

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

EUGENIO BAZZI

**Sullo spostamento delle linee di livello che si osserva in un disco
metallico ruotante traversato da correnti voltaiche**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 5
(1888), p. 49-75

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1888_1_5__49_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLO
SPOSTAMENTO DELLE LINEE DI LIVELLO
CHE SI OSSERVA
IN UN DISCO METALLICO RUOTANTE
TRAVERSATO DA CORRENTI VOLTAICHE

PER
EUGENIO BAZZI

PARTE PRIMA

È noto che quando in presenza di una calamita si fa ruotare un corpo conduttore, il sistema di correnti indotte che vi si sviluppano, e il sistema di linee di livello corrispondenti vengono spostati nel senso della rotazione, e tanto più quanto maggiore è la velocità di rotazione.

Questo trasporto fu constatato, successivamente e in modi diversi, da Nobili, Matteucci, Verdet e Felici, e si ritiene che sia dovuto all'effetto di correnti indotte di ordine superiore, piuttosto che a un ritardo della induzione stessa (*).

Prendendo occasione da questo fatto, ho intrapreso a stabilire se un trasporto analogo si verifica anche in un disco conduttore traversato da correnti voltaiche, quando vien fatto ruotare.

(*) WIEDEMANN — Die Lehre von der Elektrizität, IV. vol. pag. 308-309, 1885.

A questo scopo mi sono servito di un disco circolare di rame del diametro di 34^{cm} e dello spessore di 2^{mm} , girevole attorno ad un asse centrale, normale al suo piano. Due scandagli trasportabili ponevano due punti del disco in comunicazione con i due poli di una pila, e due altri scandagli, pure trasportabili, ponevano in comunicazione altri due punti del disco col filo di un galvanometro.

Tenendo fermo il disco, disponevo gli scandagli del galvanometro in modo che venissero a trovarsi sopra una linea di livello del disco, seguendo il processo noto; indi ruotavo il disco in un senso o nell'altro, gli scandagli rimanendo fissi, e osservavo al galvanometro.

I risultati delle prime ricerche riuscirono incerti ed infruttuosi, ma postomi in condizioni più favorevoli potei constatare decisamente l'effetto della rotazione. A tal uopo modificai l'apparecchio in modo da potere appoggiare i quattro scandagli sul contorno esterno del disco ben amalgamato, e ridussi la resistenza del circuito fino a portare la corrente che traversa il disco ad una ventina di ampère. Inoltre disposi i quattro scandagli in modo che mentre quelli della pila toccavano il contorno del disco all'estremità di un diametro, quelli del galvanometro si trovassero all'estremità del diametro normale. I fili adduttori della corrente erano sorretti in modo che andassero dal disco alla pila mantenendosi perpendicolari a questo fino ad una corta distanza, oltre la quale l'azione induttiva potesse trascurarsi.

Postomi in queste condizioni, portati gli scandagli ad essere esattamente sopra una linea di livello, quando il

disco era fermo, se facevo ruotare il disco ottenevo una marcata deviazione al galvanometro, che s'invertiva col- l'invertire il senso della rotazione.

Deviazioni analoghe, ma in minor grado, ottenni pure scandagliando in altri punti del contorno del disco. — Dunque *le linee di livello si spostano per la rotazione del disco.*

Cercando di ridurre gli scandagli del galvanometro sopra una medesima linea di livello (in modo cioè che la deviazione del galvanometro fosse nulla) mentre il disco ruotava, trovai che bisognava spostarli in senso opposto alla rotazione. — Quindi: *lo spostamento delle linee di livello ha luogo in senso opposto al movimento di rotazione.*

Anche disponendo la parte fissa del circuito in posizioni diverse rispetto al disco ruotante ho riscontrato che si verifica sempre il medesimo fenomeno.

Nella misura dell'ampiezza di questo spostamento mi sono limitato a quello della linea di livello diametrale e procedevo nel seguente modo. Tenuto fermo uno degli scandagli all'estremità di questa linea, e mentre il disco ruotava in un determinato senso e con una determinata velocità, spostavo l'altro scandaglio mercè un cursore a vite, fino a chè la corrente del galvanometro fosse nulla. Quindi invertivo il senso della velocità del disco e determinavo la nuova posizione da darsi allo scandaglio per avere di nuovo una corrente zero al galvanometro. La distanza fra le due posizioni, dedotta da una scala a millimetri tracciata sul sostegno dello scandaglio, mi dava lo spostamento fatto subire a questo.

Se lo scandaglio fisso fosse stato al centro del disco, lo spostamento osservato sarebbe stato il doppio dell'arco di cui si era spostata la linea diametrale per la rotazione in un determinato senso, ma trovandosi all'altra estremità del diametro, lo spostamento osservato risultava il quadruplo dell'arco medesimo (*).

Con tal processo ampliai il fenomeno, ed eliminai la difficoltà che si presenta, per le inevitabili disuguaglianze del disco, nel determinare con precisione una linea di livello quando il disco stesso è fermo.

Ecco i risultati ottenuti in due esperienze relative a due velocità differenti. Indico con ω la velocità angolare del disco espressa col numero di giri al minuto secondo, con D lo spostamento dello scandaglio e con $\alpha = \frac{1}{4} D$ l'arco di spostamento della linea di livello diametrale, misurato sul contorno del disco; i valori osservati sono (**):

(*) Supposto che le linee di livello terminanti al tratto esplorato possano considerarsi come rettilinee.

(**) Mi sono limitato a queste sole determinazioni, perchè lo scopo prefissomi non era quello di determinare la legge del fenomeno, ma solo di mostrare l'esistenza, l'ampiezza, e il senso dello spostamento delle linee di livello. E se questo spostamento era in massima prevedibile a priori, non lo erano egualmente i limiti entro cui si manifesta, e tanto meno il senso, che risulta opposto al movimento del disco, cioè contrario a quello che si verifica nelle esperienze analoghe di Nobili, Felici ec.

ω	D	α
1,25	18 ^{mm} ,5	4 ^{mm} ,62
2,05	35 ^{mm} ,5	8 ^{mm} ,87

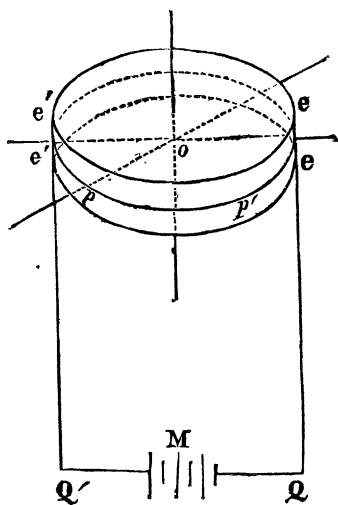
Queste cifre oltre a dare un'idea dell'ordine di grandezza dello spostamento, e delle velocità a cui è sensibile, indicano con molta approssimazione che, probabilmente e nei limiti dell'esperienze eseguite, *lo spostamento è proporzionale alla velocità di rotazione.*

Resta ora a vedersi se il fenomeno si può spiegare semplicemente come un effetto dell'induzione, esercitata sul disco ruotante dalle correnti che lo attraversano.

PARTE SECONDA

I.

Immaginiamo il disco D riferito ad un sistema di assi ortogonali, l'uno OZ normale alle sue faccie, gli altri OX , OY situati nel parallelo di mezzo PP' e coll'origine nel centro.



Lungo due generatrici ee , $e'e'$ situate nel piano XOZ , il disco sia posto in comunicazione coi poli di una pila M , mercè un circuito filiforme $eQq'e'$, di cui due tratti eQ , $e'Q'$ si stendano parallelamente all'asse OZ , ed il tratto $Q'Q$ sia sufficientemente lontano dal disco per poterne trascurare l'azione induttiva su questo.

Se indichiamo con u_0 v_0 w_0 le componenti secondo gli assi OX , OY , OZ della corrente che attraversa il punto qualsivoglia (x, y, z) del circuito, con W_0 il potenziale nel punto medesimo della elettricità libera, e con K la conducibilità specifica del circuito; avremo per le formule del Kirchhoff:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_0 &= -K \frac{\partial W_0}{\partial x} \\ v_0 &= -K \frac{\partial W_0}{\partial y} \\ w_0 &= -K \frac{\partial W_0}{\partial z} \end{aligned}$$

colle condizioni:

$$(2) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

in tutto lo spazio occupato dal circuito, e

$$(3) \quad u_0 \cos \alpha + v_0 \cos \beta + w_0 \cos \gamma = 0$$

alla superficie libera, essendo α , β , γ gli angoli che la normale fa coi tre assi coordinati, più quelle relative alle superficie di contatto (*). — Se si suppone d'imprimere al disco un movimento rotatorio attorno l'asse OZ, lasciando fissa la parte filiforme, in ogni punto del disco si sveglierà una forza elettromotrice dovuta al movimento relativo di questo punto rispetto al sistema di correnti che traversa il disco mobile e alla parte fissa del circuito. Ne seguirà quindi una nuova distribuzione delle correnti e del potenziale della elettricità libera nell'interno del disco. Ma se il moto di rotazione è uniforme, questa

(*) Se s'indicano con $\sigma \sigma'$ le superficie di contatto fra il disco e i fili adduttori della corrente, con p la normale a questa superficie, diretta verso l'interno del disco, e con Q la intensità della corrente che lo traversa, queste condizioni saranno:

$$-K \int_{\sigma} \frac{\partial W_0}{\partial p} d\sigma = K \int_{\sigma'} \frac{\partial W_0}{\partial p} d\sigma' = Q$$

distribuzione raggiungerà uno stato stazionario, e potremo considerare il nuovo sistema di correnti come fisso nello spazio.

Sieno u, v, w, W i valori che in questo stato stazionario assumono nel punto (x, y, z) le componenti della corrente, e il potenziale della elettricità libera: u', v', w', W' i valori delle medesime variabili in un altro punto qualunque (x', y', z') , e a, b, c le componenti della velocità del punto (x, y, z) .

Ammettendo la legge d'induzione di Weber, le componenti della forza elettromotrice indotta dal sistema di correnti, in misure elettrostatiche, nel punto (x, y, z) del disco possono esprimersi come ha fatto Jochmann (*), sotto la forma:

$$\begin{aligned} X &= -\lambda \left\{ b \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) - c \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right\} \\ (4) (**) \quad Y &= -\lambda \left\{ c \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) - a \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \right\} \\ Z &= -\lambda \left\{ a \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) - b \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned}$$

(*) E. JOCHMANN. — Ueber die durch einen Magnet in einem rotirenden Stromleiter inducirten electrischen Ströme. — Borchardt's Journal. LXIII, Bde. 1864.

(**) Adotto, come fa Weber, la convenzione che sia positiva la forza elettro-motrice che tende a muovere la elettricità positiva nel senso della retta che va dall'elemento fisso inducente, a quello mobile indotto, e perciò il segno delle componenti X, Y, Z è contrario a quello che risulta a Jochmann.

essendo $2\lambda = 1/15537 \cdot 6$ mm. se il valore reciproco della costante di Weber, e

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{u'}{r} dx' dy' dz' \\ (6) \quad (*) \quad B &= \int \frac{v'}{r} dx' dy' dz' \\ C &= \int \frac{w'}{r} dx' dy' dz' \end{aligned}$$

avendo posto

$$(7) \quad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

e l'integrazione essendo estesa a tutti i punti del circuito.

Le componenti della corrente nel punto x, y, z saranno quindi determinate dall'equazioni

$$\begin{aligned} (7) \quad u &= K \left(-\frac{\partial W}{\partial x} + X \right) \\ v &= K \left(-\frac{\partial W}{\partial y} + Y \right) \\ w &= K \left(-\frac{\partial W}{\partial z} + Z \right) \end{aligned}$$

insieme alle altre due di condizione analoghe alle (2) e (3), e a quelle da soddisfarsi alla superficie di contatto.

III.

Avendo supposto che la modificazione del sistema di

(*) Essendo u', v', w' espresse in unità elettromagnetiche. Jochmann l. c.

correnti u_0, v_0, w_0 sia dovuto ad un fenomeno d' induzione ne segue che i nuovi valori incogniti u, v, w delle componenti della corrente, non potranno differire dai valori iniziali u_0, v_0, w_0 che per quantità dell'ordine di λ , e che quindi, trascurando termini del secondo ordine in λ , potremo sostituire u_0, v_0, w_0 a u, v, w nelle espressioni di A, B, C, che entrano nelle equazioni (4), cioè porre:

$$(11) \quad \begin{aligned} A &= \int \frac{u_0'}{r} dx' dy' dz', \quad B = \int \frac{v_0'}{r} dx' dy' dz' \\ C &= \int \frac{w_0'}{r} dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

D'altra parte, se ω è la velocità angolare del disco, le velocità componenti a, b, c del punto x, y, z saranno

$$(13) \quad a = -\omega y \quad b = \omega x \quad c = 0,$$

contando positiva la rotazione diretta dalla parte positiva di O X, alla parte positiva di $\dot{O} Y$, attraverso il primo quadrante.

Sostituendo questi valori nella (4) si avrà:

$$(13) \quad \begin{aligned} X &= -\lambda \omega x \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \\ Y &= -\lambda \omega y \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \\ Z &= -\lambda \omega \left\{ -y \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) - x \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned}$$

e quindi per le (7):

$$\begin{aligned}
 u &= K \left\{ -\frac{\partial W}{\partial x} - \lambda \omega x \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\} \\
 (14) \quad v &= K \left\{ -\frac{\partial W}{\partial y} - \lambda \omega y \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\} \\
 w &= K \left\{ -\frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \omega \left(\gamma \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) + x \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

III.

Supponiamo che lo spessore del disco sia talmente sottile che in virtù delle condizioni $w=0$, $w_0=0$, le quali devono verificarsi sulle due faccie del disco, si possa porre in tutto lo spazio del disco

$$(15) \quad w_0=0 \quad w=0$$

cioè che la corrente circoli parallelamente allé due faccie. La distribuzione iniziale delle correnti coinciderà con quella studiata dal Kirchhoff nel caso di un disco circolare, e il sistema di equazioni (14) da integrarsi, si ridurrà alle prime due.

Avremo quindi in primo luogo, per ciascuna sezione del cilindro parallela alle faccie:

$$(16) \quad W_0 = M + \frac{Q}{2\pi\partial K} \lg \frac{h'}{h}$$

e

$$(17) \quad \begin{aligned} u_0 &= -K \frac{\partial W_0}{\partial x} \\ v_0 &= -K \frac{\partial W_0}{\partial y} \\ w_0 &= 0 \end{aligned}$$

essendo: h', h le distanze del punto x, y rispettivamente dalle due generatrici $e' e', e e$, M una costante, Q la quantità di elettricità positiva (in unità elettrostatiche), che attraversa il disco, andando da $e e$, a $e' e'$ nella unità di tempo; 2δ lo spessore del disco.

IV.

All'espressione $\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}$, che comparisce nelle prime due equazioni (14), può darsi una forma assai semplice. Infatti, poichè nei tratti filiformi $e e, e' e'$ si annullano i valori delle componenti u_0, v_0 , e il tratto $Q Q'$ viene trascurato, l'espressioni (11) di A e B si ridurranno a

$$(18) \quad A = \int_{S'} \frac{u'_0}{r} dS' \quad B = \int_{S'} \frac{v'_0}{r} dS'$$

essendo S' lo spazio occupato unicamente dal disco. Cosicchè A e B possono riguardarsi come le funzioni potenziali di due masse distribuite nello spazio S' colle densità u'_0 e v'_0 . Avremo quindi, per un noto teorema sulle derivate prime delle funzioni potenziali:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \int_{\sigma'} \frac{u_0' \cos \beta}{r} d\sigma' + \int_S \frac{\partial u_0'}{\partial y'} \frac{\partial S'}{r}$$

(19) (*)

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \int_{\sigma'} \frac{v_0' \cos \alpha}{r} d\sigma' + \int_S \frac{\partial v_0'}{\partial x'} \frac{\partial S'}{r}$$

essendo σ' la superficie del disco, e α , e β gli angoli che la normale verso l'interno fa cogli assi, e poichè per le (17) si ha:

$$(19) bis \quad \frac{\partial u_0'}{\partial y} = \frac{\partial v_0'}{\partial x}$$

avremo

$$(20) \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = \int_{\sigma'} \frac{u_0' \cos \beta - v_0' \cos \alpha}{r} d\sigma'$$

e poichè sulle due faccie del disco $\cos \alpha$, e $\cos \beta$ sono nulli, l'integrazione rimane estesa alla sola superficie di contorno. Riferiamola ad un sistema di coordinate cilindriche z' , ρ' , θ' definito dalle relazioni

$$(21) \quad z' = z' \quad x' = \rho' \cos \theta' \quad y' = \rho' \sin \theta'$$

Se R è il raggio del disco si avrà:

(*) V. Nota (A),

$$(22) \quad \cos \alpha = -\frac{1}{R} \frac{\partial y'}{\partial \theta'} \quad \cos \beta = +\frac{1}{R} \frac{\partial x'}{\partial \theta'} \quad d\tau = R \, d\theta' \, dz$$

Quindi l'espressione (20) si trasformerà nell'altra:

$$(23) \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = -K \int_0^{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial W_0'}{\partial \theta'} \, d\theta' \, dz'$$

ma la (16) ci dà

$$(24) \quad \frac{\partial W_0}{\partial \theta} = -\frac{Q}{2\pi\delta} \frac{1}{K \sin \theta}$$

onde

$$(25) \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\delta} \int_0^{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{d\theta' \, dz'}{r \sin \theta'}$$

Si potrebbe effettuare una prima integrazione rispetto a z' per funzioni logaritmiche, od una prima integrazione rispetto a θ' per funzioni ellittiche, ma per lo scopo propostomi è solo necessario di conoscere il segno di questa espressione. — Se si associano due a due gli elementi dell'integrale che corrispondono a due punti simmetrici rispetto al piano XOZ , si vede facilmente che il segno dell'integrale è precisamente quello dell'ordinata y del punto (x, y, z) a cui quell'integrale si riferisce, cioè positivo nella metà del disco XYZ' , e negativo nell'altra metà $XY'Z'$.

Per semplicità di calcolo poniamo ora

$$(26) \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = P = \frac{Q}{2\pi\delta} \int_0^{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{d\theta' \, dz'}{r \sin \theta'}$$

Sostituendo questa espressione nelle (14) e tenendo conto della (15) si ha:

$$\begin{aligned} u &= K \left(-\frac{\partial W}{\partial x} - \lambda \omega x P \right) \\ (27) \quad v &= K \left(-\frac{\partial W}{\partial y} - \lambda \omega y P \right) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Poniamo:

$$(28) \quad W = W_0 + W';$$

per le condizioni (9) e (10) avremo

$$(29) \quad \Delta^2 W' = -\lambda \omega \left\{ 2P + x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

e

$$(30) \quad \frac{\partial W'}{\partial p} = +\lambda \omega R P,$$

essendo p la normale interna della superficie di contorno del disco, e R il raggio del disco medesimo.

V.

Se si ritiene che W' sia costante per tutto lo spessore del disco, cioè sia:

$$(31) \quad \frac{\partial W'}{\partial z} = 0$$

8. N.

allora potremo considerare W' come una funzione delle due variabili x e y , di cui è dato il suo Δ^2 nell'interno di un cerchio di raggio R , e i valori della derivata al contorno rispetto alla normale; quindi potremo determinare la W' , se sarà soddisfatta la nota condizione:

$$(32) \quad \int \int_{\sigma} \Delta^2 W' d\sigma - \int_s \frac{\partial W'}{\partial p} ds = 0$$

essendo σ la superficie del cerchio, s la circonferenza.

Ora se riferiamo i punti del disco al sistema di coordinate (21) cioè poniamo:

$$(33) \quad x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

le (29) e (30) divengono

$$(34) \quad \Delta^2 W' = -\lambda \omega \left\{ 2P + \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right\} = -\lambda \omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho^2 P}{\partial \rho}$$

e

$$(35) \quad \frac{\partial W'}{\partial p} = +\lambda \omega R P$$

e poichè P , e $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ hanno valori eguali e di segno opposto nei punti simmetrici all'asse $O X$, la condizione (32) è soddisfatta.

Quindi per un teorema d'analisi, avremo, a meno di una costante, pel valore di W' nel punto ρ', θ :

$$(36) \quad W' = + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W'}{\partial p} \log a' d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \Delta^2 W' \log a \rho d\rho d\theta$$

essendo

$$a' = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta') \quad a'^2 = R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')$$

e sostituendo i valori (34) e (35)

$$(37) \quad W' = + \frac{\lambda\omega R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \log a' d\theta - \frac{\lambda\omega}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho^2 P}{\partial \rho} \log a d\rho d\theta;$$

integrando per parti il secondo termine, resta

$$(38) \quad W' = + \frac{\lambda\omega}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho P \frac{\partial \log a}{\partial \rho} d\rho d\theta$$

$$\text{ma si ha: (39)} \quad \rho \frac{\partial \log a}{\partial \rho} + \rho' \frac{\partial \log a}{\partial \rho'} = 1$$

e

$$(40) \quad \int_0^R \int_0^{2\pi} P \rho d\rho d\theta = 0$$

onde:

$$(41) \quad W' = - \frac{\lambda\omega}{2\pi} \rho' \int_0^{2\pi} \int_0^R P \frac{\partial \log a}{\partial \rho'} d\rho d\theta$$

e per la (28)

$$(42) \quad W = W_0 - \frac{\lambda \omega}{2\pi} \rho' \int_0^{2\pi} \int_0^R P \frac{\partial \lg a}{\partial \rho'} \rho \, d\rho \, d\theta$$

Sostituendo per P la sua espressione (26) avremo in fine

$$(43) \quad W = W_0 - \frac{\lambda \omega QR}{4\pi^2 \delta} \rho' \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{R} \frac{\partial \lg a}{\partial \rho'} d\rho \, d\theta \int_0^{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{d\theta' \, dz'}{r \sin \theta'}$$

Ma per $\rho' = R$ ossia pei punti situati sul contorno del disco,

$$(44) \quad \frac{\partial \lg a}{\partial \rho'} = \frac{\rho - \rho \cos(\theta - \theta')}{a^2}$$

è sempre positivo. Se dunque si suppone che p. es. ω e Q sieno positivi, quando il disco ruota secondo la freccia indicata nella figura (2), e la corrente va da ee a $e'e'$, allora l'espressione

$$(45) \quad \frac{\lambda \omega QR^2}{4\pi^2 \delta} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{R} \frac{\partial \lg a}{\partial \rho'} d\rho \, d\theta \int_0^{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{d\theta' \, dz'}{r \sin \theta'}$$

avrà il segno di P , cioè sarà positiva per i punti del semi-contorno $eeY e' e''$, e negativa per quelli del semi-contorno $eeY e' e'$. Quindi avremo per i primi

$$(46) \quad W < W_0$$

e per i secondi

$$(47) \quad W > W_0$$

Ora nell'ipotesi fatta, che Q vada da ee a ee' , il potenziale W_0 dovendo decrescere quando si va da ee a ee' , queste disuguaglianze ci dimostrano che *gli estremi delle linee di livello risultano spostati nel senso opposto al movimento del disco.*

Il termine (45) che rappresenterebbe la variazione del potenziale dell'elettricità libera del disco per effetto della rotazione, nelle ipotesi supposte, non permette un confronto numerico colla esperienza a cagione dell'integrale che vi comparisce.

Tuttavia è interessante notare che il coefficiente di quel termine è dell'ordine di grandezza delle variazioni di potenziali che si verificano spostando gli scandagli in vicinanza degli estremi della linea diametrale, come nella mia esperienza.

Infatti, quel coefficiente è

$$\lambda \frac{\omega Q R^2}{4 \pi^2 \delta}$$

ove Q è espresso in unità elettromagnetiche, e dalla (24) si ha

$$\frac{\partial W_0}{R \partial \theta} = - \frac{Q}{2 \pi \delta R K}$$

ove Q e K sono espresse in unità elettrostatiche, ossia avremo in unità elettromagnetiche

$$\frac{\partial W_0}{R \partial \theta} = -\lambda \frac{Q}{2 \pi \partial R K}$$

quindi il rapporto, in valore assoluto, fra questi due coefficienti sarà

$$\rho = \frac{\lambda \omega Q R^2}{4 \pi^2 \partial} : \frac{\lambda Q}{2 \pi \partial R K} = \frac{\omega R^3 K}{2 \pi}$$

nel nostro caso

$$K = \frac{1}{1642} \quad R = 17^{\text{cm}} \quad \omega = 2.2 \pi$$

perciò

$$\rho = 5,98$$

ossia il coefficiente della (45) è il sestuplo della variazione che, nel nostro caso, si avrebbe spostando di un centimetro gli scandagli del galvanometro.

La (45) mostra inoltre che la variazione di potenziale in questione, risulta proporzionale alla velocità di rotazione e alla intensità della corrente, ed è indipendente dalla conducibilità specifica del disco.

VI.

Riassumendo, le esperienze eseguite e l'analisi del fenomeno conducono alle seguenti conclusioni:

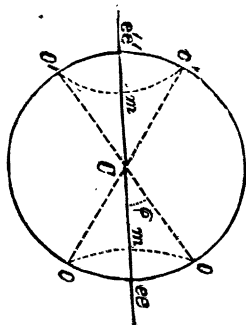
1) Se si applicano i due reofori di una pila sul contorno di un disco conduttore, alle estremità di un medesimo diametro, e si fa ruotare il disco, rimanendo fissi i reofori della pila; le linee di livello nel disco medesimo vengono spostate in *senso opposto alla rotazione*. Ciò si verifica cercando le linee di livello del disco, cogli scandagli di un galvanometro seguendo il metodo di Kirchhoff.

2) Se si tien conto dell'azione induttiva esercitata dal sistema di correnti che traversano il disco, sul disco stesso in movimento, si trova che questa induzione, ha appunto per effetto di far deviare le linee di livello nel senso opposto alla rotazione del disco, conforme all'esperienza. Perciò si può ritenere che la causa del fenomeno sia quella stessa, che si ammette per spiegare il trasporto, nel senso della rotazione, delle linee di livello nelle esperienze analoghe di Matteucci Nobili ec. e da cui presi occasione per queste mie ricerche.

Nota (A)

Le espressioni di u' e v' presentano una singolarità

lungo le generatrici ee , $e'e'$. Per non intralciare con minuti calcoli il processo analitico, dimostro a parte che non ostante quella singolarità, le espressioni (19) sono applicabili nel nostro caso.



Escludiamo due intorni ss' di quelle generatrici ee , $e'e'$ con due superficie cilindriche, che abbiano per direttrici due linee di livello

del disco, omo , $o'm'o'$. Indichiamo con σ_1' , ciò che resta di σ' dopo quella esclusione; con ε , ε' le superficie a direttrici omo , $o'm'o'$; e con $\omega\omega'$ le porzioni di contorno a direttrici $o(ee)o$, $o'(e'e')o'$. Allora, nello spazio $S' - s - s'$ le due funzioni u' , v' non presentano singolarità, e ponendo

$$(1) \quad A' = \int_{S'-s-s'} \frac{u'_0}{r} dS' \quad B' = \int_{S'-s-s'} \frac{v'_0}{r} dS'$$

avremo

$$(2) \quad \frac{\partial A'}{\partial y} = \int_{\sigma_1' + \varepsilon + \varepsilon'} \frac{u'_0 \cos \beta}{r} d\sigma_1 + \int_{S'-s-s'} \frac{\partial u'_0}{\partial y'} \frac{dS'}{r}$$

$$\frac{\partial B'}{\partial x} = \int_{\sigma_1' + \varepsilon + o} \frac{v_0' \cos \alpha}{r} d\sigma_1 + \int_{S' - s - s} \frac{\partial v_0'}{\partial x} \frac{dS'}{r}$$

quindi per la (19)^{bis}

$$(3) \quad \frac{\partial A'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial x} = \int_{\sigma_1' + \varepsilon + \varepsilon'} \frac{u_0' \cos \beta - v_0' \cos \alpha}{r} d\sigma_1$$

Ma poichè sulle due faccie del disco $\cos \alpha$ e $\cos \beta$ sono nulli, e lungo le superficie ε , ε' è nulla l'espressione

$$(4) \quad u_0' \cos \beta - v_0' \cos \alpha$$

perchè sono superficie di livello, ne segue che avremo:

$$(5) \quad \frac{\partial A'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial x} = \int_{\mu' - \omega - \omega'} \frac{u_0'' \cos \beta - v_0' \cos \alpha}{r} d\mu$$

indicando con μ la superficie di contorno del disco.

Adottando le coordinate polari, e procedendo come per la (25) si ha

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial x} &= \frac{Q}{2\pi\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{2\pi} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} \\ &\quad - \frac{Q}{2\pi\delta} \int_{\omega} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} - \frac{Q}{2\pi\delta} \int_{\omega'} \frac{d\omega' d\theta'}{r \sin \theta'} \end{aligned}$$

Rimane ora a calcolarsi il limite dei secondi integrali.

Perciò osservo che se s' indicano con r_1, r_2 i valori di r corrispondenti a due punti simmetrici del contorno $(R', \theta') (R, -\theta')$, si ha

$$(7) \quad \int_{\omega} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = \int_{-\delta}^{+\delta} \int_{-\varphi}^{+\varphi} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = \\ \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{\varphi} \frac{dz' d\theta'}{\sin \theta'} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{\varphi} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \frac{dz' d\theta'}{\sin \theta'}$$

ma

$$r_2^2 = (x - x')^2 + (y + y')^2 + (z - z')^2$$

$$r_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

onde

$$(8) \quad r_2^2 - r_1^2 = 4 y y' = 4 y R \sin \theta'$$

quindi

$$(9) \quad \int_{\omega} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = 4 R y \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{\varphi} \frac{dz' d\theta'}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

Per $y=0$, il valore di questo integrale è 0, e per $y \geq 0$, delle due espressioni r_1, r_2 solo una si può annullare nell'intervallo d'integrazione, e precisamente quando il punto x, y si trovi sul contorno; perciò il denominatore della espressione sotto l'integrale non può divenire infinitesimo che di primo ordine e quindi, avremo in ogni caso:

$$(10) \quad \lim_{\omega=0} \int_{\omega} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = \lim_{\varphi=0} \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{\varphi} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = 0$$

Analogamente

$$(11) \quad \lim_{\omega'=0} \int_{\omega'} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = \lim_{\varphi} \int_{-\delta}^{+\delta} \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'} = 0$$

Quindi passando al limite nell'equazione (6) si avrà:

$$(12) \quad \lim_{s=s'=0} \left(\frac{\partial A'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial x} \right) = \frac{Q}{2\pi\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{2\pi} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'}$$

Ma le espressioni

$$(13) \quad A = \int_{S'} \frac{u_0'}{r} dS' \quad B = \int_{S'} \frac{v_0'}{r} dS'$$

$$(14) \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \int_{S'} u_0' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dS' \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \int_{S'} v_0' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS'$$

sono finite e continue in tutto lo spazio occupato dal disco, tranne lungo le generatrici ee , $e'e'$, perchè le funzioni u_0' , v_0' non divengono infinite, lungo queste generatrici, che del primo ordine, perciò dalla (12) potremo porre

$$(15) \quad \frac{\partial A'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \int_0^{2\pi} \frac{dz' d\theta'}{r \sin \theta'}$$

eccetto tutto al più lungo le generatrici ee , $e'e'$. E questa è appunto l'espressione (25).