Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
*Série Probabilités et applications*

A. Dermoune

**Une remarque sur le processus : $\alpha a(f) + \bar{\alpha} a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f)$**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 55-58

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_55_0>

# Une remarque sur le processus : $\alpha a(f) + \overline{\alpha} a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f)$

A. DERMOUNE

Soit $H = L^2(E, \mu)$, où $\mu$ est une mesure positive et sans perdre de généralités on suppose que $\mu$ est bornée. L'espace de Fock symétrique sur $H$ est noté par Fock($H$), et si $U$ désigne l'espace des fonctions indicatrices de $E$ on note par $S(U)$ l'algèbre symétrique sur $U$, on obtient ainsi le triplet centré sur l'espace Fock($H$) suivant :

$$S(U) \hookrightarrow \mathrm{Fock}(H) \hookrightarrow \mathrm{Pôl}(U) \tag{1}$$

où Pôl($U$) désigne le dual algébrique de $S(U)$.

On peut donc appliquer la théorie de noyaux et de symboles des opérateurs linéaires de Fock($H$) dont le domaine contient $S(U)$, [1], [2].

Soient maintenant $\lambda$ un réel non nul, pour chaque $f$ élément de $U$ on considère l'opérateur :

$$X(f) = a(f) + a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f) \tag{2}$$

où $a(f), a^{+}(f)$ et $a^{0}(f)$ désignent respectivement l'opérateur d'annihilation de création et de comptage .

On se propose de calculer la loi de $X(f)$ dans le cas où $f$ est réelle, et plus précisément on va montrer le résultat suivant :

**Proposition.** *Soit $q(f)$ le processus de Poisson composé d'intensité $\frac{d\mu}{\lambda^2}$, on pose :*

$$M(f) = \lambda q(f)$$

*alors dans l'état vide $\mathbb{1}$ de Fock($H$) le processus $X(f)$ a la même loi que $M(f)$.*

**Preuve.** Soit $I$ l'isométrie de Fock$(L^2(E, \frac{d\mu}{\lambda^2}))$ dans $L^2(\Omega, \sigma(q(f), f \in U))$, [3], $I$ associé au vecteur exponentielle $e^z$ la variable aléatoire $\varepsilon(z)$ définie par :

$$\varepsilon(z)(\omega) = e^{-\int z(x)\frac{d\mu}{\lambda^2}(x)} \Pi_{i=1}^{n(\omega)}(1 + z(x_i)) \tag{3}$$

Pour chaque $g \in L^2(E, d\mu)$, et si on considère $q(g)$ comme opérateur de multiplication dans $L^2(\Omega, \sigma(q))$, alors par l'isométrie $I$ on lui associe l'opérateur suivant :

$$I\ q(g)I^{-1} = Y(g). \tag{4}$$

Le noyau de $Y(g)$ est défini par :

$$\forall (z.z') \in U^2, \tilde{Y}\ (g)\ \ `(z,z') = < Y(g)e^{z'}, e^z > . \tag{5}$$

En utilisant (4) et (3) alors par un calcul directe on obtient :

$$\forall (z.z') \in U^2, \tilde{Y}\ (g)(z,z') = e^{\int z(x)z'(x)\frac{d\mu(x)}{\lambda^2}} \Big[\int g(x)z(x)\frac{d\mu(x)}{\lambda^2} + \int g(x)z'(x)\frac{d\mu(x)}{\lambda^2} + \int g(x)z(x)z'(x)\frac{d\mu(x)}{\lambda^2}\Big] \tag{6}$$

Si $M(f) = \lambda q(f)$, alors on a :

$$E\ [M(f)\varepsilon(z)\varepsilon(z')] = \tilde{Y}\ (\lambda f)(z,z') = e^{\int z(x)z'(x)\frac{d\mu(x)}{\lambda^2}} \Big[\int f(x)z(x)\frac{d\mu(x)}{\lambda} + \int f(x)z'(x)\frac{d\mu}{\lambda} + \int f(x)z(x)x'(x)\frac{d\mu}{\lambda}\Big] \tag{7}$$

Le dernier terme est égal au noyau de $a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f)$ d'où on a :

$$E\ [M(f)\varepsilon(z)\varepsilon(z')] = < [a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f)]\ e^{z'/\lambda}, e^{z/\lambda} > \tag{8}$$

Si $\Gamma(U)$ désigne la transformation unitaire de Fock$(L^2(E, \frac{d\mu}{\lambda^2}))$ dans Fock$(L^2(E,\mu))$ définie par la seconde quantification de l'isométrie $U$ suivante :

$$L^2(E, \frac{d\mu}{\lambda^2}) \ni\!\longrightarrow \lambda^{-1} f \in L^2(E, d\mu)$$

alors (8) devient :

$$E\ [M(f)\varepsilon(z)\varepsilon(z')] < \Gamma(U^{-1})a(f) + a^+(f) + \lambda a^0(f)\Gamma(U)e^{z'}, e^z > \tag{9}$$

En utilisant (7) il vient :

$$Y(\lambda f) = \Gamma(U^{-1})a(f) + a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f)\Gamma(U) \tag{10}$$

Comme $\Gamma(U)\ \mathbb{1} = \mathbb{1}$ alors $a(f)+a^{+}(f)+\lambda a^{0}(f)$ a même loi dans l'état $\mathbb{1}$ que $M(f)$.

**Application.** Soient $\alpha$ un complexe non nul et $\lambda$ un réel non nul, on pose :

$$X(f) = \alpha a(f) + \overline{\alpha} a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f).$$

Soit $\Gamma(V)$ la transformation unitaire de Fock$(L^2(E,d\mu))$ dans Fock$(L^2(E,|\alpha|^2 d\mu))$ définie par la seconde quantification de l'isométrie $V$ suivante :

$$L^2(E,d\mu) \ni f \longrightarrow \alpha^{-1} f \in L^2(E,|\alpha|^2 d\mu)$$

Le processus $\Gamma(V)\ [X(f)]$ à valeurs opérateurs de Fock$(L^2(E,|\alpha|^2 d\mu))$ a pour noyau :

$$< \Gamma(V)\ [X(f)]e^{z'}, e^{z} >= e^{|\alpha|^2 \int z(x)z'(x)d\mu(x)} \left[|\alpha|^2\{\int f(x)z(x)d\mu(x)\right.$$

$$\left. + \int f(x)z'(x)d\mu(x) + \lambda \int f(x)z(x)z'(x)d\mu(x)\}\right]$$

d'où $\Gamma(V)\ [X(f)] = \underline{a}(f) + \underline{a}^{+}(f) + \lambda \underline{a}^{0}(f)$, avec $\underline{a}(f), \underline{a}^{+}(f)$ et $\underline{a}^{0}(f)$ sont respectivement les opérateur d'aninhilation de création et de comptage de Fock$(L^2(E,|\alpha|^2 d\mu))$.

En utilisant la proposition alors $\alpha a(f) + \overline{\alpha} a^{+}(f) + \lambda a^{0}(f)$ a même loi dans l'état vide $\mathbb{1}$ de Fock$(L^2(E,d\mu))$ que $\lambda q(f)$, où $q(f)$ est un processus de Poisson compensé d'intensité $\frac{|\alpha|^2 d\mu}{\lambda^2}$.

Dans le cas où $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ on retrouve le résultat de Parthasarathy [4].

## References

[1] Berezin F.A., *The method of second quantization.* Academic press, (1966)

[2] Krée P., Raccka R., *Kernel and Symbol in quantum field theory.* Ann. I.H.P., Section A, Vol. 28, numéro 1, pp. 41-73 (1978)

[3] Neveu J., *Processus aléatoire gaussien.* Cours de Montréal, (1968)

[4] Meyer P.A., *Eléments de probabilités quantiques.* Séminaire de probabilités XX.