Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Amedeo Giacomini

Sulla corrispondenza fra la geometria conforme di S_4 e la geometria proiettiva dello spazio ordinario

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 8 (1899), exp. nº 4, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1899_1_8__A4_0>

AMEDEO GIACOMINI

SULLA CORRISPONDENZA

FRA LA

GEOMETRIA CONFORME DI S_4

E LA

GEOMETRIA PROIETTIVA DELLO SPAZIO ORDINARIO

RIASSUNTO DELLA TESI DI LAUREA
PRESENTATA ALLA R. UNIVERSITÀ DI PISA NELL'OTTOBRE 1896

8

Il KLEIN nella nota memoria " *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* „ (1) proiettando stereograficamente una quadrica ad $n-1$ dimensioni, immersa in uno spazio lineare ad n, sopra uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni, mostra come la Geometria proiettiva di uno spazio ad n dimensioni, in cui si supponga fissa quella quadrica e fisso il centro di proiezione, equivalga alla Geometria proiettiva dello spazio ad $n-1$ dimensioni in cui si suppone fissa una quadrica ad $n-3$ dimensioni. In particolare, la Geometria dello spazio a quattro dimensioni, nella quale si assume come assoluto la sfera immaginaria all'infinito, equivale alla Geometria delle trasformazioni proiettive dello spazio a cinque dimensioni in se stesso, le quali vi lasciano invariata una quadrica a quattro dimensioni e su di essa un punto scelto ad arbitrio. Ond'è che la Geometria metrica di S_4 viene riferita alla Geometria rigata dello spazio ordinario, nella quale si supponga fissa una retta arbitraria.

Il KLEIN prosegue osservando che vi sono delle proprietà della quadrica ad $n-1$ dimensioni, quelle che non includono nel loro enunciato il punto di proiezione, le quali, proiettate sull'S_{n-1}, sono invarianti, non solo rispetto al gruppo delle ordinarie trasformazioni della Geometria metrica (posto che l'assoluto scelto in S_{n-1} sia la sfera ad $n-3$ dimensioni immaginaria all'infi-

(1) Mathematische Annalen, Bd. V, 1872.

nito), ma anche rispetto ad ogni inversione per raggi vettori reciproci. — Eseguendo il cammino inverso, egli esamina le principali proprietà dello spazio a quattro dimensioni, le quali non variano per raggi vettori reciproci, e le trasporta alla Geometria proiettiva dello spazio ordinario, nella quale in tal caso si rende inutile il fissare come invariabile una retta arbitraria.

Nelle pagine che seguono ho cercato di approfondire il significato geometrico del teorema di Klein, giungendo ad esso per una via affatto diversa, e cioè ravvicinando la Geometria che ha per gruppo di trasformazioni il gruppo proiettivo (e che lascia invariata la varietà delle rette) dello spazio ordinario, alla Geometria che ha per gruppo di trasformazioni il gruppo *conforme* (e che lascia invariata la varietà dei punti, considerati come ipersfere) dello spazio a quattro dimensioni.

Nel § 1 ho esaminata rapidamente la Geometria delle ipersfere di S_4 (e dei loro sistemi lineari) mostrando come la varietà dei punti ipersfere sia quadratica.

Nel § 2 profittando del noto teorema di Liouville sulla rappresentazione conforme di uno spazio lineare in se medesimo, ho dimostrato come tutte e sole le trasformazioni proiettive dello spazio di ipersfere in se medesimo, le quali lasciano in se stessa la quadrica dei punti, sono quelle del gruppo che chiamo *conforme*, del gruppo cioè ottenuto associando al gruppo *principale* della ordinaria Geometria metrica di S_4 tutte le inversioni per raggi reciproci.

Ne risulta immediatamente il teorema di Klein.

Nel § 3 è esposta la corrispondenza che lega la Geometria conforme di S_4 alla Geometria proiettiva dello spazio ordinario; è ricercato nello spazio rigato il concetto geometrico che corrisponde a quello di angolo in S_4; e sono esposte altre applicazioni del teorema di Klein, intorno alle linee di curvatura, alle varietà anallagmatiche, ecc.

§ I.

Le ipersfere dello spazio a quattro dimensioni e la quadrica dei punti.

1. In uno spazio euclideo a quattro dimensioni la ipersuperficie del second'ordine passante per la sfera immaginaria all'infinito è tagliata da ogni S_3 secondo una ordinaria sfera, da ogni S_2 secondo un cerchio; e può definirsi come la varietà triplamente infinita dei punti equidistanti da un centro fisso: la diremo *ipersfera* di S_4.

2. Due ipersfere si tagliano secondo un angolo, che è costante in tutti i punti della intersezione: ed è l'angolo di due sfere (o due cerchi) giacenti sulle due ipersfere e sopra un iperpiano (o piano) passante per i centri delle medesime. Se d è la distanza dei centri, ed r, r' sono le lunghezze dei raggi, l'ortogonalità delle due ipersfere è espressa dall'annullarsi della quantità:

$$d^2 - r^2 - r'^2,$$

che diremo col sig. Loria (1) invariante simultaneo delle due ipersfere: esso mostra che se delle due ipersfere l'una è di raggio finito e su di essa è il centro dell'altra, questa seconda è ortoganale alla prima allora e allora soltanto che il suo raggio sia nullo.

Nello spazio a quattro dimensioni due sfere hanno in generale a comune due soli punti a distanza finita e due punti situati sulla sfera immaginaria all'infinito: poichè i due S_3 a cui esse appartengono hanno a comune un S_2, il quale sega le due sfere secondo due cerchi. Se le due sfere però appartengono alla me-

(1) Loria. *Ricerche sulla geometria delle sfere ecc.* — Memorie della R. Accademia di Torino. — Serie II. T. XXXVI. 1885.

desima ipersfera, quei due cerchi coincidono in uno solo, pel quale passano entrambe le sfere. Inversamente, se due sfere hanno un cerchio comune, o giacciono sul medesimo S_3 o sulla medesima ipersfera.

Due cerchi in S_4 non hanno in generale alcun punto a comune. Se hanno un punto a comune, appartengono allo stesso S_3 od alla medesima ipersfera; poichè infatti i due S_2 condotti pei centri dei cerchi normalmente ai rispettivi piani s'incontrano in un punto, il quale è equidistante da tutti i punti dei due cerchi. Se hanno due punti a comune, appartengono allo stesso S_2 od alla medesima sfera; ed inversamente.

3. Quando un S_3 è tangente in un punto P ad una ipersfera, la sfera intersezione si riduce al cono che da P proietta il cerchio immaginario all'infinito di quell'S_3 tangente. In ogni punto di una sfera l'S_2 ad essa tangente la interseca secondo due rette, quelle che dal punto di contatto vanno ai punti ciclici di quell'S_2 tangente.

4. Ogni punto di S_4, considerato insieme colle rette che da esso proiettano i punti della sfera immaginaria all'infinito, costituisce una particolare ipersfera (di raggio nullo) che diremo *S_0-ipersfera* o *punto-ipersfera.*

Ogni iperpiano di S_4, considerato insieme coll'iperpiano all'infinito [1], costituisce una particolare ipersfera (di raggio infinito) che diremo *S_3-ipersfera.*

5. Assumiamo come elemento generatore dello spazio a quattro dimensioni la ipersfera. Esso si presenta allora come varietà lineare

---

[1]) In coordinate cartesiane, data l'ipersfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_4 - \mathrm{R})^2 = \mathrm{R}^2,$$

se si introduce l'omogeneità cangiando x_1, x_2, x_3, x_4 in $\frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}, \frac{x_4}{x_5}$, e si fa poscia $\mathrm{R}=\infty$, l'ipersfera si scinde negli iperpiani

$$x_4 = 0, \; x_5 = 0.$$

a cinque dimensioni; nella quale sono contenute come subordinate la varietà dei punti-ipersfere e quella degli S_3-ipersfere.

L'ente lineare semplicemente infinito nello spazio delle ipersfere, l'ente cioè che rimane individuato da due qualsivogliano de'suoi elementi, è il *fascio* delle ipersfere passanti per una sfera. La retta dei centri, cioè la retta condotta pel centro della sfera base normalmente al suo iperpiano, si dirà *asse* del fascio; essa incontra le ipersfere del fascio in coppie di punti che formano un'involuzione. Ogni fascio di ipersfere ammette dunque sempre due punti-ipersfere, i cui centri sono i punti doppî dell'involuzione segnata sull'asse; questi centri sono separati armonicamente da ogni ipersfera del fascio.

Nello spazio delle ipersfere la varietà dei punti-ipersfere è quindi del second'ordine; ed è facile vedere che non è specializzata, che cioè non esiste alcun punto-ipersfera tale che in ogni fascio generico passante per esso l'altro punto-ipersfera coincida col primo. Se infatti si assume un qualunque punto-ipersfera ed una ipersfera generica dello spazio, nel loro fascio i centri dei due punti-ipersfera sono separati armonicamente da quella, epperò sono distinti.

Se una ipersfera del fascio deve essere un iperpiano, la corrispondente coppia dell'involuzione sull'asse deve avere un elemento a distanza infinita: tale condizione si verifica una volta; e l'iperpiano in parola è quello della sfera base.

Concludiamo dunque: i punti-ipersfere dello spazio euclideo a quattro dimensioni costituiscono una varietà quadratica non specializzata a quattro dimensioni, immersa in uaa varietà lineare a cinque; la varietà degli S_3-ipersfere di S_4 è lineare ed a quattro dimensioni.

6. In un fascio di ipersfere, il cono che dal centro di un punto-ipersfera del fascio proietta la sfera immaginaria all'infinito, passa come ogni altra ipersfera del fascio, per la sfera base. Onde le rette che vanno da un punto-ipersfera del fascio ai punti della sfera base incontrano il luogo immaginario all'infinito.

7. Questa osservazione ci mette in grado di dimostrare che due ipersfere ortogonali sono coniugate rispetto alla quadrica dei punti-ipersfere; costruito infatti il loro fascio, dimostreremo che le due ipersfere ortoganali e i due punti-ipersfere del fascio formano un gruppo armonico.

Si tagli (per maggiore evidenza) il fascio detto con un piano passante per l'asse, e si otterrà quel fascio di cerchi che ha per punti base i due punti d'incontro del piano colla sfera base del fascio di ipersfere. Il fascio di cerchi è proiettivo al fascio delle loro tangenti in un punto base; le tangenti ai cerchi ortogonali sono ortogonali, le tangenti ai punti-cerchi vanno ai punti ciclici: onde i due cerchi ortogonali sono armonici alla coppia dei punti-cerchi.

Il teorema potendosi evidentemente invertire, si conclude: condizione necessaria e sufficiente affinchè due ipersfere siano coniugate rispetto alla quadrica dei punti-ipersfere, è che esse siano ortogonali [1]).

8. Riassumendo quanto riguarda i fasci di ipersfere, diciamo che: data una sfera, esiste una coppia di punti *ortogonale* (cioè separata armonicamente ed allineata col centro) ad ogni ipersfera passante per quella sfera.

I due punti sono simmetrici rispetto alla sfera, e, com'è facile vedere, la loro semidistanza eguaglia il raggio della medesima moltiplicato per $\sqrt{-1}$.

9. Tre ipersfere non appartenenti tutte ad un fascio hanno a comune un cerchio c ed individuano quindi il sistema lineare ∞^2 delle ipersfere passanti per esso.

Se per il centro O del cerchio c si conduce il piano π perpendicolare al piano del cerchio stesso, tutti e soli i punti di π sono

---

[1]) Se sopra una retta si considera la semplice infinità delle coppie di punti armoniche rispetto a due punti fissi (fra cui compare ciascuno di questi contato due volte), due di tali coppie sono altresì armoniche fra loro se, considerate come elementi, separano armonicamente le due coppie rappresentate dai due punti fissi; e inversamente.

i centri delle ipersfere del sistema, poichè ciascuno di essi è equidistante dai punti della circonferenza c. Il piano π si dirà *asse* del sistema ∞^2.

Due ipersfere del sistema staccano un fascio, di cui l'asse giace su π; ed ogni retta di π è asse di un fascio contenuto nel sistema. I centri dei punti-ipersfera del sistema ∞^2 costituiscono dunque un luogo, il quale è del second' ordine perchè ogni retta di π lo incontra in due punti. Si vede subito però che tale curva del second'ordine è un cerchio: infatti un qualunque fascio del sistema ∞^2 che abbia per asse una retta per O, ha per sfera base una sfera che ha per cerchio massimo c, e quindi ha i due punti-ipersfera distanti da O di una lunghezza eguale al raggio di c moltiplicato per $\sqrt{-1}$; epperò il luogo dei punti ipersfera del sistema lineare ∞^2 è un cerchio φ concentrico con c posto nel piano perpendicolare al piano di c, ed avente per raggio una lunghezza eguale al raggio di c moltiplicato per $\sqrt{-1}$. Ogni ipersfera del sistema ∞^2 è ortogonale al cerchio φ, perchè i diametri di essa giacenti su π sono divisi armonicamente da φ: ed inversamente è manifesto che tutte le ipersfere ortogonali ad un cerchio costituiscono un sistema lineare ∞^2.

Riassumiamo dunque dicendo che: dato un cerchio, esiste un altro cerchio ortogonale a tutte le ipersfere passanti per il primo: i due cerchi sono simmetrici l'uno rispetto all'altro e le lunghezze dei loro raggi differiscono solo per il fattore $\sqrt{-1}$: le rette che congiungono i punti dell'uno coi punti dell'altro sono appoggiate alla sfera immaginaria all'infinito.

10. Quattro ipersfere generiche individuano il sistema lineare ∞^3 delle ipersfere passanti per i due punti comuni a quelle quattro; l' S_3 che biseca ortogonalmente il segmento compreso fra quei due punti contiene tutti i centri delle ipersfere del sistema, ed in esso la sfera che è simmetrica rispetto a quel segmento ed ha per diametro la lunghezza del medesimo moltiplicata per $\sqrt{-1}$, è costituita da tutti e soli i punti-ipersfere del sistema;

questa sfera è ortogonale a tutte e sole le ipersfere del sistema ∞^3.

Dati dunque due punti, esiste sempre una sfera ortogonale a tutte le ipersfere che passano per essi; i due punti sono disposti simmetricamente rispetto alla sfera, ed il raggio di questa eguaglia la loro semidistanza moltiplicata per $\sqrt{-1}$.

11. Cinque ipersfere generiche non hanno alcun luogo a comune: quattro di esse però individuano un sistema lineare ∞^3, il quale, proiettato dalla quinta mediante fasci, dà un sistema ∞^4, che è egualmente lineare, poichè si vede facilmente che due qualunque delle sue ipersfere individuano un fascio tutto contenuto nel sistema. Ogni punto dello spazio S_4 è centro di una ipersfera del sistema costruito; ne segue che ogni retta è asse di un fascio del sistema, e che quindi il luogo dei punti-ipersfere è una ipersuperficie dal second'ordine. La quale è precisamente una ipersfera ortogonale a tutte le ipersfere del sistema lineare ∞^4, giacchè per ognuna di queste tutti i diametri sono divisi armonicamente dal luogo dei punti-ipersfere.

Inversamente è manifesto che tutte le ipersfere ortogonali ad una fissa costituiscono un sistema lineare ∞^4.

12. Emerge da quanto precede che al fascio delle ipersfere ortogonali ad una coppia di punti e quindi passanti per una sfera, rimane associato il sistema lineare ∞^3 delle ipersfere ortogonali a questa sfera e quindi passanti per quella coppia di punti. E manifestamente le ipersfere dell'un sistema sono ortogonali a tutte le ipersfere dell'altro.

Analogamente, date tre ipersfere, esiste uno ed un solo cerchio comune a tutte tre, esiste uno ed un solo cerchio ortogonale a tutte e tre; tutte le ∞^2 ipersfere che contengo il primo sono ortogonali a tutte le ∞^2 che contengono il secondo.

Infine ad ogni singola ipersfera si può associare il sistema lineare ∞^4 delle ipersfere ad esse ortogonali; ed inversamente.

I sistemi lineari in tal modo associati sono polari l'uno dell'altro rispetto alla quadrica dei punti.

13. Nei precedenti numeri abbiamo esposto un breve esame dei sistemi lineari di ipersfere contenuti nello spazio a quattro dimensioni; nè ci siamo occupati delle particolarità che tali sistemi possono presentare quando si specializzino i loro caratteri fondamentali. È interessante però di esaminare quali sono i sistemi lineari di ipersfere che giacciono completamente sulla quadrica dei punti-ipersfere.

La condizione d'ortoganalità di due ipersfere essendo espressa dall'annullarsi dell'invariante simultaneo

$$d^2 - r^2 - r'^2,$$

si vede che se due punti-ipersfere debbono essere coniugati rispetto alla quadrica dei punti, la loro distanza deve essere nulla, cioè essi debbono giacere sopra una retta appoggiata alla sfera immaginaria all'infinito ([1]); e inversamente i punti di una tale retta sono due a due coniugati rispetto alla quadrica dei punti. Data perciò una retta appoggiata alla sfera immaginaria all'infinito, essa è l'asse di un fascio di punti-ipersfere; inversamente, se vi ha sulla quadrica dei punti un fascio, i suoi punti-ipersfere sono due a due coniugati rispetto alla medesima, cioè i loro centri stanno sopra una retta appoggiata alla sfera immaginaria all'infinito.

Si conclude che tutti e soli i sistemi lineari ∞^1 di punti-ipersfere sono forniti dalle rette di lunghezza nulla (così dette appunto perchè su di esse la distanza euclidea fra due punti qualunque è sempre nulla). Vi sono ∞^5 di tale rette; ogni curva da esse inviluppata si chiama linea di lunghezza nulla, e gode

---

[1]) Com'è noto, (p. es. sul piano) se due punti qualunque distinti (x, y), (ax, ay) sono a distanza nulla, si ha:

$$\begin{aligned}(a-1)^2 x^2 + (a-1)^2 y^2 &= 0\\ x^2 + y^2 &= 0,\end{aligned}$$

cioè i due punti, che abbiamo posti allineati coll'origine, sono altresì allineati con uno dei punti ciclici del piano.

della proprietà che due suoi punti successivi sono sempre i centri di due punti-ipersfere coniugati rispetto alla quadrica dei punti; all'incontro ogni altra curva dello spazio a quattro dimensioni non gode di tale proprietà.

14. Affinchè un sistema lineare ∞^2 di ipersfere appartenga alla quadrica dei punti, è necessario e sufficiente che due suoi elementi qualsivogliano siano sempre coniugati rispetto alla quadrica stessa, che cioè tutti i fasci in esso contenuti sieno dati da rette di lunghezza nulla. Tale sistema è dunque costituito da tutti i punti-ipersfere di un piano che incontri la sfera immaginaria all'infinito secondo una (sola) generatrice; ed in vero in un piano di questa specie, ed in esso solo, ogni retta incontra la sfera immaginaria all'infinito.

I piani appoggiati lungo una generatrice alla sfera assoluto si possono chiamare *piani di area nulla*, per una ragione analoga alla precedente. Per ogni punto P dello spazio S_4, le ∞^2 rette di lunghezza nulla che partono da esso si distribuiscono in un doppio sistema di piani d'area nulla, i piani che da P proiettano le varie generatrici della sfera immaginaria all'infinito. Questi piani per P sono distinti in due serie, tali che due piani della medesima serie hanno il solo punto P a comune, e due piani di serie opposte si tagliano secondo una retta di lunghezza nulla. Nell'S_4 vi sono ∞^3 di tali piani di area nulla, distribuiti adunque tutti in due sistemi: due piani di egual sistema hanno a comune un punto a distanza finita: due piani di sistema diverso non hanno alcun punto a distanza finita a comune, ovvero, se ne hanno uno, hanno tutta una retta di lunghezza nulla. Un piano di area nulla si può trasportare con continuità sopra un piano di egual sistema, ma non sopra un piano di sistema opposto.

Si osservi che due rette di lunghezza nulla uscenti da un punto non determinano in generale un piano di area nulla; e che una retta di lunghezza nulla uscente da P, non può appartenere che a due piani di area nulla uscenti da P.

15. Sulla quadrica dei punti-ipersfere non sono contenuti sistemi lineari ∞^3.

16. Una retta appoggiata alla sfera immaginaria all'infinito incontra ogni ipersfera in un solo ulteriore punto; se ha con essa due punti a distanza finita a comune, vi appartiene interamente. Una retta di lunghezza nulla non ha in generale alcun punto a comune con una sfera o con un cerchio.

Ogni piano appoggiato lungo una generatrice alla sfera immaginaria all' infinito incontra una qualunque ipersfera secondo una ulteriore retta, la quale è di lunghezza nulla; e con una qualunque sfera ha quindi a comune un sol punto a distanza finita. Un piano d' area nulla non incontra in generale un cerchio arbitrario.

§. 2.

Il gruppo delle trasformazioni conformi e il teorema di Klein.

17. Una trasformazione omografica dello spazio di ipersfere in se medesimo cangia un qualunque sistema lineare ∞^i in un nuovo sistema lineare ∞^i, in maniera che se due sistemi lineari si appartengono, i loro corrispondenti si appartengono pure. Ad ogni sfera, pensata come base di un fascio, corrisponde adunque una sfera, ad ogni cerchio un cerchio, ad ogni coppia di punti una coppia di punti; alla quadrica dei punti corrisponderà una varietà quadratica ∞^4 di ipersfere; ad una ipersfera, pensata come elemento, corrisponde una ipersfera; pensata come luogo di punti-ipersfere, corrisponde la varietà delle ipersfere comuni ad una varietà quadratica ∞^4 e ad un sistema lineare ∞^4.

18. Fra tutte, sono a considerarsi particolarmente quelle trasformazioni proiettive dello spazio di ipersfere in sè, le quali riconducono in se medesima la quadrica dei punti-ipersfere; esse godono della proprietà che ad un qualunque punto, pensato sia

come intersezione di ipersfere, sia come punto-ipersfera, fanno corrispondere sempre uno ed uno stesso punto. Sono elementari fra esse le ∞^4 traslazioni di S_4 in se medesimo, le ∞^1 omotetie intorno ad un punto, le ∞^6 rotazioni intorno ad un punto (ogni altra trasformazione per similitudine si può ottenere con trasformazioni di tal sorta); ed esse godono della proprietà comune di conservare gli angoli e di lasciare in se medesimo il luogo a distanza infinita dello spazio S_4. Sono altresì elementari fra le trasformazioni sopra dette le ∞^5 inversioni per raggi vettori reciproci, delle quali più particolarmente ora ci occuperemo; anch'esse, come si vedrà, sono trasformazioni proiettive dello spazio di ipersfere in sè, anch'esse conservano gli angoli, ma non portano in se medesimo il luogo a distanza infinita.

19. Si esegue nello spazio S_4 una inversione per raggi vettori reciproci quando si invertono le coppie di punti ortogonali rispetto ad una ipersfera fondamentale. Una tale trasformazione è adunque biunivoca ed involutoria, e definisce sopra ogni iperpiano o piano per il *polo* una ordinaria inversione per raggi reciproci, e su ogni retta per il polo una involuzione.

Segue di qui che la inversione cangia le ipersfere in ipersfere; e quindi le sfere in sfere, i cerchi in cerchi, i sistemi lineari di ipersfere in analoghi sistemi.

Sono elementi eccezionali della trasformazione il polo, a cui corrispondono tutti i punti dell'iperpiano all'infinito; e tutti i punti del cono che dall'origine circoscrive la ipersfera fondamentale, poichè su di esso tutti i punti di una medesima generatrice hanno per corrispondente il punto di contatto della stessa, cioè il punto in cui la generatrice si appoggia alla sfera immaginaria all'infinito.

Ogni ipersfera per l'origine si trasforma quindi nell'iperpiano che contiene la sua sfera d'intersezione coll'ipersfera fondamentale, unitamante all'iperpiano all'infinito.

L'inversione cangia in se stessa ogni ipersfera (o sfera, o cerchio, o coppia di punti) ortogonale alla ipersfera fondamentale [1]: in altre parole l'inversione per raggi reciproci lascia in se stesso il sistema lineare ∞^4 che è polare della ipersfera fondamentale rispetto alla quadrica dei punti, e scambia fra loro i due punti-ipersfera di ogni fascio determinato dalla ipersfera fondamentale e da una ipersfera del sistema polare. L'inversione deve dunque considerarsi come un'ordinaria omologia armonica dello spazio delle ipersfere, nella quale il centro d'omologia e l'iperpiano d'omologia sono rispettivamente polo e polare rispetto alla quadrica dei punti.

20. Tornando però all'ordinario concetto di inversione per raggi reciproci, è interessante di ricercare direttamente come si comportano rispetto ad una tale trasformazione le rette di lunghezza nulla ed i piani d'area nulla.

Se una retta r incontra la sfera immaginaria all'infinito in un punto P, e quindi ulteriormente la ipersfera fondamentale in un secondo punto Q, e il cono che dal polo proietta la sfera immaginaria all'infinito in un secondo punto R, ad essa retta corrisponde nella inversione un cerchio, il quale si spezza in due rette: una di queste rette è quella che congiunge il polo della trasformazione col punto P, poichè a questo punto corrispondono tutti quelli di tale generatrice del cono; la seconda retta è quella che congiunge Q col punto R' della sfera immaginaria all'infinito, allineato con R e col polo. Escludendo come elemento eccezionale la prima di queste rette, si vede dunque che ad ogni retta di lunghezza nulla corrisponde una retta pure di lunghezza nulla.

---

[1]) Abbiamo così un modo, forse più elegante di quello adoperato più sopra, per dimostrare che due ipersfere ortogonali sono separate armonicamente dalla quadrica dei punti. Se infatti A e B sono tali ipersfere, e P, P' i punti-ipersfere dal loro fascio, il rapporto anarmonico $(ABPP')$ non varia per qualunque omografia, in particolare per la inversione definita dalla ipersfera fondamentale A: ma tale inversione lascia in se stesse A e B, e scambia P con P', onde

$$(ABBP') = (ABP'P)$$

cioè A, B sono separate armonicamente da P, P'.

Si abbia ora un piano α, che incontri la sfera immaginaria all'infinito σ secondo la (sola) generatrice γ; siano γ', γ'' rispettivamente le rette secondo cui α incontra ulteriormente la ipersfera fondamentale e il cono che dal polo C proietta la sfera σ. Ai punti di γ corrisponde tutto il piano $C\gamma$, il quale è da escludersi come eccezionale; i punti di γ' corrispondono a se stessi; alla retta γ'' corrisponderà una retta γ_1'' di σ, perchè il piano $C\gamma''$ è appoggiato alla σ lungo una generatrice.

Si osservi che l'iperpiano $C\alpha$ sega σ secondo le due rette γ, γ_1'', onde è tangente alla ipersfera fondamentale, e la sega secondo un ordinario cono, di cui γ, γ', γ_1'' sono tre generatrici. Ciò mostra che γ', γ_1'' stanno in un piano (di area nulla) il quale corrisponde propriamente ad α nella data inversione; e che γ, γ_1'' stanno pure in un piano, e quindi i due piani di area nulla che si corrispondono nella inversione appartengono a sistema diverso.

Si conclude: ogni inversione lascia in se stessa la varietà delle rette di lunghezza nulla, e permuta i due sistemi di piani d'area nulla.

21. Due iperpiani formano fra loro un angolo eguale a quello delle ipersfere trasformate, poichè queste sono tangenti nell'origine agli iperpiani condotti per essa parallelamente a quelli. Perciò due ipersuperficie qualunque che si segano e le loro trasformate formano angoli eguali nei punti corrispondenti della intersezione; analogamente due curve uscenti da un punto, ovvero una curva ed una ipersuperficie, formano fra loro un angolo eguale a quello delle trasformate.

Dati due piani generici di S_4, essi hanno a comune un solo punto; e non si può quindi parlare propriamente del loro angolo; si può dire però che, scelte due rette rispettivamente sui due piani a partire dal loro punto comune, il loro angolo è sempre eguale a quello delle curve trasformate.

Seguendo dunque una definizione data dal sig. JORDAN [1]) pos-

---

[1]) Il sig. JORDAN (*Essai sur la Géométrie à* n *dimensions.* Bullettin

siamo dire che due superficie di S_4 uscenti da un punto, formano in quel punto un angolo eguale a quello delle superficie trasformate.

E si conclude in modo generale che la inversione per raggi reciproci dello spazio a quattro dimensioni è da annoverarsi fra le trasformazioni che conservano gli angoli.

22. Abbiamo visto come nella inversione per raggi reciproci ad un punto-ipersfera corrisponda sempre un punto-ipersfera, eccezione fatta per quello che ha il centro nel polo della trasformazione, il quale ha per corrispondenti tutti i punti-ipersfere (degeneri) che si possono ottenere proiettando da un punto a distanza infinita la sfera immaginaria all'infinito.

Ciò non ci permette di asserire che la trasformazione per raggi vettori sia biunivoca senza eccezione. Però, tutte le volte che accada di dover contemplare delle figure o delle proprietà inerenti al luogo all'infinito dello spazio S_4, si potrà, attraverso ad una inversione ausiliaria, ricondursi alla considerazione di figure o proprietà inerenti ad un punto a distanza finita scelto in modo arbitrario; e reciprocamente.

Se ad esempio si vogliono considerare tutte le trasformazioni dello spazio in se stesso, le quali conservano gli angoli e lasciano in se stesso un punto arbitrario dello spazio S_4, si potrà in vece loro considerare tutte le trasformazioni dello spazio in se medesimo, le quali conservano gli angoli e riportano in sè l'iperpiano all' infinito.

23. Ogni trasformazione proiettiva dello spazio di ipersfere

---

de la Soc. Math. de France T. III) definisce come *angolo* di due spazî subordinati S_ι , di S_k S_r , uscenti da un punto P, il massimo e il minimo angolo che possono formare due rette rispettivamente in S_ι , S_k a partire dal punto P, il quale massimo o minimo si dimostra essere invariante rispetto ad ogni trasformazione lineare ortogonale. Risulta da quanto precede che questo massimo o minimo è pure invariante per ogni inversione per raggi reciproci. Cfr. anche BRUNEL, *Sur les propriétés métriques des courbes etc.* Math. Annalen, Bd. 19.

in sè, la quale riconduca in se medesima la quadrica dei punti, rientra necessariamente nel gruppo definito dalle trasformazioni enumerate al n. 18.

Per giungere a questo risultato, cominciamo col dimostrare che ogni trasformazione *puntuale* dello spazio in se stesso, la quale conservi gli angoli retti, è conforme, cioè conserva ogni altro angolo. Preso un fascio di direzioni uscenti da un punto P, e il fascio delle direzioni corrispondenti uscenti dal punto P' che corrisponde a P, i due fasci sono proiettivi [1]; in tale proiettività, per le ipotesi, la involuzione delle coppie ortogonali nel primo fascio è trasformata nella involuzione delle coppie ortogonali nel secondo, onde le direzioni di lunghezza nulla nelle direzioni di lunghezza nulla: epperò l'angolo di due qualsiansi raggi nel primo fascio eguaglia l'angolo dei raggi corrispondenti nel secondo.

Ciò premesso, data una qualunque trasformazione proiettiva dello spazio di ipersfere, la quale porti in sè la quadrica dei punti, essa conserva gli angoli retti, perchè conserva la polarità rispetto a quella quadrica; pel teorema testè dimostrato essa è dunque una trasformazione conforme, e per un noto teorema di Liouville essa differisce per soli movimenti e similitudini da una inversione per raggi vettori reciproci.

24. Il gruppo delle trasformazioni ottenute associando fra loro le omotetie, le traslazioni e le rotazioni è detto dal Klein gruppo *principale* [2].

Il gruppo che si ottiene associando ad esso tutte le inversioni per raggi vettori reciproci gode della proprietà *caratteristica* che ogni sua trasformazione conserva gli angoli: noi lo chiameremo gruppo *conforme* [3].

25. Lo studio dello spazio lineare a quattro dimensioni, per

---

[1] I differenziali delle coordinate del punto P sono legate ai differenziali delle coordinate del punto P' da equazioni lineari.

[2] Klein, *Vergleichende Betrachtungen u. s. w.*

[3] Il teorema di Liouville non essendo valido pel caso del piano, tale denominazione conviene solo per lo spazio a tre dimensioni almeno.

quanto riguarda quelle proprietà che non variano nel gruppo conforme, coincide dunque collo studio di una quadrica non specializzata a quattro dimensioni immersa in uno spazio lineare a cinque, per quanto riguarda quelle proprietà che sono invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni proiettive che la riportano in se stessa.

Lo studio invece dello spazio lineare a quattro dimensioni, per quanto riguarda le proprietà che non variano nel gruppo principale, coincide (n. 22) collo studio di una quadrica a quattro dimensioni nello spazio lineare a cinque, per quanto riguarda le sue proprietà proiettive riferentisi ad un suo punto fisso, le proprietà cioè che sono invarianti rispetto a tutte quelle trasformazioni proiettive le quali oltre che mutare in se medesima la quadrica, lasciano in sè un punto fisso su di essa.

Continuando in modo analogo, si possono costruire quei sottogruppi del gruppo principale in S_4, le cui trasformazioni lasciano fisso un punto, o due, o tre, e riferire quelle proprietà che hanno per gruppi fondamentali questi sottogruppi, alle proprietà della quadrica a quattro dimensioni, le quali non variano per tutte le trasformazioni proiettive che portano in se stessa la quadrica e su di essa lasciano fissi rispettivamente due, o tre, o quattro punti.

26. Ora, una particolare quadrica non specializzata a quattro dimensioni, immersa in uno spazio lineare a cinque, è la varietà delle rette dello spazio ordinario, o, se meglio si vuole, la varietà dei complessi lineari speciali, immersa nella varietà lineare ∞^5 dei complessi lineari di rette. Il gruppo delle trasformazioni proiettive (in questa varietà lineare ∞^5) che lasciano invariata la quadrica dei complessi lineari speciali è il gruppo [1]) delle trasformazioni omografiche e dualistiche dello spazio ordinario.

Per quanto precede adunque, la Geometria dello spazio a quattro dimensioni, la quale abbia per gruppo fondamentale di

---

[1]) Klein, l. c. pag. 262.

trasformazioni il gruppo conforme, viene riferita alla Geometria proiettiva dello spazio ordinario; e la Geometria dello spazio a quattro dimensioni, la quale abbia per gruppo fondamentale di trasformazioni il gruppo principale, viene riferita alla Geometria dello spazio ordinario che abbia per gruppo fondamentale quello delle trasformazioni proiettive che riconducono in sè una retta arbitraria.

Non ci occuperemo delle proprietà accennate alla fine del numero precedente.

§ III.

Applicazioni.

27. Risulta dal n. precedente che se nello spazio a quattro dimensioni una figura o una corrispondenza non cambia definizione, una proprietà non cambia enunciato, attraverso alle trasformazioni del gruppo conforme, si potrà farne immediatamente il trasporto all'ordinario spazio rigato, ottenendosi rispettivamente una figura, una corrispondenza, una proprietà, invariante rispetto a tutto il gruppo delle trasformazioni proiettive. Ed inversamente.

Per mostrare brevemente la fecondità di tale facile trasporto, ci faremo ad esporne i principî fondamentali ed alcune fra le principali applicazioni.

28. Ai punti di un'ipersfera di S_4, considerati come tanti punti-ipersfere, corrispondono nello spazio rigato R le rette di un complesso lineare, considerate come altrettanti complessi lineari speciali; ai punti di una sfera o di un cerchio, le rette di una congruenza lineare o di una serie quadratica.

Ai punti di un piano d'area nulla di S_4 corrispondono in R le rette di un piano o le rette di una stella; e precisamente a tutti i piani d'area nulla di un sistema tutte le stelle, a tutti quelli dell'altro sistema tutti i piani rigati. Ad una retta di lunghezza nulla, per la quale passano sempre due piani d'area nulla, corrisponde un fascio di raggi, il quale è comune ad un piano rigato e ad una stella.

Ad un punto-sfera, cioè ad un cono che proietta un cerchio immaginario all'infinito di S_4, corrisponde una congruenza lineare speciale; ad un punto cerchio due fasci di raggi aventi una retta comune.

29. Una linea di S_4 ha per corrispondente una rigata di R; la quale è sviluppabile se la linea è di lunghezza nulla. Una superficie ha per corrispondente una congruenza; una ipersuperficie un complesso di rette.

30. A due ipersfere ortogonali, cioè coniugate rispetto alla quadrica dei punti, corrispondono due complessi lineari coniugati rispetto alla quadrica dei complessi lineari speciali, cioè *in involuzione.* Diciamo pure che una congruenza lineare e un complesso lineare, ovvero una serie rigata e un complesso lineare, od anche una coppia di rette e un complesso lineare, sono *in involuzione* se le figure rispettivamente corrispondenti in S_4 sono ortogonali: talchè il dato complesso lineare è in involuzione con tutti i complessi lineari passanti per la congruenza, per la serie rigata, per la coppia di rette.

31. Sarà facile trasportare ai sistemi lineari di complessi lineari di rette le conclusioni a cui siamo giunti per i sistemi lineari di ipersfere.

Due complessi lineari si intersecano secondo una congruenza lineare, che è speciale se quelli sono tangenti. Tre complessi lineari si intersecano secondo una serie quadratica; quattro secondo una coppia di rette.

Due congruenze lineari hanno a comune in generale due sole rette; salvo che non appartengano al medesimo complesso lineare, nel quale solo caso hanno a comune una serie quadratica.

Ciascuna retta di un complesso lineare è l'asse di una congruenza lineare speciale del complesso; ciascuna retta di una congruenza lineare appartiene a due fasci della congruenza.

Data una congruenza lineare come intersezione di due complessi lineari, cioè come base di un fascio di complessi lineari, vi sono in questo fascio due complessi lineari speciali, i cui assi sono in involuzione con tutti i complessi lineari del fascio e si appoggiano a tutte le rette della congruenza; tutti i complessi lineari passanti per questi assi sono in involuzione con tutti i complessi lineari passanti per la congruenza.

Data una serie rigata come intersezione di tre complessi lineari, tutti i complessi lineari passanti per essa costituiscono un sistema lineare ∞^2; esiste nel sistema una semplice infinità di complessi lineari speciali, i cui assi formano una nuova serie quadratica: le due serie quadratiche sono quelle di un'ordinaria superficie del second'ordine. Tutti i complessi lineari passanti per l'una di queste due serie quadratiche sono in involuzione con tutti i complessi lineari passanti per l'altra.

Data una coppia di rette come intersezione di quattro complessi lineari, cioè come base di un sistema ∞^3, esiste nel sistema una doppia infinità di complessi lineari speciali, i cui assi sono le rette dell'unica congruenza lineare in involuzione con tutti i complessi del sistema: le due rette date sono gli assi della congruenza lineare.

Dati infine cinque complessi lineari, essi fanno parte sempre di un sistema lineare ∞^4: i complessi lineari speciali di questo sistema costituiscono coi loro assi un nuovo complesso lineare, il quale è l'unico che sia in involuzione con tutti quelli del sistema ∞^4. In particolare, cinque rette generiche individuano un complesso lineare.

32. Prima di procedere nella esposizione delle applicazioni accennate al n. 27, vogliamo fermarci sopra un solo esempio relativo a quelle proprietà dello spazio S_4, le quali, per quanto risulta dai numeri 22 e 26, essendo invarianti nel gruppo principale delle trasformazioni di S_4, possono venir trasportate alla geometria rigata ordinaria, assumendo però il carattere invariantivo solo per quelle trasformazioni proiettive in R, le quali lasciano in se medesima una retta arbitrariamente scelta.

Si considerino in S_4 sei ipersfere due a due ortagonali a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. La sfera (a_1, a_2) è ortogonale alle ipersfere passanti per la coppia di punti (a_3, a_4, a_5, a_6); onde la retta che congiunge i centri di due qualunque delle date ipersfere, è perpendicolare all'iperpiano che congiunge i centri delle altre quattro. Nel pentaedro determinato dai centri delle prime cinque ipersfere, le altezze calate dai vertici sulle faccie opposte passano adunque pel centro della sesta ipersfera [1].

Avremo nello spazio rigato:

Dati sei complessi lineari due a due in involuzione, e una retta fissa p, se sono $\gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots \gamma_6$ le rette in involuzione con p rispetto ai sei complessi, ogni rigata quadrica passante per p e per due di tali rette è in involuzione col complesso lineare passante per p e per le altre quattro. Escludendo una delle sei rette γ_1, $\gamma_2, \ldots . \gamma_6$, tutte e cinque le rigate quadriche passanti per p e per una delle altre cinque rette involutoriamente al complesso lineare determinato da p e dalle ultime quattro, passano adunque per la retta esclusa.

33. Nello spazio a quattro dimensioni, al detto teorema di Moutard si può far seguire il seguente:

Date sei ipersfere due a due ortogonali, il piano che contiene tre dei loro centri è ortogonale al piano che contiene gli altri tre. Quattro qualunque di quei centri determinano un tetraedro: ognuno dei quattro piani che dai suoi vertici si possono condurre perpendicolarmente alle faccie opposte, passa per gli altri due centri.

Avremo perciò nello spazio rigato:

Dati sei complessi lineari due a due in involuzione e data una retta fissa p, se sono γ_1, $\gamma_2, \ldots . \gamma_6$ le rette in involuzione con p rispetto ai sei complessi, la congruenza lineare che contiene p e tre

---

(1) Questo teorema, per il caso di cinque sfere dello spazio a tre dimensioni, è dovuto a Moutard (*Nouv. Annales de Math.* t. V, serie II) ed è dimostrato dal Loria (l. c.).

di queste rette è *in involuzione* con quella che contiene p e le altre tre rette (cioè ogni complesso lineare passante per l'una è in involuzione coll'altra). Ognuna delle quattro congruenze lineari che si ottengono escludendo due di quelle rette e facendo passare per p e per una delle altre quattro la congruenza lineare in involuzione con quella che passa per p e per le ultime tre rette, contiene le due rette escluse, e cioè contiene la rigata quadrica determinata da queste e dalla retta fissa p.

34. La proprietà caratteristica delle trasformazioni del gruppo conforme, è quella di conservare gli angoli. Se noi giungeremo a stabilire quale sia nell'ordinario spazio rigato il concetto che corrisponde a quello di angolo nello spazio a quattro dimensioni, potremo dedurre quale sia la proprietà caratteristica delle trasformazioni proiettive dello spazio a tre dimensioni in se medesimo. Ed è ciò appunto che ora ci proponiamo.

35. Se in S_4, dato un punto P, si considerano due qualunque punti P', P'' infinitamente vicini ad esso, il rapporto anarmonico dei due raggi $\overline{PP'}$ $\overline{PP''}$ e delle due rette di lunghezza nulla del loro fascio sia α; si dice angolo delle due direzioni $\overline{PP'}$, $\overline{PP''}$ il valore della espressione:

$$\frac{i}{2} \log \alpha .$$

Ora, se per un qualunque punto T dello spazio a quattro dimensioni facciamo passare una sfera che tocchi in P il piano di quelle due direzioni, e che quindi contenga i punti P', P'' ed interamente le mentovate rette di lunghezza nulla s_1, s_2, i quattro piani che da T proiettano quei quattro raggi determineranno sulla sfera quattro cerchi (due dei quali degeneri) il cui rapporto anarmonico sarà ancora α, e sarà quindi indipendente dalla scelta del punto T.

Posta così la definizione dell'angolo di due direzioni sotto una forma invariante nel gruppo conforme, potremo trasportarla allo spazio rigato nel modo che segue:

Si abbia una retta p, e due rette p', p'' infinitamente vicine ad essa [1]; vi ha una doppia infinità di congruenze lineari passanti per p, p', p''; esse hanno a comune una rigata quadrica spezzata in due fasci σ_1, σ_2 che contengono la retta p. Scelta una qualunque retta t dello spazio, per essa passa una di coteste congruenze lineari; e su questa si ha un fascio di serie quadratiche passanti per p e per t. Appartengono a questo fascio la quadrica $(p\, p'\, t)$, la quadrica $(p\, p''\, t)$, una quadrica specializzata di cui fa parte σ_1, una quadrica specializzata di cui fa parte σ_2. Il rapporto anarmonico di queste quattro quadriche è indipendente dalla scesta della retta t.

Se α è il valore di questo rapporto anarmonico, diciamo *angolo* delle due *direzioni (Fortschreitungsrichtungen)* che dalla retta p conducono alle rette p', p'', il valore dell'espressione:

$$\frac{i}{2} \log \alpha .$$

36. Quando $\alpha = -1$ le due direzioni sono *ortogonali*, e diciamo che le due rette p', p'' sono in posizione involutoria rispetto alla retta p; diciamo anche che due qualunque rigate uscenti da p in quelle due direzioni si incontrano involutoriamente in p.

37. È interessante fare la seguente osservazione:

Data la retta p e le rette infinitamente vicine p', p'', fissata la retta t, la congruenza da esse determinata ha per assi due rette h, k appoggiate a tutte quattro. I due fasci di raggi σ_1, σ_2 che contengono p ed appartengono alla congruenza sono i fasci che dai punti (ph), (pk) proiettano rispettivamente le rette k, h; il fascio che insieme con σ_1 costituisce la prima quadrica specializzata è quello che dal punto (th) proietta k, il fascio che in-

---

(1) Le trasformazioni del gruppo conforme essendo tutte trasformazioni *continue*, tali cioè che la continuità viene conservata nel gruppo, a due punti di S_4 infinitamente vicini corrisponderanno due rette infinitamente vicine.

sieme con σ_2 costituisce la seconda quadrica specializzata è quello che dal punto (tk) proietta h.

Nella congruenza in parola, il fascio delle rigate quadriche per p, t, vien riferito proiettivamente ai punti della p mediante il fascio di raggi che da un punto qualunque della t proietta la p, poichè ogni raggio di questo fascio determina la rigata che si appoggia ad esso e alle h, k: in tale corrispondenza alle rigate specializzate corrispondono i punti (ph), (pk), alle rigate $(pp't)$, $(pp''t)$ corrispondono sulla p i due punti d'appoggio delle rette che partono dal punto scelto sulla t e incontrano le p, p'; p, p''. Il rapporto anarmonico di questi quattro punti è dunque ancora la costante α che fornisce, coll'espressione $\frac{i}{2} \log \alpha$, l'angolo delle direzioni $\overline{pp'}$, $\overline{pp''}$.

Si deduce adunque: data una retta p e due rette p', p'' infinitamente vicine ad essa, una qualunque punteggiata t dello spazio definisce mediante le rigate $(pp't)$, $(pp''t)$, una proiettività della punteggiata p in se medesima: la costante di questa proiettività non dipende dalla scelta della punteggiata t, ed il suo logaritmo, moltiplicato per $\frac{i}{2}$, dà l'angolo delle direzioni $\overline{pp'}$, $\overline{pp''}$ (1).

38. Quanto fu esposto al n. 34 e al n. 23 ci permette di enunciare la proprietà caratteristica delle trasformazioni del gruppo proiettivo dello spazio ordinario. Infatti, nello spazio a quattro dimensioni, le trasformazioni del gruppo conforme sono caratterizzate dalla proprietà di conservare gli angoli retti: ora questo enunciato non cangia attraverso ad una trasformazione conforme, perchè questa cangia ogni trasformazione conforme in altra trasformazione conforme; onde si deduce: le trasformazioni proiettive dello spazio ordinario in se stesso sono caratterizzate dalla proprietà di conservare la posizione involutoria.

(1) Pel caso $\alpha = -1$ la nostra definizione equivale naturalmente a quella data da Klein per la posizione involutoria di due rette rispetto ad una terza ad esse infinitamente vicina (Cfr. l. c. pag. 272).

Evidentemente, con ciò non abbiamo fatto altro che tradurrre allo spazio rigato, in forma acconcia, il noto teorema di LIOUVILLE: Se una trasformazione dello spazio ad n dimensioni ($n > 2$) in se stesso conserva gli angoli retti, essa si risolve in una trasformazione per raggi vettori reciproci, associata ad un'omotetia e ad un movimento intorno ad una retta.

È inoltre facile accertarsi, come una trasformazione puntuale conforme dello spazio ad n dimensioni in se stesso ($n > 2$) sia anche caratterizzata dal fatto che la varietà delle rette di lunghezza nulla rimane in se medesima, ovvero che ogni coppia di punti-ipersfera coniugati rispetto alla quadrica dei punti si trasforma in un'analoga coppia, od anche finalmente che ogni linea di lunghezza nulla si cangia in una linea di lunghezza nulla. Se dunque si sappia che una trasformazione dello spazio rigato in se stesso cangia le coppie di rette che si incontrano in coppie di rette che si incontrano, ovvero che cangia le sviluppabili in sviluppabili, si potrà concludere che la trasformazione è necessariamente una omografia od una reciprocità.

39. Se un complesso di rette λ è incontrato da una rigata l secondo una retta p, il massimo e il minimo degli angoli che la l fa colle infinite rigate uscenti da p e contenute in λ, sono invarianti nel gruppo proiettivo e costituiscono l'angolo che fa la rigata col complesso; la rigata incontra involutoriamente il complesso non appena tre, e quindi tutti quegli angoli siano retti.

Se è data una rigata l uscente da una retta p, o meglio una direzione uscente da p, vi sono ∞^2 direzioni uscenti da p ed involutorie a quella; esse costituiscono l'elemento di complesso lineare in involuzione colla data direzione in p, per il quale passano gli ∞^1 complessi lineari che incontrano involutoriamente quella direzione in p. Vi sono, fra le ∞^2 direzioni dette, ∞^1 fasci di raggi costituenti una congruenza lineare speciale che ha per asse p.

Dato un complesso, esistono ∞^3 rigate quadriche che lo incontrano involutoriamente in una sua retta.

Se due complessi si incontrano, e p è una retta della loro intersezione, il loro angolo in p è misurato da quello delle direzioni ad essi involutorie in p.

40. Si definisce in modo analogo l'angolo di due congruenze in una retta p comune ad entrambe. Le due congruenze si incontrano involutoriamente in p non appena due direzioni dell'una, uscenti da p, siano involutorie ciascuna a due direzioni dell'altra, uscenti da p.

E si definisce pure l'angolo di una rigata che incontri una congruenza.

41. Da una retta dello spazio non possono partire più di quattro direzioni due a due involutorie; e poichè una qualunque direzione sviluppabile è in involuzione con se medesima, o nessuna di quelle quattro è sviluppabile, o tutte quattro coincidono.

42. Abbiamo visto al n. 27 come si possa anche trasferire allo spazio rigato ogni corrispondenza dello spazio a quattro dimensioni in se medesimo, purchè questa non cangi definizione attraverso ad ogni trasformazione del gruppo conforme. Fra le trasformazioni elementari enumerate al n. 18, la sola che si cangia in una analoga in seguito ad una trasformazione conforme, è la inversione per raggi vettori reciproci, [1]) giacchè la ipersfera fondamentale si cangia in una ipersfera, e le coppie di punti ortogonali alla prima in coppie ortogonali alla seconda.

È anche facile convincersi che il prodotto di due, tre, ... inversioni, si cangia, mediante ogni trasformazione conforme, nel prodotto di due, tre ... inversioni. Onde anche le trasformazioni così ottenute possono venir trasportate allo spazio rigato. Ne esporremo qualche esempio.

43. Ogni ipersfera di S_4 definisce una inversione per raggi vettori reciproci; in questa trasformazione i punti della ipersfera corrispondono a se stessi; è conservata la varietà delle rette di

---

[1]) Si noti però che le inversioni non formano un gruppo, perchè il prodotto di due inversioni non è una nuova inversione.

lunghezza nulla; è pure conservata la varietà dei piani di area nulla ma ne sono invertiti i due sistemi; due piani corrispondenti d'area nulla hanno a comune una retta di lunghezza nulla. Due punti corrispondenti costituiscono una coppia ortogonale alla data ipersfera; ogni cerchio, sfera od ipersfera passante per due punti corrispondenti è ortogonale alla ipersfera fondamentale ed è trasformata in se stessa dall'inversione; due coppie di punti corrispondenti (o tre, o quattro) stanno sempre sopra un cerchio (o sfera, o ipersfera) il quale è ortogonale alla ipersfera fondamentale.

Nello spazio rigato adunque ogni complesso lineare definisce una trasformazione proiettiva dello spazio in se stesso, nella quale le rette del complesso corrispondono a se medesime; ad un fascio di raggi corrisponde un fascio di raggi, ad una stella un piano rigato passante pel suo centro, e viceversa. Due rette corrispondenti costituiscono una coppia in involuzione col complesso; ogni rigata quadrica, o congruenza lineare, o complesso lineare passante per due rette corrispondenti è in involuzione col complesso lineare fondamentale, ed è trasformato in se stesso dalla trasformazione; due coppie di rette corrispondenti (o tre, o quattro) stanno sempre sopra una rigata quadrica (o congruenza lineare, o complesso lineare) la quale è in involuzione col complesso fondamentale.

Ad ogni inversione di S_4 corrisponde dunque nello spazio rigato in sistema nullo.

44. Il prodotto di due inversioni in S_4 lascia in se stessi tutti i punti di una sfera, lascia in se stessa la varietà dei piani d'area nulla, senza invertirne i due sistemi, lascia in se stessa la varietà delle rette di lunghezza nulla.

Il prodotto di due sistemi nulli nello spazio rigato è un'omografia biassiale.

Se le ipersfere fondamentali delle due inversioni di S_4 sono ortogonali, la trasformazione prodotto è involutoria; l'omografia biassiale corrispondente è armonica.

Se le due ipersfere fondamentali sono tangenti, l'omografia è assiale; e appunto perchè le due ipersfere in generale non possono essere tangenti ed ortogonali, la omografia assiale non può essere involutoria.

Se le due ipersfere hanno a comune una coppia di piani d'area nulla, di sistema diverso, la trasformazione ha per corrispondente nello spazio rigato una omologia, la quale può essere armonica.

45. Il prodotto di tre inversioni di S_4 lascia fermi i punti di un cerchio, trasforma in se stesse le ipersfere ad esso ortogonali e trasforma quindi in se stesso, permutandone i punti, il cerchio comune a queste ipersfere.

Nello spazio rigato si ha, come prodotto di tre sistemi nulli, una trasformazione dualistica, nella quale le rette di una rigata quadrica rimangono ciascuna in se medesima e quelle della rigata sovrapposta alla prima si permutano fra loro.

Non ci dilungheremo ad esaminare ulteriormente il prodotto di più inversioni nè i casi particolari ch'essi presentano.

46. Passando ora ad un altro ordine di idee, esporremo qualche proprietà delle congruenze e dei complessi di rette in generale.

Cominciamo coll'osservare che sopra ogni superficie di S_4 e per ciascun suo punto partono due linee di lunghezza nulla: onde i punti della superficie si possono concepire come distribuiti in due serie semplicemente infinite di linee di lunghezza nulla. Epperò in ciascuna congruenza di rette e per ciascuna sua retta partono due rigate sviluppabili della congruenza: onde le rette della congruenza si possono concepire come distribuite in due serie semplicemente infinite di superficie rigate sviluppabili.

È manifesto altresì che in ogni complesso di rette, e per ciascuna sua retta, partono infinite rigate sviluppabili del complesso, delle quali le rette infinitamente vicine a quella di partenza appartengono ad una congruenza lineare speciale che ha per asse quella retta.

47. È noto che, nello spazio ordinario, fra le infinite sfere che toccano una qualunque superficie in un punto P, ve ne sono

due che la toccano, oltre che in P, in un punto infinitamente vicino a P: i centri di tali due sfere si dicono i centri di curvatura della superficie in quel punto: le direzioni che vanno dal punto P a quei due punti infinitamente vicini P', P'' sono ortogonali.

Ogni superficie dello spazio ordinario è adunque solcata da una rete ortogonale di *linee di curvatura*. E poichè ciò vale altresì per le superficie contenute in una ipersfera, si deduce:

Data una qualunque congruenza di rette, contenuta in un complesso lineare, fra le infinite congruenze lineari che la toccano in una retta p e che appartengono esse pure a quel complesso, ve ne sono due che la toccano altresì in una retta infinitamente vicina a p; e le due nuove rette di contatto p', p'' sono in posizione involutoria rispetto a p. La congruenza rimane così solcata da un doppio sistema di rigate in involuzione, che diciamo *rigate principali* della congruenza. In ciascuna retta della congruenza le rigate principali separano armonicamente le rigate sviluppabili della medesima.

Analogamente, fra gli infiniti complessi lineari che toccano un qualunque complesso di rette in una sua retta p, ve ne sono in generale tre i quali toccano inoltre il complesso in una retta infinitamente vicina a p; le tre nuove rette di contatto p', p'', p''' sono due a due in posizione involutoria rispetto a p; le direzioni che da p conducono a p', p'', p''' sono due a due separate armonicamente dalla congruenza lineare speciale comune a quei complessi lineari. Ne segue che ogni complesso ammette un triplo sistema ∞^2 di rigate *principali:* per ogni retta del complesso passano tre di tali rigate.

48. Se si considera una rigata principale di un complesso, e tutte quelle che partono dalle sue rette, queste rigate si distribuiscono in due congruenze, che (nell'ambiente costituito dal complesso) si segano involutoriamente secondo quella rigata.

Tali congruenze si possono chiamare *congruenze principali;* ciascuna di esse è solcata da un doppio sistema involutorio di rigate principali del complesso; e due di tali congruenze si segano sempre iuvolutoriamente secondo una di tali rigate.

Un complesso ammette dunque un triplo sistema ∞^1 di congruenze principali, nelle quali, in altrettanti doppî sistemi involutorî, sono distribuite le rigate principali del complesso.

49. In una congruenza lineare ogni rigata è rigata principale rispetto a qualunque complesso lineare che la contenga. In un complesso lineare ogni rigata è rigata principale, ogni congruenza è congruenza principale.

50. Il noto teorema di Dupin [1]) sui sistemi tripli ortogonali di superficie, trasportato all'ambiente ipersfera, ed esteso [2]) allo spazio lineare a quattro dimensioni, porta a concludere: Se in un complesso lineare esiste un sistema triplo di congruenze involutorie, esse si intersecano mutuamente nelle loro rigate principali; se nello spazio rigato esiste un sistema quadruplo di complessi due a due in involuzione, tre qualunque di essi si intersecano sempre secondo una rigata, la quale è principale per tutti tre.

51. Poichè le trasformazioni del gruppo conforme conservano i contatti, si può fare lo studio degli inviluppi dei complessi e delle congruenze di rette, mediante la più facile considerazione degli inviluppi a cui dànno luogo i sistemi di ipersuperficie e di superficie di S_4.

Estendendo una definizione di Moutard [3]), e trasportandola poscia allo spazio rigato, diciamo *anallagmatico* un sistema ∞^1, ∞^2, ∞^3 di rette, se esso si trasforma in se medesimo per alcuni determinati sistemi nulli. Le rette di un tale sistema si distribuiscono, rispetto a ciascuno di questi sistemi nulli, in coppie involutorie col relativo complesso lineare fondamentale: epperò un sistema *anallagmatico* rimane tale attraverso a qualunque trasformazione proiettiva.

Se un complesso è inviluppo di complessi lineari in involuzione

---

1) Dupin, *Développements de Géométrie,* pag. 239. Paris 1813.

2) Klein, l. c. pag. 273.

3) Moutard, *Sur la Trasformation par rayons vecteurs réc.* Nouvelles Ann. 1864, pag. 306.

con uno fisso, esso è evidentemente anallagmatico almeno rispetto al sistema nullo definito da quel complesso lineare. Inversamente, se un complesso è anallagmatico rispetto ad un complesso lineare S, esso è l'inviluppo di complessi lineari in involuzione con S. Sia infatti p, p' una coppia di rette di quel complesso, le quali si corrispondono nel sistema nullo S; le rette del complesso infinitamente vicine a p avranno per corrispondenti le rette del complesso infinitamente vicine a p'; onde il complesso lineare (in involuzione con S), che passa per p, p' ed è tangente in p al comcomplesso anallagmatico, è anche tangente in p' allo stesso.

Concludiamo: condizione necessaria e sufficiente affinchè un complesso, (o una congruenza, o una rigata), sia anallagmatico rispetto a un sistema nullo S, è che si possa ottenere come inviluppo di complessi lineari (o congruenze lineari, o rigate quadriche) in involuzione col complesso lineare fondamentale di S.

52. Nello spazio delle ipersfere di S_4, l'intersezione della quadrica dei punti con un'altra qualsiasi varietà quadratica non specializzata ∞^4 di ipersfere, è la varietà dei punti-ipersfere che stanno sopra una ipersuperficie del quarto ordine passante due volte per la sfera immaginaria all'infinito. I noti teoremi sui fasci di quadriche ci permettono di asserire che esistono sei ipersfere due a due ortogonali, rispetto a ciascuna delle quali i punti di cotesta ipersuperficie (che diciamo *ciclide* di S_4) si distribuiscono in coppie ortogonali.

Nello spazio rigato, le rette che soddisfano ad una condizione quadratica, costituiscono un complesso quadratico. Ogni complesso quadratico di rette viene trasformato in se medesimo da sei sistemi nulli, i cui complessi lineari fondamentali sono due a due in involuzione.