

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Probabilités et applications*

A. DERMOUNE

**Opérateurs d'échange et quelques applications des méthodes de noyaux**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 45-54

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA\\_1991\\_\\_96\\_9\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_45_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

OPERATEURS D'ECHANGE ET QUELQUES APPLICATIONS

DES METHODES DE NOYAUX

A. DERMOUNE

Soit  $H = L^2(T, dt)$  avec  $T = [0, 1]$ , pour chaque entier  $d$  on désigne par  $Fock \left( \bigoplus_{j=1}^d H \right)$  l'espace de Fock symétrique sur  $\bigoplus_{j=1}^d H$ . On peut donc construire toute une famille d'opérateurs de créations  $a_j^j(t)$ , d'annihilation  $a_j^0(t)$ , de nombre  $a_j^j(t)$  et d'échange  $a_j^i(t)$  pour  $1 \leq i, j \leq d$ , sur l'espace de Fock multiple  $Fock \left( \bigoplus_{j=1}^d H \right)$ .

On considère par exemple  $d = 2$ , et pour chaque  $(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2$  on pose :

$$A_t^+ = \xi a_t^+ \otimes I + \bar{\eta} I \otimes a_t$$

$$A_t = \bar{\xi} a_t \otimes I + \eta I \otimes a_t^+ .$$

On se donne aussi une matrice  $m = (m_{i,j})$  sur  $\mathbb{C}^2$  hermitienne, et on se propose de calculer la loi du processus  $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j} a_j^i(t)$  (cette question m'a été posée par Meyer P.A.) .

Le but du présent travail est de montrer que  $X_t$  est un P.A.I. (processus à accroissement indépendant dans l'état vide de Fock  $(H \times H)$ ), d'expliciter les opérateurs d'échange à l'aide de noyau et symbole et de donner une nouvelle démonstration d'un résultat de Hudson-Parthasarathy concernant le processus  $a_t^+ + a_t + c a_t^0$ .

I. Rappels et définitions.

1. Triplet centré sur l'espace de Fock. Soit  $U$  l'espace des fonctions étagées sur  $T$ , pour chaque entier  $n$ , on désigne par  $S_n(U \times U)$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre  $n$  sur  $U \times U$  non complété, et  $S(U \times U)$  la somme algébrique des espaces  $S_n(U \times U)$ .

On note aussi par  $S_n(H \times H)$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre  $n$  complété, l'espace de Fock symétrique sur  $H \times H$  est défini par :

$$\text{Fock}(H \times H) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} n! S_n(H \times H) \simeq \bigoplus_{n,m=0}^{\infty} n!m! S_n(H) \otimes S_m(H) .$$

où

$n! S_n(H \times H)$  signifie que le produit scalaire de  $S_n(H \times H)$  est multiplié par  $n!$

Si  $P\hat{O}l(U \times U)$  est l'espace des séries formelles sur  $U \times U$ , alors on a le triplet suivant :

$$S(U \times U) \hookrightarrow \text{Fock}(H \times H) \hookrightarrow P\hat{O}l(U \times U) .$$

On peut donc appliquer la théorie de noyau et symbole pour les opérateurs linéaires de l'espace Fock  $(H \times H)$  [BE.F.A. 66] , [KR.P,RA. R. 78] , [KR.P.86 + 88].

Si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux éléments de Fock  $(H \times H)$  , on notera par  $\langle \phi , \psi \rangle$  le produit scalaire dans Fock  $(H \times H)$  antilinéaire en  $\phi$  et linéaire en  $\psi$  , on notera aussi par  $(\phi , \psi)$  la forme bilinéaire sur Fock  $(H \times H)$  définie par :

$$(\phi , \psi) = \langle \bar{\phi} , \psi \rangle .$$

Si  $z = (z_1, z_2)$  est un élément de  $U \times U$  , on posera  $z^{\otimes n} = z^n$  (resp.  $z_1^{\otimes n} = z_1^n$ )

2. Opérateurs de nombre et d'échange. Pour des raisons techniques, on va donner ici une présentation légèrement différente que celle de P.A.MEYER.

Soit  $m = (m_{i,j})$  une matrice hermitienne de  $\mathbb{C}^2$  , qui définit comme suit un opérateur hermitien sur  $H \times H$  :

$$\forall f = (f_1, f_2) \in H \times H , \quad Mf = \left( \sum_{j=1}^2 m_{1,j} f_j , \sum_{j=1}^2 m_{2,j} f_j \right) .$$

On peut donc par la seconde quantification définir un opérateur auto-adjoint  $d\Gamma(M)$  sur Fock  $(H \times H)$  .

2.1. Noyau et symbole de  $d\Gamma(M)$  .

D'après la théorie de noyau [BE.F.A. 66] , [KR.P,RA.R. 78] , [KR.P., 86+88] , le noyau de  $d\Gamma(M)$  est la série formelle  $\widetilde{d\Gamma(M)}$  définie sur  $U \times U$  comme suit , pour tout

$z = (z_1, z_2)$ ,  $z' = (z'_1, z'_2)$  éléments de  $U \times U$ , on a :

$$(1) \quad \widetilde{d\Gamma(M)}(z, z') = \sum_{m, n=0}^{+\infty} \frac{(d\Gamma(M) z^m, z^n)}{m!n!} .$$

Si  $e^{i\lambda M}$  désigne le groupe unitaire sur  $H \times H$  engendré par  $M$ , alors le groupe unitaire  $\Gamma(e^{i\lambda M})$  engendré par  $d\Gamma(M)$  est défini par :

$$(2) \quad \Gamma(e^{i\lambda M})e^z = e^{(e^{i\lambda M} z)}, \text{ où } e^z \text{ est le vecteur exponentiel de Fock } (H \times H) .$$

En combinant (1) et (2) on obtient :

$$(3) \quad \begin{cases} \widetilde{d\Gamma(M)}(z, z') = \left[ \sum_{i, j=1}^2 m_{i, j} z_i \cdot z'_j \right] e^{z \cdot z'} \\ z \cdot z' = z_1 \cdot z'_1 + z_2 \cdot z'_2, \text{ avec } z_1 \cdot z'_1 = \int_T z_1(t) z'_1(t) dt, \forall (z_1, z'_1) \in U^2 . \end{cases}$$

3. Processus d'opérateurs de nombre et d'échange. Pour chaque  $t \in T$ , on pose :

$$H_t = L^2([0, t]), \quad H^t = L^2([t, 1]), \quad z_t = ((z_1)_t, (z_2)_t) \text{ avec } (z_i)_t = z_i \upharpoonright_{[0, t]}$$

$$\text{et } z^t = (z_1^t, z_2^t) \text{ avec } z_i^t = z_i \upharpoonright_{[t, 1]} .$$

On considère la restriction de  $M$  à  $H_t \times H_t$ , on construit comme précédemment l'opérateur auto-adjoint qu'on note aussi par  $d\Gamma(M)$  sur  $\text{Fock}(H_t \times H_t)$ . Par tensorisation on définit l'opérateur  $M_t = d\Gamma(M) \otimes I^t$  sur  $\text{Fock}(H \times H)$ , où  $I^t$  désigne l'opérateur d'identité de  $\text{Fock}(H^t \times H^t)$ .

On obtient ainsi le processus d'opérateurs adapté  $t \rightarrow M_t$  dont le noyau est donné par :

$$(1) \quad \forall (z, z') \in U^2 \times U^2, \quad \widetilde{M}(t, z, z') = \widetilde{M}(t, z_t, z'_t) e^{z^t \cdot z'^t} = \sum_{i, j=1}^2 (z_i)_t \cdot (z'_j)_t m_{i, j} e^{z \cdot z'} .$$

Donc le symbole est égal à :

$$(2) \quad \forall (z, z') \in U^2 \times U^2, \quad M(t, z, z') = \sum_{i, j=1}^2 m_{i, j} (z_i)_t \cdot (z'_j)_t .$$

Pour chaque couple d'entiers  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  on définit le processus  $a_j^i(t)$  dont le symbole est donné par :

$$(3) \quad a_j^i(t, z, z') = (z_i)_t \cdot (z'_j)_t .$$

Alors il est facile de voir que  $M_t = \sum_{i, j=1}^2 m_{i, j} a_j^i(t)$ .

Nous remarquons que

$$(4) \quad a_1^1(t) = a_t^0 \otimes I, \quad a_2^2(t) = I \otimes a_t^0 .$$

où

$a_t^0$  est le processus de nombre sur Fock(H).

Il est donc naturel d'appeler  $a_j^i(t)$  processus de nombre et d'appeler  $a_j^i(t)$  pour  $i \neq j$  le processus d'échange. Dans l'appendice nous donnerons les formes explicites des opérateurs  $a_j^i(t)$ , ainsi que leurs commutateurs.

4. Loi du processus  $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j} a_j^i(t)$ .

Soit  $(\xi, \eta)$  un couple de nombres complexes, on pose :

$$(1) \quad \begin{cases} A_t^+ = \xi a_t^+ \otimes I + \bar{\eta} I \otimes a_t \\ A_t = \bar{\xi} a_t \otimes I + \eta I \otimes a_t^+ \end{cases} .$$

On pose comme dans [ME. P.A. 89] :

$$(2) \quad \begin{cases} a_0^1(t) = a_t^+ \otimes I, & a_1^0(t) = a(t) \otimes I \\ a_0^2(t) = I \otimes a^+(t), & a_2^0(t) = I \otimes a(t) \end{cases} .$$

Avec ceci le processus  $X_t = A_t^+ + A_t + \sum_{i,j} m_{i,j} a_j^i(t)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$(3) \quad X_t = \xi a_0^1(t) + \bar{\eta} a_2^0(t) + \bar{\xi} a_1^0(t) + \eta a_0^2(t) + \sum_{i,j} m_{i,j} a_j^i(t) .$$

Nous prenons maintenant une base orthonormée  $(V_1, V_2)$  de  $\mathbb{C}^2$  formée de vecteurs propres de M. Si  $(e_1, e_2)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^2$ , alors on note par  $(\alpha_j^i)$  les coefficients de  $(V_1, V_2)$  dans la base  $(e_1, e_2)$ , c'est-à-dire

$$(4) \quad V_1 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^1 e_j, \quad V_2 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^2 e_j$$

Dans cette nouvelle base et si on note par  $H^j = L^2(T, V_j)$ , alors on a :

$$(5) \quad H \times H \simeq H^1 \times H^2 \quad \text{et} \quad \text{Fock}(H \times H) \simeq \text{Fock}(H^1 \times H^2) .$$

On notera aussi par  $U^j$  l'espace  $U \otimes V_j$ , et on a ainsi :

$$U \times U \simeq U^1 \times U^2 .$$

4.1. Expression de  $X_t$  dans  $\text{Fock}(H^1 \times H^2)$  .

Il est clair que si on note par  $(\lambda_1, \lambda_2)$  les valeurs propres de M associées respectivement aux vecteurs propres  $(V_1, V_2)$  alors le processus  $M_t$  dans  $\text{Fock}(H^1 \times H^2)$  s'exprime ainsi :

$$(1) \quad M_t = \sum_{j=1}^2 \lambda_j a_j^j(t)$$

$\tilde{a}_j^j(t)$  est le processus d'opérateurs sur  $\text{Fock}(H^1 \times H^2)$  dont le symbole est donné par  $\forall (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \in U^1 \times U^2$ ,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_j^j(t, (z_1, z_2), (z'_1, z'_2)) = (z_j)_t \cdot (z'_j)_t \\ \text{où} \\ z_j \cdot z'_j = \langle \bar{z}_j, z'_j \rangle_{H^j}, \text{ avec } \langle, \rangle_{H^j} \text{ désigne le produit scalaire} \\ \text{dans } H^j. \end{array} \right.$$

Si  $(\tilde{a}^o(t))_j$  désigne le processus de nombre dans  $\text{Fock}(H^j)$ , alors  $\tilde{a}_1^1(t) = (\tilde{a}^o(t))_1 \otimes I^2$ ,  $\tilde{a}_2^2(t) = I^1 \otimes (\tilde{a}^o(t))_2$ , où  $I^j$  désigne l'opérateur identité de  $\text{Fock}(H^j)$ .

Il reste donc à exprimer les processus  $a_i^i(t)$  et  $a_i^o(t)$  dans  $\text{Fock}(H^1 \times H^2)$ , il suffit pour cela d'exprimer  $a_1^o(t)$  et  $a_2^o(t)$  dans  $\text{Fock}(H^1 \times H^2)$ .

Soit  $z = z_1 V_1 + z_2 V_2$  un vecteur de  $H^1 \times H^2$ , en utilisant les coordonnées de  $V_1, V_2$  dans la base canonique  $(e_1, e_2)$ , il vient que :

$$(3) \quad z = \sum_{j=1}^2 \alpha_1^j z_j e_1 + \sum_{j=1}^2 \alpha_2^j z_j e_2.$$

Avec ceci on a :

$$(4) \quad a_i^o(t) e^z = \left( \sum_{j=1}^2 \alpha_i^j \int_0^t z_j(s) ds \right) e^z.$$

Si on pose :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_1^o(t) = (a(t))_1 \otimes I^2, \quad \tilde{a}_2^o(t) = I^1 \otimes (a(t))_2 \\ \text{où} \\ (a(t))_j \text{ désigne le processus d'annihilation sur } \text{Fock}(H^j), \end{array} \right.$$

alors  $a_i^o(t) = \sum_{j=1}^2 \alpha_i^j \tilde{a}_j^o(t)$ .

On notera par  $\tilde{a}_j^j(t)$  le processus adjoint de  $\tilde{a}_j^o(t)$

Finalement  $X_t$  s'exprime dans  $\text{Fock}(H^1 \times H^2)$  comme suit :

$$(6) \quad X_t = \bar{\xi} \sum_{j=1}^2 \alpha_1^j \tilde{a}_j^o + \xi \sum \bar{\alpha}_1^j \tilde{a}_j^j + \bar{\eta} \sum_{j=2}^2 \alpha_2^j \tilde{a}_j^o + \eta \sum_{j=1}^2 \bar{\alpha}_2^j \tilde{a}_j^j + \sum_{j=1}^2 \lambda_j \tilde{a}_j^j(t)$$

et si on pose :

$$(7) \quad \omega = \xi e_1 + \eta e_2,$$

alors  $X_t$  est la somme de deux processus  $q_1(t) + q_2(t)$ , où

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1(t) = \bar{\omega} \cdot v_1 \tilde{a}_1^o(t) + \omega \cdot \bar{v}_1 \tilde{a}_1^j(t) + \lambda_1 \tilde{a}_1^j(t) \\ q_2(t) = \bar{\omega} \cdot v_2 \tilde{a}_2^o(t) + \omega \cdot \bar{v}_2 \tilde{a}_2^j(t) + \lambda_2 \tilde{a}_2^j(t). \end{array} \right.$$

Il est donc clair sachant un résultat de Hudson-Parthasarathy[ME.P.A.86] que  $X_t$  est un P.A.I. si on désigne par  $M_t^1$  et  $M_t^2$  deux processus de Poisson compensés et indépendants d'intensités respectives  $|\bar{\omega}.v_1|^2$  et  $|\bar{\omega}.v_2|^2$  et de longueurs de saut égales respectivement à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et si on désigne par  $B_t^1$  et  $B_t^2$  deux mouvements browniens indépendants d'intensités respectives  $\frac{|\bar{\omega}.v_1|^2}{2}$  et  $\frac{|\bar{\omega}.v_2|^2}{2}$ , alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION. - Soit  $m = (m_{i,j})$  une matrice hermitienne de  $\mathbb{C}^2$ , et soit  $(v_1, v_2)$  une base orthonormée de  $\mathbb{C}^2$  formée de vecteurs propres de  $m$  associés respectivement aux valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Alors le processus d'opérateurs :

$$X_t = \xi a_t^+ \otimes I + \bar{\eta} I \otimes a_t + \bar{\xi} a_t \otimes I + \eta I \otimes a_t^+ + \sum_{i,j=1}^2 m_{i,j} a_j^i(t)$$

a pour loi dans l'état  $\|1 \otimes 1$  de Fock  $(H \times H)$  :

a/ Si  $m$  est non-dégénérée alors  $X_t$  a la même loi que  $M_t^1 + M_t^2$ .

b/ Si  $m$  est dégénérée et non nulle, on suppose par exemple que  $\lambda_2$  est nulle, alors  $X_t$  a la même loi que  $M_t^1 + B_t^2$ .

c/ On suppose que  $m \equiv 0$ , alors  $X_t$  a la même loi que  $B_t^1 + B_t^2$ .

En plus la loi de  $X_t$  est indépendante de la base  $(v_1, v_2)$ .

Remarquer que les résultats de ce paragraphe se prolongent sans difficultés à  $\mathbb{C}^d$  pour tout  $d \geq 2$ .

II. Appendice : Dans cette partie on va donner une nouvelle démonstration (qui est déjà faite dans [DE.A. 89] dans un cadre plus général) de ce résultat de Hudson-Parthasarathy, nous donnerons aussi des résultats concernant les opérateurs d'échange.

1. On considère le processus  $q_t = \bar{\alpha} a_t^+ + \alpha a_t + \lambda a_t^0$ , le noyau de  $q_t$  est égal à :

$$(1) \quad \tilde{q}(t, z, z') = \left[ \bar{\alpha} \int_0^t z(s) ds + \alpha \int_0^t z'(s) ds + \lambda \int_0^t z(s) z'(s) ds \right] e^{z \cdot z'}$$

et pour simplifier on prend  $\alpha = 1$ .

Soit maintenant  $(M_t)$  une martingale solution de l'équation de structure suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} d[M, M]_t = \lambda dM_t + dt . \\ M_0 = 0 . \end{cases}$$

Il est bien connu qu'une telle martingale est un processus de Poisson compensé d'intensité 1 et de longueur de saut égale à  $\lambda$ , voir par exemple M.Emery [EM.M.89]. L'isométrie de P.A.Meyer, [ME.P.A. 76] définie par les intégrales stochastiques multiples par rapport à  $(M_t)$  donne une isométrie surjective  $I$  de  $Fock(H)$  dans  $L^2(\Omega, \sigma(M_t, t \in T))$ .

Pour tout  $z$  élément de  $U$ ,  $I(e^z)$  est la valeur terminale de la martingale exponentielle  $\varepsilon(z)_t$ , c'est-à-dire

$$(3) \quad \varepsilon(z)(t) = 1 + \int_0^t z(s) \varepsilon(z)(s-) dM_s = I(e^{z_t}) .$$

Soit maintenant  $Y_t$  l'opérateur linéaire de  $Fock(H)$  associé à  $M_t$  par l'isométrie  $I$ , c'est-à-dire

$$(4) \quad Y_t = I^{-1} M_t I$$

où

$M_t$  est vu comme opérateur de multiplication dans  $L^2(\Omega, \sigma(M_t, t \in T))$ .

Le noyau de  $Y_t$  est donné par :

$$\tilde{Y}(t, z, z') = (Y_t e^{z'}, e^z) = E [ M_t I(e^{z'_t}) I(e^{z_t}) ] e^{\int_t^1 z(s) z'(s) ds} .$$

Nous posons  $J(t) = E [ M_t I(e^{z'_t}) I(e^{z_t}) ]$ , alors en appliquant la formule de Itô pour le produit des trois martingales  $M_t I(e^{z'_t}) I(e^{z_t})$  et en utilisant (2) et (3) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dJ(t)}{dt} = z(t) z'(t) J(t) + [z(t) + z'(t) + \lambda z(t) z'(t)] e^{z_t \cdot z'_t} \\ J(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction  $J(t)$  est la solution de cette équation linéaire avec second membre, qui est donc égale à :

$$J(t) = \int_0^t z(s) + z'(s) + \lambda z(s) z'(s) ds e^{z_t \cdot z'_t} .$$

Finalement  $\tilde{Y}(t, z, z') = \int_0^t z(s) + z'(s) + \lambda z(s) z'(s) ds e^{z \cdot z'}$ , d'où  $X_t = Y_t$ .

## 2. Formes explicites des opérateurs $a_j^i(t)$ .

D'après la formule (3) du paragraphe I.3, le noyau de  $a_j^i(t)$  est égal à :

$$\tilde{a}_j^i(t, z, z') = (a_j^i(t) e^{z'}, e^z) = [(z_i)_t \cdot (z'_j)_t] e^{z \cdot z'} .$$



On obtient en identifiant les deux derniers termes le résultat suivant :

(1) PROPOSITION. - Pour tout  $z = (z_1, z_2) \in U^2$  et pour tout couple d'entiers  $(m, n)$  on a :

$$a_1^2(t) [z_1^m \otimes z_2^n] = m z_1^{m-1} \otimes a^+((z_1)_t) z_2^n$$

$$a_2^1(t) [z_1^m \otimes z_2^n] = n a^+((z_2)_t) z_1^m \otimes z_2^{n-1} .$$

2.1. Prolongement par continuité des opérateurs d'échange à la somme algébrique

$$\mathcal{F} = \sum_{m, n} S_m(H) \otimes S_n(H) .$$

Une conséquence de la proposition (1) est le résultat suivant :

$\forall (z_1, z_2) \in U^2$  ,  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$  ,  $\forall t \in T$  , on a :

$$(1) \quad \| a_1^2(t) z_1^m \otimes z_2^n \| \leq \sqrt{n+1} \| z_1^m \otimes z_2^n \|$$

$$\| a_2^1(t) z_1^m \otimes z_2^n \| \leq \sqrt{m+1} \| z_1^m \otimes z_2^n \| .$$

Il en résulte que  $a_j^i(t)$  se prolonge par continuité à  $S_m(H) \otimes S_n(H)$  , plus précisément si on pose :

$$\underline{s} = (s_1, \dots, s_{m-1}) \in T^{m-1} , \quad \underline{t} = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in T^{n+1} \text{ et}$$

$$\underline{t}^{k+1} = (t_1, \dots, t_k, t_{k+2}, \dots, t_{n+1}) \in T^n ,$$

alors on a :  $\forall f_{m, n} \in S_m(H) \otimes S_n(H)$  ,

$$(2) \quad [a_1^2(t) f_{m, n}] (\underline{s}, \underline{t}) = \frac{m}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n f_{m, n} (\underline{s}, t_{k+1}, \underline{t}^{k+1}) 1_{(o, t)} (t_{k+1}) .$$

De même si on pose :

$$\underline{v} = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in T^{n-1} , \quad \underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{m+1}) \in T^{m+1}$$

$$\underline{u}^{k+1} = (u_1, \dots, u_k, u_{k+2}, \dots, u_{m+1}) \in T^m ,$$

alors on a

$$(3) \quad [a_2^1(t) f_{m, n}] (\underline{u}, \underline{v}) = \frac{n}{m+1} \sum_{k=0}^m f_{m, n} (\underline{u}^{k+1}, u_{k+1}, \underline{v}) 1_{[o, t]} (u_{k+1}) .$$

Nous remarquons que si  $a_j^i(t)^*$  désigne l'adjoint formel de  $a_j^i(t)$  , alors on a pour  $i \neq j$  ,  $(a_j^i(t))^* = a_i^j(t)$  .

(4) Remarques. a/ Pour chaque couple d'entiers  $(i, j)$  appartenant à  $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$  , on définit l'opérateur linéaire  $\tau_j^i$  de Fock  $(H \times H)$  par :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall f_{m,n} \in S_m(H) \otimes S_n(H),$$

$$\tau_1^2(f_{m,n})(\underline{t}, \underline{s}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f_{m,n}(\underline{t}, s_{k+1}, \underline{s}^{k+1})$$

$$\text{où} \\ \underline{t} \in T^{m-1}, \quad \underline{s} \in T^{n+1}$$

respectivement

$$\tau_2^1(f_{m,n})(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m f_{m,n}(u^{k+1}, u_{k+1}, \underline{v})$$

$$\text{où} \\ \underline{u} \in T^{m+1}, \quad \underline{v} \in T^{n-1}.$$

Ainsi il est clair que  $\tau_1^2$  (resp.  $\tau_2^1$ ) envoie  $S_m(H) \otimes S_n(H)$  dans  $S_{m-1}(H) \otimes S_n(H)$  (resp. dans  $S_{m+1}(H) \otimes S_{n-1}(H)$ ), en plus on a les relations suivantes :

$$a_2^1(t) = \tau_2^1[I \otimes a_t^0], \quad a_1^2 = \tau_1^2[a_t^0 \otimes I].$$

Ces formules explicites nous permettent par exemple de calculer les commutateurs  $[a_j^i(t_1), a_\ell^k(t_2)]$ , des opérateurs  $a_j^i(t_1)$  et  $a_\ell^k(t_2)$ . Ils sont donnés par  $\forall (i,j) \in \{0,1,2\}^2, \forall (k,\ell) \in \{0,1,2\}^2$  :

$$[a_j^i(t_1), a_\ell^k(t_2)] = \delta_j^k a_\ell^i(t_1 \wedge t_2) - \delta_i^\ell a_j^k(t_1 \wedge t_2)$$

où

$$a_0^0(t) = t, \quad \delta_j^k = \delta_j^k \text{ si } (j,k) \neq (0,0) \text{ et } \delta_0^0 = 0.$$

Les symboles  $\delta_j^k$  sont appelés symboles d'Evans par P.A.MEYER.

b/ Les résultats de cette partie s'étendent sans difficulté aux opérateurs d'échange de l'espace de Fock multiple  $\text{Fock}(\bigoplus_{j=1}^d H)$  pour  $d$  quelconque.

R E F E R E N C E S

- [BE.F.A 66] BEREZIN F.A. . - The method of second quantization. Academic Press, 1966.
- [DE.A. 189] DERMOUNE A. . - Quelques interactions entre le calcul stochastique et les probabilités non commutatives, Manuscrit 1989.
- [EM.M. 89] EMERY M. - On the Azema martingale , à paraître.
- [KR.P., RA. R. 78] KRÉE P. , RACZKA R. - Kernel and symbol in quantum field theory.  
Ann. Inst. H.Poincaré, section A, vol. 28, n° 1, pp. 41-73,  
1978.
- [KR.P. 88] KRÉE P. - Dim. Free stochastic calculus in the distribution sens, à paraître.
- [ME.P.A. 76] MEYER P.A. - I.s.m. par rapport à certaines martingales. Séminaire de probabilité, X, pp. 325-331.
- [ME.P.A. 86] MEYER P.A. - Eléments de probabilités quantiques. Séminaire de probabilité, XX.
- [ME.P.A. 89] MEYER P.A. - Probabilités non commutatives sur l'espace de Fock, à paraître, 1989.