma)$.

Ripetendo un analogo ragionamento per tutte le altre $2\,n - 1$ faccie di D si ottiene che la somma delle misure dei dominii non aventi punti comuni a due a due che ànno (almeno) un punto comune col contorno di D è minore di $\sigma\,Q(\sigma)$ dove al solito $Q(\sigma)$ è un polinomio in σ; ma per un noto teorema di algebra dato ε positivo arbitrario si può trovare σ_0 tale che per $\sigma < \sigma_0$ $\sigma\, Q(\sigma) < \varepsilon$, quindi il teorema è dimostrato.

TEOR. 11. — *Un insieme E equidistribuito in un certo insieme aperto U è anche uniforme nello stesso insieme aperto.*

Sia l'insieme E equidistribuito in U e sia 0 un insieme aperto qualsiasi contenuto in U. Quest'ultimo sarà la somma di un numero finito o di una infinità numerabile di domini coi lati paralleli agli assi coordinati. Indichiamo con I_n il dominio ennesimo.

Chiamiamo σ_n un numero tale che la somma delle misure di quanti si vogliono dominii non aventi punti comuni tra loro ed aventi (almeno) un punto comune col contorno di I_n ed aventi diametro non superiore a σ_n sia minore di $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Un simile numero esiste per il teorema 10.

Dividiamo ora l'insieme aperto U in dominii D ognuno di misura non superiore a σ_n in modo che sia soddisfatta la condizione di cui alla def. 4 (risulta $\varrho = \sigma_n$). Questa divisione è possibile perchè E per ipotesi è equidistribuito in U.

Indichiamo con G la somma degli intervalli interni ad I_n, con K la somma di quelli solo parzialmente interni e sia $H = G + K$. Per il teorema 10 avremo

$$m\, H - m\, G < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{28}$$

Ora evidentemente

$$H > I_n > G$$
$$(H \times E) > (I_n \times E) > (G \times E)$$

e quindi per le misure

$$\begin{aligned} m'(H \times E) > m'(I_n \times E) > m'(G \times E) \\ m''(H \times E) > m''(I_n \times E) > m''(G \times E) \end{aligned} \tag{29}$$

e perchè H e G sono somme di un numero finito di intervalli D per cui valgono le condizioni di cui alla def. 4 si avrà

$$m'(E\times H)=\alpha' m H$$

$$m''(E\times H)=\alpha'' m H$$

$$m'(E\times G)=\alpha' m G$$

$$m''(E\times G)=\alpha'' m G$$

sostituendo nelle (29) avremo

$$\begin{aligned}\alpha' m H &\geqslant \alpha' m (E\times I_n) \geqslant \alpha' m G\\ \alpha'' m H &\geqslant \alpha'' m (E\times I_n) \geqslant \alpha'' m G\end{aligned}\tag{30}$$

D'altra parte noi abbiamo

$$m H \geqslant m I_n \geqslant m G \tag{31}$$

e moltiplicando la (31) prima per α' e poi per α'' avremo

$$\begin{aligned}\alpha' m H &\geqslant \alpha' m I_n \geqslant \alpha' m G\\ \alpha'' m H &\geqslant \alpha'' m I_n \geqslant \alpha'' m G\end{aligned}\tag{32}$$

e confrontando le (32) con le (30) tenendo conto di (28) si à

$$\begin{aligned}|\alpha' m I_n - m'(E\times I_n)| &\leq \frac{\varepsilon}{2^n}\alpha' \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\\ |\alpha'' m I_n - m''(E\times I_n)| &\leq \frac{\varepsilon}{2^n}\alpha'' \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\end{aligned}\tag{33}$$

e sommando le (33) rispetto ad $n\ (0=\Sigma I_n)$

$$|\alpha' m 0 - m'(E\times 0)| \leq \varepsilon$$

$$|\alpha'' m 0 - m''(E\times 0)| \leq \varepsilon$$

ed essendo σ positivo arbitrario

$$m'(E \times 0) = \alpha' m\, 0$$

$$m''(E \times 0) = \alpha'' m\, 0$$

ma per le (1)

$$\alpha' = \frac{m' E}{m U}$$

$$\alpha'' = \frac{m'' E}{m U}$$

otteniamo quindi

$$\frac{m' E \times 0}{m\, 0} = \frac{m' E}{m U} = \alpha'$$

$$\frac{m'' E \times 0}{m\, 0} = \frac{m'' E}{m U} = \alpha''$$

che sono appunto le formule cercate, cioè le (1) scritte per un insieme aperto qualsiasi purchè contenuto in U.

Se poi osserviamo che il teorema 4 vale anche per insiemi non lineari poichè la sua dimostrazione è basata esclusivamente sul concetto di misura, abbiamo generalizzato tutti i teoremi già dimostrati per gli insiemi lineari; la regola data varrà quindi ancora per trovare insiemi non misurabili non lineari.

Un esempio di questi insiemi non misurabili non lineari si ottiene facilmente generalizzando l'esempio dato nel § 2.

Sia M l'insieme dei punti $X = (x_1\, x_2 \ldots x_n)$ tali che

$$0 < x_i < I.$$

Sia N l'insieme dei punti di M che ànno tutte le x_i irrazionali.

P sia un punto di N.

$I(X)$ sia l'insieme dei punti $Y=(y_1, y_2, \dots y_n)$ di N tali che si abbia

$$y_i - x_i = \text{razion.} \qquad (i = 1, 2 \dots n).$$

$I''(X)$ sia l'insieme definitivo rispetto a $T=(I-x_1, I-x_2 \dots I-x_n)$ come $I'(X)$ rispetto ad X

$J(X)$ sia la somma di $I'(X)$ ed $I''(X)$.

Abbiamo le seguenti proprietà:

1. — *$I'(X)$ ed I'' non ànno punti comuni.*

2. — *$J(X)$ ed $J(Y)$ o coincidono o non ànno punti comuni.*

3. — *Ogni punto di N appartiene ad uno e ad un solo insieme J.*

La dimostrazione di queste proprietà, che omettiamo per brevità è del tutto analoga a quella data nel § 3 nel caso di insiemi lineari.

Possiamo quindi dividere in uno ed un sol modo l'insieme N nella somma di tanti insiemi del tipo $J(X)$.

Prendiamo ora un insieme A tale che esso contenga uno ed un sol punto per ogni insieme J.

Indichiamo con X il punto generico:

Poniamo $B(A) = \Sigma\, I'(X)$.

» $C(A) = \sum I''(X)$.

Gli insiemi $B(A)$ e $C(A)$ non sono misurabili ed ànno misura interna nulla e misura esterna eguale ad uno.

Infatti (come si vede analogamente a quanto si è visto per insiemi lineari) essi sono geometricamente eguali, la loro somma è eguale ad N che è uniforme in M; sono anch'essi uniformi in M, non ànno punti comuni, soddisfano quindi a tutte le condizioni richieste dalla regola.

IV.

Voglio ora dimostrare che gli insiemi non misurabili trovati da Caratheodory (1) rientrano nella classe ora trovata.

Basterà per questo far vedere:

1. Che essi sono ottenuti mediante la divisione di un insieme U, uniforme in un insieme aperto, in un numero finito od in una infinità numerabile di parti a due a due senza punti comuni pure uniformi nello stesso insieme aperto.

2. Che queste parti ànno eguali misure interne ed eguali misure esterne.

Egli considera infatti degli insiemi che chiamo $A_0\ A_1 A_{-1}\ A_2 A_{-2} \ldots A_n A_{-n}$.

Nel suo caso l'insieme U sarebbe quello dei punti $P \equiv (x_1 x_2 \ldots x_n)$ dove $0 \leq x_i < I$ che è evidentemente uniforme nell'insieme aperto 0 dei punti per cui $0 < x_i < I$ $(i = 1, 2 \ldots n)$. Gli insiemi A_i sono ottenuti mediante la suddivisione di U in parti che non ànno a due a due punti comuni (2). Siccome essi poi ànno misura esterna nulla (3) e misura esterna a quella di 0 che li contiene (4) sono evidentemente nel medesimo intervallo.

Per il secondo punto essi essendo somme di parti geometricamente eguali, hanno evidentemente eguali misure esterne (5).

Scuola Normale Superiore - Pisa, febbraio 1924.

---

(1) CARATHEODORY. *Vorlesungen über reelle Funktronen.*
(2) Id. s. 349.
(3) Id. s. 352.
(4) Id. s. 353.
(5) Id. s. 351.