ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

A. DERMOUNE

Opérateurs d'échange et quelques applications des méthodes de noyaux

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 59-68

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_59_0>

OPÉRATEURS D'ÉCHANGE ET QUELQUES APPLICATIONS DES MÉTHODES DE NOYAUX

A. DERMOUNE

Soit $H = L^2(T, dt)$ avec $T = [0,1]$, pour chaque entier d on désigne par Fock $(\overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} H)$ l'espace de Fock symétrique sur $\overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} H$. On peut donc construire toute une famille d'opérateurs de créations $a_o^j(t)$, d'annihilation $a_j^o(t)$, de nombre $a_j^j(t)$ et d'échange $a_j^i(t)$ pour $1 \leq i , j \leq d$, sur l'espace de Fock multiple Fock $(\overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} H)$.

On considère par exemple $d = 2$, et pour chaque $(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2$ on pose :

$$A_t^+ = \xi\, a_t^+ \otimes I + \bar{\eta}\, I \otimes a_t$$

$$A_t = \bar{\xi}\, a_t \otimes I + \eta\, I \otimes a_t^+ .$$

On se donne aussi une matrice $m = (m_{i,j})$ sur $\mathbb{C}^2$ hermitienne, et on se propose de calculer la loi du processus $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j}\, a_j^i(t)$ (cette question m'a été posée par Meyer P.A.) .

Le but du présent travail est de montrer que X_t est un P.A.I. (processus à accroissement indépendant dans l'état vide de Fock $(H \times H)$), d'expliciter les opérateurs d'échange à l'aide de noyau et symbole et de donner une nouvelle démonstration d'un résultat de Hudson-Parthasarathy concernant le processus $a_t^+ + a_t + c\, a_t^o$.

I. Rappels et définitions.

1. Triplet centré sur l'espace de Fock. Soit U l'espace des fonctions étagées sur T , pour chaque entier n , on désigne par $S_n(U \times U)$ l'espace des tensors symétriques d'ordre n sur $U \times U$ non complété, et $S(U \times U)$ la somme algébrique des espaces $S_n(U \times U)$.

On note aussi par $S_n(H \times H)$ l'espace des tensors symétriques d'ordre n complété, l'espace de Fock symétrique sur $H \times H$ est défini par :

$$\mathrm{Fock}(H \times H) = \bigoplus_{n=o}^{+\infty} n!S_n(H \times H) \simeq \bigoplus_{n,m=o}^{\infty} n!m!\ S_n(H) \otimes S_m(H)\ .$$

où

$n!\ S_n(H \times H)$ signifie que le produit scalaire de $S_n(H \times H)$ est multiplié par n !

Si $\hat{\mathrm{Pol}}(U \times U)$ est l'espace des séries formelles sur $U \times U$, alors on a le triplet suivant :

$$S(U \times U) \hookrightarrow \mathrm{Fock}(H \times H) \hookrightarrow \hat{\mathrm{Pol}}(U \times U)\ .$$

On peut donc appliquer la théorie de noyau et symbole pour les opérateurs linéaires de l'espace Fock $(H \times H)$ [BE.F.A. 66] ,[KR.P,RA. R. 78], [KR.P.86 + 88].

Si ϕ et ψ sont deux éléments de Fock $(H \times H)$, on notera par $<\phi\ ,\ \psi>$ le produit scalaire dans Fock$(H \times H)$ antilinéaire en ϕ et linéaire en ψ , on notera aussi par $(\phi\ ,\psi)$ la forme bilinéaire sur Fock$(H \times H)$ définie par :

$$(\phi\ ,\psi) = <\bar{\phi}\ ,\ \psi>\ .$$

Si $z = (z_1,z_2)$ est un élement de $U \times U$, on posera $z^{\otimes n} = z^n$ (resp. $z_1^{\otimes n} = z_1^n$).

2. Opérateurs de nombre et d'échange. Pour des raisons techniques, on va donner ici une présentation légèrement différente que celle de P.A.MEYER.

Soit $m = (m_{i,j})$ une matrice hermitienne de $\mathbb{C}^2$, qui définit comme suit un opérateur hermitien sur $H \times H$:

$$\forall f = (f_1,f_2) \in H \times H\ , \qquad Mf = \Big(\sum_{j=1}^2 m_{1,j}f_j\ ,\ \sum_{j=1}^2 m_{2,j}f_j\Big)\ .$$

On peut donc par la seconde quantification définir un opérateur auto-adjoint $d\Gamma(M)$ sur Fock$(H \times H)$.

2.1. Noyau et symbole de $d\Gamma(M)$.

D'après la théorie de noyau [BE.F.A. 66] , [KR.P,RA.R. 78] ,[KR.P., 86+88] , le noyau de $d\Gamma(M)$ est la série formelle $\widetilde{d\Gamma(M)}$ définie sur $U \times U$ comme suit , pour tout

$z = (z_1,z_2)$, $z' = (z'_1,z'_2)$ éléments de $U \times U$, on a :

$$(1) \quad \widetilde{d\Gamma(M)}(z,z') = \sum_{m,n=o}^{+\infty} \frac{(d\Gamma(M)z'^m, z^n)}{m!n!} .$$

Si $e^{i\lambda M}$ désigne le groupe unitaire sur $H \times H$ engendré par M , alors le groupe unitaire $\Gamma(e^{i\lambda M})$ engendré par $d\Gamma(M)$ est défini par :

(2) $\Gamma(e^{i\lambda M})e^z = e^{(e^{i\lambda M}z)}$, où e^z est le vecteur exponentiel de Fock $(H \times H)$.

En combinant (1) et (2) on obtient :

$$(3) \begin{cases} \widetilde{d\Gamma(M)}(z,z') = [\sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j} z_i . z'_j]e^{z.z'} \\ z.z' = z_1.z'_1 + z_2.z'_2 \text{ , avec } z_1.z'_1 = \int_T z_1(t)z'_1(t)dt, \forall (z_1,z'_1) \in U^2 . \end{cases}$$

3. <u>Processus d'opérateurs de nombre et d'échange</u>. Pour chaque $t \in T$, on pose :

$$H_t = L^2([0,t]),\ H^t = L^2([t,1]) \ , \ z_t = ((z_1)_t,(z_2)_t) \text{ avec } (z_i)_t = z_i 1_{[o,t]}$$

et $z^t = (z_1^t, z_2^t)$ avec $z_i^t = z_i 1_{[t,1]}$.

On considère la restriction de M à $H_t \times H_t$, on construit comme précédemment l'opérateur auto-adjoint qu'on note aussi par $d\Gamma(M)$ sur Fock$(H_t \times H_t)$. Par tensorisation on définit l'opérateur $M_t = d\Gamma(M) \otimes I^t$ sur Fock$(H \times H)$, où I^t désigne l'opérateur d'identité de Fock $(H^t \times H^t)$.

On obtient ainsi le processus d'opérateurs adapté $t \to M_t$ dont le noyau est donné par :

$$(1) \quad \forall (z,z') \in U^2 \times U^2 \ , \ \widetilde{M}(t,z,z') = \widetilde{M}(t,z_t,z'_t)e^{z^t.z'^t} = \sum_{i,j=1}^{2} (z_i)_t.(z'_j)_t m_{i,j} e^{z.z'} .$$

Donc le symbole est égal à :

$$(2) \quad \forall (z,z') \in U^2 \times U^2 \ , \ M(t,z,z') = \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j}(z_i)_t.(z'_j)_t .$$

Pour chaque couple d'entiers $(i,j) \in \{1,2\}^2$ on définit le processus $a_j^i(t)$ dont le symbole est donné par :

$$(3) \qquad a_j^i(t,z,z') = (z_i)_t . (z'_j)_t .$$

Alors il est facile de voir que $M_t = \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j}\, a_j^i(t)$.

Nous remarquons que

$$(4) \qquad a_1^1(t) = a_t^o \otimes I \ , \quad a_2^2(t) = I \otimes a_t^o .$$

où

a_t^o est le processus de nombre sur Fock(H).

Il est donc naturel d'appeler $a_i^i(t)$ processus de nombre et d'appeler $a_j^i(t)$ pour $i \neq j$ le processus d'échange. Dans l'appendice nous donnerons les formes explicites des opérateurs $a_j^i(t)$, ainsi que leurs commutateurs.

4. Loi du processus $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j}\, a_j^i(t)$.

Soit (ξ,η) un couple de nombres complexes, on pose :

(1) $$\begin{cases} A_t^+ = \xi\, a_t^+ \otimes I + \bar{\eta}\, I \otimes a_t \\ A_t = \bar{\xi}\, a_t \otimes I + \eta\, I \otimes a_t^+ \end{cases}$$.

On pose comme dans [ME. P.A. 89] :

(2) $$\begin{cases} a_o^1(t) = a_t^+ \otimes I \ , \quad a_1^o(t) = a(t) \otimes I \\ a_o^2(t) = I \otimes a^+(t) \ , \ a_2^o(t) = I \otimes a(t) \ . \end{cases}$$

Avec ceci le processus $X_t = A_t^+ + A_t + \sum m_{i,j}\, a_j^i(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

(3) $$X_t = \xi\, a_o^1(t) + \bar{\eta}\, a_2^o(t) + \bar{\xi}\, a_1^o(t) + \eta\, a_o^2(t) + \sum_{i,j} m_{i,j}\, a_j^i(t) \ .$$

Nous prenons maintenant une base orthonormée (V_1,V_2) de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de M. Si (e_1,e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^2$, alors on note par (α_j^i) les coefficients de (V_1,V_2) dans la base (e_1,e_2), c'est-à-dire

(4) $$V_1 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^1\, e_j \ , \ V_2 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^2\, e_j$$

Dans cette nouvelle base et si on note par $H^j = L^2(T,V_j)$, alors on a :

(5) $$H \times H \simeq H^1 \times H^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Fock}(H \times H) \simeq \mathrm{Fock}(H^1 \times H^2) \ .$$

On notera aussi par U^j l'espace $U \otimes V_j$, et on a ainsi :

$$U \times U \simeq U^1 \times U^2 \ .$$

4.1. Expression de X_t dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$.

Il est clair que si on note par (λ_1,λ_2) les valeurs propres de M associées respectivement aux vecteurs propres (V_1,V_2) alors le processus M_t dans $\mathrm{Fock}(H^1 \times H^2)$ s'exprime ainsi :

(1) $$M_t = \sum_{j=1}^2 \lambda_j\, \underset{\sim}{a}_j^j(t)$$

$\underset{\sim}{a}^j_j(t)$ est le processus d'opérateurs sur Fock$(H^1 \times H^2)$ dont le symbole est donné par $\forall (z_1,z_2)$, $(z'_1,z'_2) \in U^1 \times U^2$,

$$(2)\begin{cases} \underset{\sim}{a}^j_j(t,(z_1,z_2),(z'_1,z'_2)) = (z_j)_t \cdot (z'_j)_t \\ \qquad\qquad\text{où} \\ z_j \cdot z'_j = \langle \bar{z}_j , z'_j \rangle_{H^j} \text{ , avec } \langle \ , \ \rangle_{H^j} \text{ désigne le produit scalaire} \end{cases}$$

dans H^j .

Si $(\underset{\sim}{a}^o(t))_j$ désigne le processus de nombre dans Fock(H^j), alors $\underset{\sim}{a}^1_1(t) = (\underset{\sim}{a}^o(t))_1 \otimes I^2$, $\underset{\sim}{a}^2_2(t) = I^1 \otimes (\underset{\sim}{a}^o(t))_2$, où I^j désigne l'opérateur identité de Fock(H^j) .

Il reste donc à exprimer les processus $a^i_o(t)$ et $a^o_i(t)$ dans Fock$(H^1 \times H^2)$, il suffit pour cela d'exprimer $a^o_1(t)$ et $a^o_2(t)$ dans Fock$(H^1 \times H^2)$.

Soit $z = z_1 V_1 + z_2 V_2$ un vecteur de $H^1 \times H^2$, en utilisant les coordonnées de V_1, V_2 dans la base canonique (e_1,e_2) , il vient que :

$$(3) \quad z = \sum_{j=1}^{2} \alpha^j_1 z_j e_1 + \sum_{j=1}^{2} \alpha^j_2 z_j e_2 .$$

Avec ceci on a :

$$(4) \quad a^o_i(t) e^z = \left(\sum_{j=1}^{2} \alpha^j_i \int_o^t z_j(s) ds \right) e^z .$$

Si on pose :

$$(5)\begin{cases} \underset{\sim}{a}^o_1(t) = (a(t))_1 \otimes I^2 \text{ , } \underset{\sim}{a}^o_2(t) = I^1 \otimes (a(t))_2 \\ \qquad\qquad\text{où} \\ (a(t))_j \text{ désigne le processus d'annihilation sur Fock}(H^j) \text{ ,} \end{cases}$$

alors $a^o_i(t) = \sum_{j=1}^{1} \alpha^j_i \underset{\sim}{a}^o_j(t)$.

On notera par $\underset{\sim}{a}^j_o(t)$ le processus adjoint de $\underset{\sim}{a}^o_j(t)$

Finalement X_t s'exprime dans Fock$(H^1 \times H^2)$ comme suit :

$$(6) \quad X_t = \bar{\xi} \sum_{j=1}^{2} \alpha^j_1 \underset{\sim}{a}^o_j + \xi \sum \overline{\alpha^j_1} \underset{\sim}{a}^j_o + \bar{\eta} \sum_{j=2}^{2} \alpha^j_2 \underset{\sim}{a}^o_j + \eta \sum_{j=1}^{2} \overline{\alpha^j_2} \underset{\sim}{a}^j_o + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \underset{\sim}{a}^j_j(t)$$

et si on pose :

$$(7) \quad \omega = \xi e_i + \eta e_2 ,$$

alors X_t est la somme de deux processus $q_1(t) + q_2(t)$, où

$$(8)\begin{cases} q_1(t) = \bar{\omega} \cdot v_1 \underset{\sim}{a}^o_1(t) + \omega \cdot \bar{v}_1 \underset{\sim}{a}^1_o(t) + \lambda_1 \underset{\sim}{a}^1_1(t) \\ q_2(t) = \bar{\omega} \cdot v_2 \underset{\sim}{a}^o_2(t) + \omega \cdot \bar{v}_2 \underset{\sim}{a}^2_o(t) + \lambda_2 \underset{\sim}{a}^2_2(t) . \end{cases}$$

Il est donc clair sachant un résultat de Hudson-Parthasarathy[ME.P.A.86] que X_t est un P.A.I. si on désigne par M_t^1 et M_t^2 deux processus de Poisson compensés et indépendants d'intensités respectives $|\overline{\omega}.v_1|^2$ et $|\overline{\omega}.v_2|^2$ et de longueurs de saut égales respectivement à λ_1 et λ_2 , et si on désigne par B_t^1 et B_t^2 deux mouvements browniens indépendants d'intensités respectives $\frac{|\overline{\omega}.v_1|^2}{2}$ et $\frac{|\overline{\omega}.v_2|^2}{2}$, alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION. - Soit $m = (m_{i,j})$ une matrice hermitienne de $\mathbb{C}^2$, et soit (v_1,v_2) une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de m associés respectivement aux valeurs propres (λ_1,λ_2) . Alors le processus d'opérateurs :

$$X_t = \xi\, a_t^+ \otimes I + \overline{\eta}\, I \otimes a_t + \overline{\xi}\, a_t \otimes I + \eta\, I \otimes a_t^+ + \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j}\, a_j^i(t)$$

a pour loi dans l'état $1\!\!1 \otimes 1\!\!1$ de Fock (H × H) :

a/ Si m est non-dégénérée alors X_t a la même loi que $M_t^1 + M_t^2$.

b/ Si m est dégénérée et non nulle, on suppose par exemple que λ_2 est nulle, alors X_t a la même loi que $M_t^1 + B_t^2$.

c/ On suppose que $m \equiv 0$, alors X_t a la même loi que $B_t^1 + B_t^2$.

<u>En plus</u> la loi de X_t est indépendante de la base (v_1,v_2) .

Remarquer que les résultats de ce paragraphe se prolongent sans difficultés à $\mathbb{C}^d$ pour tout $d \geq 2$.

II. <u>Appendice</u> : Dans cette partie on va donner une nouvelle démonstration (qui est déjà faite dans [DE.A. 89] dans un cadre plus général) de ce résultat de Hudson-Parthasarathy, nous donnerons aussi des résultats concernant les opérateurs d'échange.

1. On considère le processus $q_t = \overline{\alpha}\, a_t^+ + \alpha\, a_t + \lambda\, a_t^o$, le noyau de q_t est égal à :

$$(1) \quad \tilde{q}(t,z,z') = [\overline{\alpha} \int_0^t z(s)ds + \alpha \int_0^t z'(s)ds + \lambda \int_0^t z(s)z'(s)ds]e^{z.z'}$$

et pour simplifier on prend $\alpha = 1$.

Soit maintenant (M_t) une martingale solution de l'équation de structure suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} d[M,M]_t = \lambda\, dM_t + dt \,. \\ M_o = 0 \,. \end{cases}$$

Il est bien connu qu'une telle martingale est un processus de Poisson compensé d'intensité 1 et de longueur de saut égale à λ , voir par exemple M.Emery [EM.M.89]. L'isométrie de P.A.Meyer, [ME.P.A. 76] définie par les intégrales stochastiques multiples par rapport à (M_t) donne une isométrie surjective I de Fock(H) dans $L^2(\Omega,\sigma(M_t, t \in T))$.

Pour tout z élément de U , $I(e^z)$ est la valeur terminale de la martingale exponentielle $\varepsilon(z)_t$, c'est-à-dire

(3) $\varepsilon(z)(t) = 1 + \int_0^t z(s)\,\varepsilon(z)(s-)dM_s = I(e^{z_t})$.

Soit maintenant Y_t l'opérateur linéaire de Fock(H) associé à M_t par l'isométrie I , c'est-à-dire

(4) $Y_t = I^{-1} M_t I$

où

M_t est vu comme opérateur de multiplication dans $L^2(\Omega,\sigma(M_t, t \in T))$.

Le noyau de Y_t est donné par :

$$\tilde{Y}(t,z,z') = (Y_t e^{z'}, e^z) = E[M_t I(e^{z'_t})\, I(e^{z_t})]\, e^{\int_t^1 z(s)z'(s)ds}$$

Nous posons $J(t) = E[M_t\, I(e^{z'_t}) I(e^{z_t})]$, alors en appliquant la formule de Itô pour le produit des trois martingales $M_t\, I(e^{z_t})\, I(e^{z'_t})$ et en utilisant (2) et (3) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dJ(t)}{dt} = z(t)z'(t)J(t) + [z(t) + z'(t) + \lambda z(t)z'(t)]\, e^{z_t . z'_t} \\ J(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction $J(t)$ est la solution de cette équation linéaire avec second membre, qui est donc égale à :

$$J(t) = \int_0^t z(s) + z'(s) + \lambda z(s)z'(s)ds\ e^{z_t . z'_t} .$$

Finalement $\tilde{Y}(t,z,z') = \int_0^t z(s) + z'(s) + \lambda z(s)z'(s)ds\ e^{z.z'}$, d'où $X_t = Y_t$.

2. <u>Formes explicites des opérateurs</u> $a^i_j(t)$.

D'après la formule (3) du paragraphe I.3, le noyau de $a^i_j(t)$ est égal à :

$$\tilde{a}^i_j(t,z,z') = (a^i_j(t)e^{z'}, e^z) = [(z_i)_t \, . \, (z'_j)_t]\, e^{z.z'} .$$

On obtient en identifiant les deux derniers termes le résultat suivant :

(1) PROPOSITION. - <u>Pour tout</u> $z = (z_1, z_2) \in U^2$ <u>et pour tout couple d'entiers</u> (m,n) <u>on a</u> :

$$a_1^2(t)[z_1^m \otimes z_2^n] = m\, z_1^{m-1} \otimes a^+((z_1)_t) z_2^n$$

$$a_2^1(t)[z_1^m \otimes z_2^n] = n\, a^+((z_2)_t) z_1^m \otimes z_2^{n-1} .$$

2.1. <u>Prolongement par continuité des opérateurs d'échange à la somme algébrique</u>

$$\mathcal{F} = \sum_{m,n} S_m(H) \otimes S_n(H) .$$

Une conséquence de la proposition (1) est le résultat suivant :

$$\forall (z_1,z_2) \in U^2 , \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 , \quad \forall t \in T , \text{ on a :}$$

(1)
$$\|a_1^2(t)\, z_1^m \otimes z_2^n\| \leq \sqrt{n+1}\, \|z_1^m \otimes z_2^n\|$$
$$\|a_2^1(t)\, z_1^m \otimes z_2^n\| \leq \sqrt{m+1}\, \|z_1^m \otimes z_2^n\| .$$

Il en résulte que $a_j^i(t)$ se prolonge par continuité à $S_m(H) \otimes S_n(H)$, plus précisément si on pose :

$\underline{s} = (s_1,\dots,s_{m-1}) \in T^{m-1}$, $\underline{t} = (t_1,\dots,t_{n+1}) \in T^{n+1}$ et
$\underline{t}^{k+1} = (t_1,\dots,t_k,t_{k+2}, \dots, t_{n+1}) \in T^n$,

alors on a : $\forall f_{m,n} \in S_m(H) \otimes S_n(H)$,

(2) $$[a_1^2(t) f_{m,n}](\underline{s},\underline{t}) = \frac{m}{n+1} \sum_{k=o}^{n} f_{m,n}(\underline{s}, t_{k+1}, \underline{t}^{k+1})\, 1_{(o,t)}(t_{k+1}) .$$

De même si on pose :

$\underline{v} = (v_1,\dots,v_{n-1}) \in T^{n-1}$, $\underline{u} = (u_1,u_2,\dots,u_{m+1}) \in T^{m+1}$

$\underline{u}^{k+1} = (u_1,\dots,u_k, u_{k+2}, \dots, u_{m+1}) \in T^m$,

alors on a

(3) $$[a_2^1(t) f_{m,n}](\underline{u},\underline{v}) = \frac{n}{m+1} \sum_{k=o}^{m} f_{m,n}(\underline{u}^{k+1}, u_{k+1}, \underline{v})\, 1_{[o,t]}(u_{k+1}) .$$

Nous remarquons que si $a_j^i(t)^*$ désigne l'adjoint formel de $a_j^i(t)$, alors on a pour $i \neq j$, $(a_j^i(t))^* = a_i^j(t)$.

(4) <u>Remarques</u>. a/ Pour chaque couple d'entiers (i,j) appartenant à $\{1,2\} \times \{1,2\}$, on définit l'opérateur linéaire τ_j^i de Fock $(H \times H)$ par :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad \forall f_{m,n} \in S_m(H)) \otimes S_n(H) \; ,$$

$$\tau_1^2(f_{m,n})(\underline{t},\underline{s}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} f_{m,n}(\underline{t}, s_{k+1}, \underline{s}^{k+1})$$

où

$$\underline{t} \in T^{m-1} \quad , \quad \underline{s} \in T^{n+1}$$

respectivement

$$\tau_2^1(f_{m,n}) \; (\underline{u},\underline{v}) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=o}^{m} f_{m,n}(\underline{u}^{k+1}, \; u_{k+1}, \; \underline{v})$$

où

$$\underline{u} \in T^{m+1} \quad , \quad \underline{v} \in T^{n-1} \; .$$

Ainsi il est clair que τ_1^2 (resp. τ_2^1) envoie $S_m(H) \otimes S_n(H)$ dans $S_{m-1}(H) \otimes S_n(H$ (resp. dans $S_{m+1}(H) \otimes S_{n-1}(H))$, en plus on a les relations suivantes :

$$a_2^1(t) = \tau_2^1[I \otimes a_t^o] \quad , \quad a_1^2 = \tau_1^2[a_t^o \otimes I] \quad .$$

Ces formules explicites nous permettent par exemple de calculer les commutateurs $[a_j^i(t_1), \; a_\ell^k(t_2)]$, des opérateurs $a_j^i(t_1)$ et $a_\ell^k(t_2)$. Ils sont donnés par $\forall (i,j) \in \{0,1,2\}^2$, $\forall (k,\ell) \in \{0,1,2\}^2$:

$$[a_j^i(t_1), \; a^k(t_2)] = \delta_j^{'k} \; a_\ell^i(t_1 \wedge t_2) - \delta_i^{'\ell} \; a_j^k(t_1 \wedge t_2)$$

où

$$a_o^o(t) = t \; , \; \delta_j^{'k} = \delta_j^k \quad \text{si} \quad (j,k) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad \delta_o^{'o} = 0 \; .$$

Les symboles $\delta_j^{'k}$ sont appelés symboles d'Evans par P.A.MEYER.

b/ Les résultats de cette partie s'étendent sans difficulté aux opérateurs d'échange de l'espace de Fock multiple Fock($\bigoplus_{j=1}^{d} H$) pour d quelconque.

REFERENCES

[BE.F.A 66] BEREZIN F.A. . - The method of second quantization. Academic Press, 1966.

[DE.A. 189] DERMOUNE A. . - Quelques interactions entre le calcul stochastique et les probabilités non commutatives, Manuscrit 1989.

[EM.M. 89] EMERY M. - On the Azema martingale , à paraître.

[KR.P., RA. R. 78] KRÉE P. , RACZKA R. - Kernel and symbol in quantum field theory. Ann. Inst. H.Poincaré, section A, vol. 28, n° 1, pp. 41-73, 1978.

[KR.P. 88] KRÉE P. - Dim. Free stochastic calculus in the distribution sens, à paraître.

[ME.P.A. 76] MEYER P.A. - I.s.m. par rapport à certaines martingales. Séminaire de probabilité, X, pp. 325-331.

[ME.P.A. 86] MEYER P.A. - Eléments de probabilités quantiques. Séminaire de probabilité, XX.

[ME.P.A. 89] MEYER P.A. - Probabilités non commutatives sur l'espace de Fock, à paraître, 1989.