

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. B. ANTONELLI

**Nota sulle relazioni indipendenti tra le coordinate di una forma
fondamentale, in uno spazio di quantesivogliono dimensioni e
sulla forma normale di una funzione omogenea di esse**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 3
(1883), p. 69-77

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1883_1_3_69_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

N O T A

SULLE RELAZIONI INDIPENDENTI

TRA LE COORDINATE DI UNA FORMA FONDAMENTALE

In uno spazio di $2n$ dimensioni

■

Sulla forma normale di una funzione omogenea di esse

N O T A

SULLE RELAZIONI INDIPENDENTI TRA LE COORDINATE
DI UNA FORMA FONDAMENTALE IN UNO SPAZIO
DI QUANTESIVOGLIA DIMENSIONI E SULLA FOR-
MA NORMALE DI UNA FUNZIONE OMOGENEA
DI ESSE

1. Le equazioni

$$\sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{U}_i^{(1)} x_i = 0, \sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{U}_i^{(2)} x_i = 0, \dots \sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{U}_i^{(r)} x_i = 0$$

definiscono una forma fondamentale $(k-r, r)$ le cui coordinate sono i determinanti minori della matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \mathcal{U}_1^{(1)}, \mathcal{U}_2^{(1)} & \dots & \mathcal{U}_k^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_1^{(r)}, \mathcal{U}_2^{(r)} & \dots & \mathcal{U}_k^{(r)} \end{array} \right\|$$

e le indico col simbolo

$$P_{i_1 i_2 \dots i_r} = \left| \begin{array}{cccc} \mathcal{U}_{i_1}^{(1)} \mathcal{U}_{i_2}^{(1)} & \dots & \mathcal{U}_{i_r}^{(1)} \\ \mathcal{U}_{i_1}^{(2)} \mathcal{U}_{i_2}^{(2)} & \dots & \mathcal{U}_{i_r}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_{i_1}^{(r)} \mathcal{U}_{i_2}^{(r)} & \dots & \mathcal{U}_{i_r}^{(r)} \end{array} \right|$$

Queste coordinate P sono in numero di $\binom{k}{r}$, ma si dimostra facilmente che soltanto $r(k-r) + 1$ sono arbitrarie; mi propongo di trovare le relazioni indipendenti che le legano.

2. Fongo

$$\Delta_{s, 1, 2 \dots r} = \begin{vmatrix} \overset{(s)}{u_{h_1}} & \overset{(s)}{u_{h_2}} & \dots & \dots & \overset{(s)}{u_{h_{r+1}}} \\ \overset{(1)}{u_{h_1}} & \overset{(1)}{u_{h_2}} & \dots & \dots & \overset{(1)}{u_{h_{r+1}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{(r)}{u_{h_1}} & \overset{(r)}{u_{h_2}} & \dots & \dots & \overset{(r)}{u_{h_{r+1}}} \end{vmatrix}$$

dove le h sono r dei numeri $1, 2, \dots k$ ed s è uno dei numeri $1, 2, \dots r$, ed indico con

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$$

gli elementi reciproci a quelli della prima colonna nel determinante $P_{i_1, i_2 \dots i_r}$; si ha identicamente

$$\sum \Delta_{s, 1, 2 \dots r} \alpha_s = 0$$

e sommando i determinanti del primo membro e sviluppando il determinante somma per gli elementi della prima linea

$$\sum_{s=1}^{r+1} \pm P_{h_s i_1 \dots i_r} P_{h_1 h_2 \dots h_{s-1} h_{s+1} \dots h_{r+1}} = 0;$$

ed anche, ponendo in luogo delle $h_1 h_2 h_3 \dots h_{r+1}$ rispettivamente le $i_1 h_1 h_2 \dots h_r$

$$(1) -P_{i_1 i_2 \dots i_r} P_{h_1 h_2 \dots h_r} + \sum_1^r P_{h_1 i_2 \dots i_r} P_{h_1 h_2 \dots h_{s-1} i_1 h_{s+1} \dots h_r} = 0$$

e questa relazione indico col simbolo

$$[P_{i_1 i_2 \dots i_r} | P_{h_1 h_2 \dots h_r}] = 0$$

Queste relazioni contengono in generale $(r+1)$ termini ma se si pongono alcuni degli indici i eguali ad alcuni degli indici h , il numero dei termini va diminuendo, sinchè quando si prendono $r-2$ degli indici i eguali ad $r-2$ degli indici h si hanno le relazioni a tre termini del tipo

$$(2) P_{cdi_3 \dots i_r} P_{efi_3 \dots i_r} + P_{fdi_3 \dots i_r} P_{cei_3 \dots i_r} + P_{cfi_3 \dots i_r} P_{dei_3 \dots i_r} = 0$$

3. Queste relazioni furono trovate per altra via dal sig. d'Ovidio ⁽¹⁾ il quale osservando che il loro numero è maggiore del numero

$$N = \binom{k}{r} - r(k-r) - 1$$

delle relazioni indipendenti che debbono legare le P con-

(1) Vedi. D'Ovidio — Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari — Atti dell'Acc. di Torino 1877 — Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni ed a curvatura costante — R. Acc. dei Lincei 1876-77.

chiude che tali relazioni indipendenti debbono trovarsi tra le (2). Mi sembra che ciò abbia bisogno di una dimostrazione più rigorosa.

Presa una P qualunque ad esempio $P_{i_1 i_2 \dots i_r}$ si costruiscano tutte le P che non differiscono da questa che per un'indice: vale a dire tutte quelle del tipo $P_{i_1 \dots i_{s-1} t i_{s+1} \dots i_r}$, dove t è uno degli indici diverso da $i_1, i_2, \dots, i_r$; queste P insieme con quella da cui siamo partiti sono precisamente $r(k-r)+1$ e tutte indipendenti tra di loro. Infatti scelti convenientemente le u del determinante

$$P_{i_1 i_2 \dots i_r} = \begin{vmatrix} {}^{(1)}u_{i_1} & \dots & {}^{(1)}u_{i_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{(r)}u_{i_1} & \dots & {}^{(r)}u_{i_r} \end{vmatrix}$$

in modo che assuma un valore dato a piacere si potranno sempre determinare le quantità $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(r)}$ in modo che

$$P_{t i_2 \dots i_r}, P_{i_1 t i_3 \dots i_r}, P_{i_2 i_3 t i_4 \dots i_r} \dots P_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{r-1} t}$$

acquistino pure valori dati ad arbitrio. Per mezzo di queste $r(k-r)+1$ coordinate indipendenti P servendosi delle relazioni (1) trovate possiamo esprimere tutte le altre P . Poichè data una P con due indici differenti da $i_1, i_2, \dots, i_r$, p. es. $P_{h l i_1 \dots i_2}$ si potrà esprimere per mezzo della P considerate adoperando la relazione a tre termini

$$[P_{i_1 i_2 \dots i_r} P_{h l i_2 \dots i_r}] = 0;$$

data poi una P con due indici differenti dalle i e per esempio $P_{h l m i_2 \dots i_r}$ si potrà esprimerla mediante le P sin qui considerate, sia servendosi della relazione a tre termini

$$[P_{i_1 i_2 m i_4 \dots i_r} P_{h l m i_4 \dots i_r}] = 0,$$

sia di quella a quattro

$$[P_{i_1 i_2 \dots i_r} P_{h l m i_4 \dots i_r}] = 0,$$

ed in generale data una P con s indici differenti dalle i p. es. $P_{h_1 h_2 \dots h_s i_{s+1} \dots i_r}$ si potrà avere espressa mediante le P con numero di indici differenti dalle i minori di s , sia tenendo conto della relazione a tre termini

$$[P_{h_1 h_2 \dots h_{s-2} i_{s-1} i_s, \dots i_r} P_{h \dots h_s i_{s+1} \dots i_r}] = 0$$

sia infine di quella a $(s+1)$ termini

$$[P_{h_1 h_2 \dots h_s i_{s+1} \dots i_r} P_{i_1 i_2 \dots i_r}] = 0$$

4. Teniamo conto delle relazioni di tre termini ed osserviamo che due di essi non possono contenere due medesime P . Siano

$$P_1 = 0, P_2 = 0 \dots P_n = 0$$

N di tali relazioni indipendenti tra di loro e si indichi con $\Delta_s \varphi$ la funzione che si ottiene da una funzione φ omogenea delle P quando si sommino le sue derivate seconde rispetto alle coppie delle P che entrano nella identità $P_s = 0$.

Allora se Φ è una funzione omogenea qualunque delle P la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia sotto la forma normale e che siano identicamente verificate le

$$\Delta_1^m \Phi = 0, \Delta_2^m \Phi = 0 \dots \Delta_n^m \Phi = 0; (m=1, 2, \dots)$$

Se ciò non è dico che si può scegliere sempre delle funzioni omogenee delle P di grado $(n-2)$, (se n è il grado della Φ) in modo tale che la

$$\Phi + \sum_{i,q} P_i \varphi_q = f$$

goda di questa proprietà. Scelgo per φ_s una funzione delle P che compariscono in P_s sarà allora

$$\Delta_s (\varphi_i P_i) = 0$$

per s differente da i , e

$$\Delta_s (\varphi_s P_s) = P_s \Delta_s \varphi_s + (n+1) \varphi_s$$

Ed in generale

$$\Delta_s^q (\varphi_s P_s) = \Delta_s^q \varphi_s + (n+q-2) q \Delta_s^{q-1} \varphi_s$$

e però

$$\Delta_s^q f = \Delta_s^q \Phi + (n+q-2) q \Delta_s^{q-1} \varphi_s + \Delta_s^q \varphi_s = 0.$$

Eliminando tra le equazioni di questa specie le φ_s si ha che

$$= \Phi - \frac{\sum_s P_s \Delta_s \Phi}{n+1} + \frac{\sum_s P_s \Delta_s \Phi}{(n+1)2n} - \dots \pm \frac{\sum_s P_s^q \Delta_s^q \Phi}{(n+1)2n \dots q(n-q+2)} \mp \dots$$

è la forma normale cercata.

Questo metodo elegante fu applicato da Clebsch per trovare la forma normale dell'equazione di un complesso.

G. B. ANTONELLI.

