ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

LOTFI FARHANE

Espacements multivariés généralisés et recouvrements aléatoires

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 96, série *Probabilités et applications*, n° 9 (1991), p. 15-31
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1991__96_9_15_0>

ESPACEMENTS MULTIVARIES GENERALISES

ET RECOUVREMENTS ALEATOIRES

LOTFI FARHANE

Résumé :

Soit x_1, x_2,... une suite de variables aléatoires i.i.d sur $\mathbb{R}^d$, admettant une densité f continue. Nous étudierons le comportement asymptotique presque sûr de l'espacement maximal Δ_n engendré par $x_1,..., x_n$; nous ramenerons cette étude à un problème de recouvrements aléatoires.

Mots clés :

Espacements. Processus de Poisson. Recouvrement.

English title :

General multivariate spacings and random coverings

Abstract :

Let x_1, x_2,... be an i.i.d sequence of random variables defined on $\mathbb{R}^d$ with a continuous density f. We consider the maximal spacing Δ_n generated by $x_1,..., x_n$; and our main goal is to study the asymptotic almost sure behavior of Δ_n, and this question is related to the study of a convering problem.

Key words :

Spacings. Poisson process. Coverings.

Introduction :

Les problèmes d'espacements ont inspiré plusieurs travaux et les résultats obtenus se limitent en majorité au cas uniforme. En 1984 P.Deheuvels a exploré le cas d'espacements issus de variables aléatoires admettant une fonction de répartition de classe $\mathcal{C}^1$, et a démontré, sous certaines hypothèses, des théorèmes limites pour l'espacement maximal. Nous essayons d'étendre ses résultats au cas multivarié.

Résultats :

Soit K un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $|\partial K| = 0$ et $|K| = 1$ où $|\,.\,|$ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

$x_1, x_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant une densité de probabilité f continue telle qu'il existe $x_0 \in K$ avec $0 < f(x_0) \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in K$.

A un ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$; on appelle espacement maximal d'ordre n qu'on note Δ_n :

$$\Delta_n = \text{Sup}\ \{ r / \ \exists x \in K \text{ avec } x + rA \subset K \setminus \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \}$$

$$\Delta_n \ge r \iff \exists x \in K \ ; \ x + rA \subset K \text{ et } x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \{X_i - rA\}$$

Soit $K_r = \{ x / x + rA \subset K \}$, on a l'équivalence :

$\Delta_n \ge r$ ssi K n'est pas recouvert par $\{X_i - rA\}_{i=1}^{n}$

On voit que l'étude de l'espacement maximal se ramène à un problème de recouvrements aléatoires.

Les résultats sont les suivants :

Théorème 1:

Soit A un ensemble convexe défini sur un espace de probabilité $(\Omega_A, \mathbb{A}_A, \mu)$ tel que l'évènement $x \in A$ soit mesurable pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^d$ et vérifiant :

$E|A| < \infty$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(r(A))^{d+\varepsilon} < \infty$ où $r(A) = \sup_{x \in A} |x|$

Pour $a > 0$, on considère les ensembles $aA + X_i$, $i \ge 1$

$$N_a = \text{Inf}\ \{ n / K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (aA + X_i) \}$$

$$u \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda(a) = \frac{1}{E|aA| f(x_0)} \left(\text{Log} \frac{|K|}{E|aA|} + d \,\text{Log Log} \frac{|K|}{E|aA|} + \text{Log}\, \alpha(A) + u\right)$$

On a que lorsque $a \to 0$

$$\exp - \frac{1}{f(x_0)^d} e^{-u} \le P(Na < \lambda(a)) \le \exp - e^{-u}$$

Théorème 2 :

$$\lim_{n \to \infty} \inf \frac{n\, f(x_0)\, \Delta_n^d - \text{Log}\, n}{\text{Log}\,\text{Log}\, n} \geq d-1 \qquad \text{p.s.}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup \frac{n\, f(x_0)\, \Delta_n^d - \text{Log}\, n}{\text{Log}\,\text{Log}\, n} \leq d+1 \qquad \text{p.s.}$$

Cet article est constitué de deux parties, la première est consacrée à un rappel de concepts géneraux sur les mesures aléatoires et les processus ponctuels, et la seconde aux démonstrations des résultats énoncés précédemment.

1) Mesure aléatoire, processus ponctuel :

Soit S un espace topologique localement compact, séparé et séparable.

θ désigne la σ algèbre engendrée par sa topologie de $\mathfrak{B}$ la classe des ensembles relativement compacts de θ, F est la famille des fonctions $f : S \to [0,+\infty[$ θ mesurables.

On désigne par μ une mesure sur (S,θ) localement finie : $\mu(B) < \infty$; $\forall$ $B \in \mathfrak{B}$.

On note par $\mathfrak{m}$ l'ensemble des mesures localement finies et par $\mathfrak{n}$ l'ensemble des mesures μ localement finies telles que $\mu(B) \in \mathbb{N}$, $B \in \mathfrak{B}$.

M (resp. N) désigne la σ algèbre engendrée par les applications :

$\mu \to \mu(A)$ $A \in \theta$, $\mu \in \mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{n}$).

Définition :

On appelle mesure aléatoire (resp. processus ponctuel) sur S toute application mesurable d'un espace de probabilité (Ω,A,P) vers $(\mathfrak{m},M)$ (resp. $(\mathfrak{n},N)$.

Φ mesure aléatoire , on a que :

$\Phi : \omega \in \Omega \to \Phi_\omega$ une mesure sur S telle que :

$\forall$ $A \in \theta$ $\omega \to \Phi_\omega(A)$ est A mesurable.

On notera par $\Phi(A)$ cette variable aléatoire.

On définit également la distribution d'une mesure aléatoire Φ par la mesure de probabilité $P\Phi^{-1}$ sur $(\mathfrak{m},M)$; $(P\Phi^{-1})(\mathfrak{m}) = P(\Phi^{-1}\mathfrak{m}) = P(\Phi \in \mathfrak{m})$, $\mathfrak{m} \in M$.

L'intensité $E\Phi$ de Φ est la fonction :

$$(E\Phi)B = E(\Phi B) = \int_\Omega \Phi_\omega(B)dP(\omega) \ , \quad B \in \mathcal{B}$$

On définit aussi la transformée de Laplace L_Φ de Φ par :

$$L\Phi(f) = E(e^{-\Phi f}) = \int_\Omega e^{-\Phi_\omega f} dP(\omega) \ , \quad f \in F$$

$$\left(\mu \in \mathfrak{m} , f \in F , \ \mu f \ \text{ est l'intégrale } \int_S f(s)\, \mu(ds) \right)$$

Remarques :

1- L'intensité d'une mesure aléatoire est une mesure :

En effet : $(E\Phi)\varnothing = 0$; $(E\Phi)A \geq 0 \quad \forall A \in \theta$

$A_1,....,A_k,....$ une suite d'ensembles disjoints de θ telle que : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A \in \theta$

On a $\quad (E\Phi) \bigcup_{i=1}^{\infty} A = \sum_{i=1}^{\infty} (E\Phi_i)A$;

En efet si on pose $f_n(\omega) = \Phi_\omega \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$ alors $\quad 0 \leq f_n \leq f$ p.p. où

$f(\omega) = \Phi \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$ et le résultat découle de l'application du théorème de convergence monotone.

2) En posant pour $t > 0$ $K_t(A) = -\mathrm{Log}\, E(e^{-\Phi A t})$ $\qquad A \in \theta$

On obtient encore une mesure sur (S,θ)

3) Si on prend $f = t\,.1_B$ on obtient pour $t \geq 0$, $B \in \mathcal{B}$ $\qquad L_\Phi(f) = E(e^{-\Phi(B)t})$.

4) Pour $B_1,...,B_k \in \mathcal{B}$ et $t_i,...,t_k \in \mathbb{R}^+$

$$L_\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{B_i} \right) = E \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} \Phi B_i t_i \right) = L_{\Phi_1 B,.....,\Phi_k B}(t_1,...,t_k)$$

la transformée de Laplace du vecteur aléatoire $(\Phi B_1,....,\Phi B_k)$.

Définition :

Une mesure aléatoire F est dite complètement aléatoire si pour toute suite finie d'ensembles disjoints $A_1,....,A_k$ les variables aléatoires $\Phi A_1,....,\Phi A_k$ sont indépendantes.

Remarque :

Si $B_1,\dots,B_n,\dots$ est une suite d'ensembles disjoints de B.

On a que : $$\Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B_i)$$

En effet : Comme les variables aléatoires $\Phi(B_n)$ sont indépendantes et positives, et en utilisant la convergence dominée appliquée à la suite de fonctions $f_n(\omega) = 1 - \exp\left(-\Phi_\omega\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) t\right)$, $t > 0$

on a :

$$L_\Phi\left(t\, 1_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}\right) = E\left(\exp\left(-\Phi \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i t\right)\right) = E\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\Phi B_i\, t\right)\right) = \prod_{i=1}^{\infty} E\left(\exp\left(-\Phi B_i\, t\right)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} L_\Phi(t\, 1_{B_i})$$

Processus de Poisson :

Soit $s \in S$ et considérons la mesure de Dirac δ_s : $\delta_s(A) = 1_A(S)$

$$\begin{array}{lll} (S,\theta) & \rightarrow & (\mathcal{m},N) \\ s & \rightarrow & \sigma_s \end{array} \qquad \text{L'application est mesurable}$$

σ_s est un processus ponctuel sur S pour tout élément aléatoire s dans (S,θ) ; son intensité est :

$E\sigma_s = Ps^{-1} = \omega$ et sa transformée de Laplace est : $E\, \exp(-\sigma_s f) = E\, e^{-f(s)} = \omega\, e^{-f}$.

Considérons une suite d'éléments aléatoires de S : $X_1,\dots,X_N$ indépendants de même

distribution ω et N une variable de Poisson de moyenne $a \geq 0$ et soit Φ un processus ponctuel de même distribution que $\delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_N}$.

$A \in S$, on a la variable aléatoire : $\Phi(A) = \delta_{X_1}+\dots+\delta_{X_N}$.

Φ a pour intensité $[E(N)]\ \omega = a\omega$ et pour transformée de Laplace $E\, e^{-\Phi f} = E(\omega\, e^{-f})^N = \psi(\omega\, e^{-f})$ où

ψ est la fonction génératrice d'une variable de Poisson de moyenne a :

$$\psi(s) = e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n s^n}{n!} = e^{-a(1-s)} \qquad s \in [0,1]$$

en posant $\lambda = a\omega$, $E\, e^{-\Phi f} = e^{-a(1-\omega\, e^{-f})} = e^{-\lambda(1-e^{-f})}$.

Comme $\omega(S) = 1$ on a : $E\, e^{-\Phi f} = e^{-a(1-\omega\, e^{-f})} = e^{-\lambda(1-e^{-f})}$.

Un processus ponctuel ayant une transformée de Laplace de cette forme est un processus de Poisson d'intensité λ.

Construction d'un processus de Poisson :

$(S,\theta,\mu) \quad \mu \in \mathfrak{m}$

Cas 1 :

$\mu(s) = a < \infty$

$X_1,....,X_N$ sont des variables aléatoires indépendantes de même distribution donnée par la mesure $a^{-1}\,\mu$ et N une variable aléatoire de Poisson de paramètre a et indépendante des X_i

$A \in \theta$; $\Phi(A) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i} A$, on a alors :

$\Phi(\emptyset) = 0$ et

$$P(\Phi(A) = p) = P\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i} A = p\right) = \frac{\mu(A)^p}{p!} e^{-\mu(A)}$$

$$t \in \mathbb{R}^+,\ L_\Phi(t\,1_A) = E\exp(-t\Phi(A)) = E\exp\left(-t\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_i} A\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp - t.k\ P\left(\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_i} A = k\right)$$

$$= \exp \mu(A)(e^{-t} - 1) = \exp \mu(e^{-t1_A} - 1).$$

On a également :

Si $A_1,...,A_k$ sont disjoints et $t_1,...,t_k \in \mathbb{R}^+$ alors

$$L_{\Phi(A_1),...,\Phi(A_k)}(t_1,...,t_k) = L_\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{A_i}\right) = \exp\left\{\mu\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{A_i}\right)-1\right)\right\}$$ or comme ,

$$\mu\left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{A_i}\right)-1\right) = \int_S \left(\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{A_i}(s)\right)-1\right) d\mu(s) =$$

$$\int_S \sum_{i=1}^{k} 1_{A_i}(s)(e^{-t_i}-1)\,d\mu(s) = \sum_{i=1}^{k}\int_S 1_{A_i}(s)(e^{-t_i}-1)d\mu(s) = \sum_{i=1}^{k}\mu(e^{-t_i 1_{A_i}}-1)$$ alors :

$$L_\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i 1_{A_i}\right) = \exp\sum_{i=1}^{k}\mu(e^{-t_i 1_{A_i}}-1) = \prod_{i=1}^{k}\exp\mu(e^{-t_i 1_{A_i}}-1) = \prod_{i=1}^{k} L_\Phi(t_i 1_{A_i}) =$$

$\prod_{i=1}^{k} L_{\Phi(A_i)}(t_i)$ d'où $\Phi(A_1),..., \Phi(A_k)$ sont indépendants.

Cas 2

$\mu(S) = \infty$

$S = U_i\ S_i$ et les ensembles S_i sont disjoints, bornés et considérons les mesures : $\mu_i = \mu S_i$ restrictions de la mesure μ aux ensembles S_i : $\mu S_i(A) = \mu\ (A \cap S_i)$.

Il existe alors sur S_i un processus de poisson d'intensité μ_i et on considèree le processus $\Phi = \sum_i \Phi_i$ où les Φ_i sont indépendants.

Remarque :

1) Si f est une fonction mesurable positive définie sur $\theta^n \times n$ pour tout processus de Poisson Φ d'intensité μ on peut écrire la somme $\sum$ { $f(\varphi_1,....,\varphi_n , \Phi)$; $\varphi_1,....,\varphi_n$ des éléments distincts de Φ } qu'on note $\sum_\Phi{}' f(\varphi_1,...,\varphi_n ; \Phi)$ et son espérance est donnée par la formule :

$$E \sum_\Phi{}' f(\varphi_1,....,\varphi_n ; \Phi) = \int ....\int E\, f(\omega_1,....,\omega_n ; \Phi \cup \{\omega_i\}_1^n)\, d\mu\ (\omega_1)....d\mu\ (\omega_n).$$

2) Une fonction f d'un processus de Poisson à valeurs réelles est croissante si $f(\Phi) \geq f(\Phi')$ pour chaque deux réalisations Φ et Φ' telle que $\Phi - \Phi'$ est une mesure positive.

3) Si f et g sont deux fonctions positives, mesurables et croissantes d'un processus de Poisson Φ alors $E(f(\Phi)\, g(\Phi)) \geq Ef(\Phi)\, Eg(\Phi)$ en particulier si E_1 et E_2 sont deux évènements croissants alors on a : $P(E_1 \text{ et } E_2) \geq P(E_1)\, P(E_2)$.

Conclusion :

Un processus de Poisson Φ est un processus ponctuel qui est égal à $\sum \delta_{X_i}$ pour une suite $X_1,...,X_i,....$ d'éléments aléatoires de S ; par suite on peut identifier Φ avec l'ensemble $\{X_i\}$ et un processus de Poisson peut être considéré comme un sous ensemble dénombrable aléatoire de S et on écrira $\Phi U\{\alpha\}$ pour désigner $\Phi + \delta_\alpha$. Plus généralement si μ est une mesure σ finie sur un espace mesurable (S,θ) alors il existe un unique processus de Poisson Φ d'intensité μ à savoir :

* Si $A \in \theta$, $\Phi(A)$ a une distribution de Poisson de moyenne $\mu(A)$ si $\mu(A) < \infty$ et $\Phi(A) = \infty$ p.s. si $\mu(A) = \infty$.

* * Si $A_1,....,A_n$ sont disjoints alors les variables $\Phi(A_1),...,\Phi(A_n)$ sont indépendantes.

II. Preuve du théorème 1 :

Le théorème est équivalent à :

$$\exp - \frac{1}{f(x_0)^d} e^{-u} \leq P(\lambda(a) \text{ ensembles recouvrent } K) \leq \exp -e^{-u}$$

On remplace le nombre fixe d'ensembles de recouvrement par un nombre aléatoire M avec

$M \sim$ Poisson $(\lambda(a))$.

Soit $\theta_{\lambda,a}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda\mu_a .f(x)dx$ dans $\Omega_A \times \mathbb{R}^d$.

$\theta_{\lambda,a}$ consiste en M éléments indépendants (A_i^a , X_i) ayant chacun la distribution $\mu_a.f(x)\, dx$, on note par abus :

$\theta_{\lambda,a} = \{ A^a + x \,/\, (A^a,x) \in \theta_{\lambda,a} \}$ une famille de M ensembles de recouvrement.

Le nombre d'ensembles qui rencontrent K a une distribution de Poisson de moyenne

$$m = \int_{\Omega_A} \int_{\mathbb{R}^d} I((A^a + x) \cap K \neq \emptyset)\ \lambda\mu_a.f(x)dx$$

$\lambda\, f(x_0)E\,| K- aA\,| \leq m \leq \lambda E\,|K - aA\,|$

On rappelle les définitions introduites dans [4]:

ω désigne la mesure de Hausdorff en dimension (d-1)

A est un ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^d$; $A_1,...,A_d$ de même distribution que A.

$D_v^\delta (x) = \{ y \,/\, |y-x| < \delta$ et $(v \,|\, y - x) < 0 \}$.

* u vecteur unitaire est normal à A en x si $x \in \partial A$ et $A \subset \{ y \,/\, (y-x \,|\, u) \leq 0 \}$.

* $v \neq 0$ est un vecteur spécial pour $A_1,...,A_n$ en x si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \partial A_i$ et s'il existe $\delta > 0$ tel que

$D_v^\delta (x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

* $v \neq 0$ est un vecteur admissible si pour $0 < \lambda < \infty$; $a = 1, \theta = \theta_{\lambda,a}$ on a :

1) $k = 1 ;...; d-1$
$P(\exists B_1,...,B_k \in \theta$ et x/v est spécial pour $\{B_i\}_{i=1}^k$ en x) = 0

2- $P(\exists B_1,...,B_d \in \theta$ et x,x' distincts /v est spécial pour $\{B_i\}_{i=1}^d$ en x et x') = 0

3- $P(\exists \{B_i\}_{i=1}^d$ et $\{B'_i\}_{i=1}^d$; $\{B_i\} \neq \{B'_i\}$ et x,x' avec $(v \,|\, x-x') = 0$ /v est spécial pour $\{B_i\}_{i=1}^d$ en x et pour $\{B'_i\}_{i=1}^d$ en x') = 0

On désigne par $\tilde{\omega}$ la mesure $|\,\text{Dét}(u_i(y_i))_{i=1}^d\,|\; d\omega(y_1)......d\omega(y_d)$ sur ∂A_1 x...x ∂A_d avec $u_i(y_i)$ normal a A_i en y_i.

$C(u_1^k)$ désigne le cône fermé engendré par $u_1,...,u_k$ et $C^0(u_1^k)$ son intérieur.

$\theta' = \{ B \,/\, B \in \theta$ et $0 \notin B \}$, le processus de Poisson de tous les ensembles ne contenant pas 0.

$D_v^\delta = D_v^\delta(0)$ on définit alors :

$$\beta_+(A_1,...,A_d\,;v\,;\lambda\,;\delta) = \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} \left[P(\theta \text{ recouvre } D_v^\delta)\right]^{-1} I(v \in C(u_1^d(y_1^d)))\, d\tilde{\omega}$$

$$\beta_-(A_1,...,A_d\,;v\,;\lambda\,;\delta) = \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} I(c \in C^0(u_1^d(y_1^d)))P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } D_v^\delta)d\tilde{\omega}$$

Si $A_1^0 \neq \emptyset;...;A_d^0 \neq \emptyset$ et $\beta_+ = \beta_- = 0$ s'il existe $i/1 \leq i \leq d$ et $A_i^0 = \emptyset$

$$\alpha_+(A\,;v\,;\lambda\,;\delta) = \frac{1}{d!}(E\,|A|)^{1-d}E\beta_+$$

$$\alpha_-(A\,;v\,;\lambda\,;\delta) = \frac{1}{d!}(E\,|A|)^{1-d}E\beta_-$$

$$\gamma(\lambda, A) = \lambda^d(E\,|A|)^{d-1}e^{-\lambda f(x_0)E\,|A|}$$

Lemme 1 :

Pour $\delta < 1/2$ et $P(2r(A) \geq \delta\;) = 0$

θ un processus de Poisson d'intensité $\lambda\mu.f(x)dx$ sur $\Omega_A \times (\mathbb{R} \times T^{d-1})$

Pour $t \geq 0$; C_t est le cylindre $[0;t[\, \times T^{d-1}$

$C_t = \{ (s,x') \in \mathbb{R} \times T^{d-1} \,/\, 0 \leq s < t \}$

On note $\tau = \tau(\theta) = \text{Inf}\,\{ s \geq 0 \,/\, (s,x') \notin \cup\,\theta \}$; on a alors :

$\exp - \gamma\,\alpha_+ (t+\delta) \leq \exp - \gamma\,\alpha_+ P(\tau \geq 0) \leq P(\tau \geq t) \leq \exp - \gamma\,\alpha_-\, f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)} E\,|A|)\, t.$

Preuve du Lemme 1 :

On a l'équivalence $\tau \geq \tau \Leftrightarrow C_t$ est recouvert par θ.

On remplace A par un ouvert aléatoire A^0 et soit θ^0 le processus de Poisson correspondant, on a : $\cup\,\theta^0 = (\cup\,\theta)^0$

θ^0 recouvre $C_t^0 \Leftrightarrow \theta$ recouvre C_t^0.

Pour $\varepsilon > 0$; $P(C_t^0 \text{ recouvert}) \leq P(C_{t-\varepsilon} \text{ recouvert}) = P(\tau \geq t-\varepsilon)$

$P(C_t^0 \text{ recouvert}) = P(\tau \geq t) = P(C_t \text{ recouvert})$.

T^{d-1} étant compact on a que $\tau = t \Leftrightarrow C_1$ recouvert par θ.

Le point (t,x') n'est pas recouvert, on suppose que $e = (1; 0; ...; 0)$ est admissible et considérons les ensembles $B_1,...,B_k$ de θ tels que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \partial B_i$

Si $t > 0$; e est spécial pour $B_1,..,B_d$ en x, comme il est supposé admissible, alors $k = d$ d'où l'équivalence :

$\tau = t \Leftrightarrow \ni x = (t,x')$ et $B_1,...,B_d \in \theta \ / \ x \in \bigcap_{i=1}^{d} \partial B_i$; e est spécial pour $B_1,...,B_d$ en x et

$x \notin U\theta$ et θ revouvre C_t.

Soit g une fonction mesurable sur $[0,\infty[$ avec $g(0) = 0$, on définit alors :

$$\psi(B_1,..,B_d ;\theta) = \begin{cases} g(t).I(\theta \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta) ; \text{ s'il existe un point } x = (t,x') \in \bigcap_{i=1}^{d} \partial B_i \\ \text{tel que } e \text{ est spécial pour } B_1,...,B_d \text{ en } x \text{ et } t > 0 \\ 0 \quad \text{autrement.} \end{cases}$$

$$d!\, Eg(\tau) = \int ... \int E\psi(A_1+x_1 ;..., A_d+x_d ; \theta \cup \{A+x\}_{i=1}^{d}\, \lambda^d \prod_{i=1}^{d} f(x_i)dx_1...dx_d\, d\mu(A_1)...d\mu(A_d)$$

On définit $\psi(A_1,...,A_d) = \int ... \int E\psi(A_1 + x_1,...,A_d + x_d ; \theta \cup \{A_i + x_i\}_{i=1}^{d} \prod_{i=1}^{d} f(x_i)dx_1....dx_d$.

$Eg(\tau) = \frac{1}{d!} \lambda^d E\psi(A_1;...,A_d)$; $A_i : 1 \leq i \leq d$, indépendants de distribution μ.

$\psi(A_1,...,A_d) = 0$, sauf s'il existe $x \in \mathbb{R} \times T^{d-1}$ et $y_i \in \partial A_i$; $1 \leq i \leq d$ tel que $x = x_i + y_i$.

On effectue pour la suite un changement de variable :

$$\Gamma : (\mathbb{R} \times T^{d-1}) \times \partial A_1 \times ... \times \partial A_d \longrightarrow (R^d)^d$$
$$(x,y_1,.....,y_d) \longrightarrow (x-y_1,....,x-y_d)$$

Cette transformation est lipschitzienne ($\text{Lip}\,\Gamma \leq (2d)^{1/2}$) donc (théorème de Rademacher) presque partout différentiable et dont le jacobien est égal à :

$|\text{Dét}\,(u_i(y_i))_{i=1}^{d}|$ avec $u_i(y_i)$ est normal à A_i en y_i

on a que :

$$\psi(A_1,..,A_d) = \int_0^{\infty}\int_{T^{d-1}}\int_{\partial A_1}..\int_{\partial A_d} E(g(t)P(\theta U\{A_i + x\text{-}y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta))\, I\,(e \text{ spécial}$$

$$\text{pour } \{A_i + x\text{-}y_i\}_{i=1}^{d} \text{ en } x)\prod_{i=1}^{d} f(x\text{-}y_i)dt\, dx'\, d\tilde{\omega}$$

$$\Phi(A_1,...,A_d) = \int_{\partial A_1}...\int_{\partial A_d} P(\theta U\,\{A_i + x\text{-}y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta)\, I(\,e \text{ spécial pour}$$

$$\{\,A_i\text{-}\,y_i\}_{i=1}^{d} \text{ en } 0)\,d\tilde{\omega}$$

$$\psi(A_1,...,A_d) = \int_0^{\infty}\int_{T^{d-1}} g(t)\Phi(x,A_1,...,A_d)\prod_{i=1}^{d} f(x\text{-}y_i)dt\, dx'$$

$\Phi(x,A_1,...,A_d)$ indépendante de x' et on la note $\Phi(t, A_1,...,A_d)$

$$E\,g(\tau) = \frac{1}{d!}\lambda^{d}\int_0^{\infty} g(t)\,E\Phi(t,A_1,...,A_d)\,Z(t)dt \quad \text{où : } Z(t) = \int_{T^{d-1}}\prod_{i=1}^{d} f(x\text{-}y_i)dx'$$

g étant quelconque avec $g(0) = 0$

τ est absolument continue de densité $\varphi(t) = \frac{1}{d!}\lambda^{d}\, E\Phi(t,A_1,...,A_d)\,Z(t)$

Pour la suite on va estimer Φ

$x = (t,x')$; $A_1,..., A_d$; $y_1,...,y_d$ tels que e est spécial pour $\{A_i + x_i\}_{i=1}^{d}$ en 0

$\theta'_x = \theta \setminus \{\, b \,/\, x \in B\,\}$ on enlève de θ les ensembles recouvrant x.

Distribution de θ'_x = Distribution de θ sachant que $x \notin U\theta$.

Le nombre d'ensembles $B \in \theta$ avec $x \in B$ a une distribution de Poisson de moyenne :

$$m' = \int I\,(\,x \in A+y)\,\lambda f(y)\,d\mu(A)\,dy.$$

$P(x \in U\,\theta) = e^{-m}$ avec $\lambda f(x_0)\,E\,|\,A\,| \le m' \le \lambda E\,|\,A\,|$

on a également $E\,|\,A\,|\left(-f(x_0) - \dfrac{e^{f(x_0)}}{\lambda}\right) \le -\,E\,|\,A\,|$ d'où :

$$e^{-\lambda f(x_0)\,E\,|A|}\exp\left(-e^{f(x_0)\,E\,|A|}\right) \le P\,(x \notin U\,\theta) \le e^{-\lambda f(x_0)\,E\,|A|}$$

$P(\theta \, U\{A_i+x-y_i\}$recouvre C_t et $x \notin U\theta) = P(\theta \, U\{A_i+x-y_i\}$ recouvre $C_t / x \notin U\theta)P(x \notin U\theta) =$

$P(\theta'_x \, U\{A_i+x-y_i\}$ recouvre $C_t)$ $P(x \notin U\theta)$

$D = D^\delta_\theta(x)$ et $D^\delta_\theta = D^\delta_\theta(0)$ $\qquad E = C_t \backslash D$ et $\theta^* = \theta_x' \cup \{A_i + x - y_i\}$

$P(\theta^*$recouvre $C_t) \geq P(\theta^*$recouvre $E \, U \, D) \geq P(\theta^*$recouvre $E)$ $P(\theta^*$recouvre $D)$.

Comme aucun ensemble A_i+x-y_i et aucun ensemble $B \in \theta$ avec $B \in \theta$ ne rencontre E ; on a que :

$(\theta^*$recouvre $E) \Leftrightarrow (\theta'_x$ recouvre $E) \Leftrightarrow (\theta^*$recouvre $E)$ d'où

$P(\theta^*$recouvre $C_t) \geq P(\theta$ recouvre $E)$ $P(\theta^*$recouvre $D) \geq P(\theta$ recouvre $C_t)$ $P(\theta^*$recouvre $D)$
de même :

$P(\theta$ recouvre $C_t) \geq P(\theta$ recouvre $E)$ $P(\theta$ recouvre $D) = P(\theta^*$recouvre $E)$ $P(\theta$ recouvre $D) \geq$

$P(\theta^*$recouvre $C_t) \geq P(\theta$ recouvre $D)$

$P(\tau \geq t)$ $P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^d$ recouvre $D^\delta_\theta) \leq P(\theta^*$ recouvre $C_t) \leq P(\tau \geq t)$ $P(\theta$ recouvre $D^\delta_\theta)$.

$$\Phi(x,A_1,\dots,A_d) = \int_{\partial A_1} \dots \int_{\partial A_d} P(\theta \cup \{A_i + x - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta)\, I(e \text{ spécial}$$

$$\text{pour } (A_i - y_i)_{i=1}^d \text{ en } 0)d\tilde{\omega}.$$

Comme on a l'équivalence :
e est spécial pour $(A_i - y_i)$ en $0 \Leftrightarrow e \in C(u_1^d(y_1^d))$; alors :

$$\Phi(x,A_1,\dots,A_d) = \int_{\partial A_1} \dots \int_{\partial A_d} P(\theta'_x \cup \{A_i + x - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } C_t)\, P(x \notin U\theta)$$

$$I(e \in \text{Cone } (u_1^d(y_1^d)))d\tilde{\omega}$$

$$= \int_{\partial A_1} \dots\dots \int_{\partial A_d} P(\theta \cup \{A_i + x - y_i\}_{i=1}^d \text{ recouvre } C_t \text{ et } x \notin U\theta.$$

$$I(e \text{ spécial pour } (A_i - y_i)_{i=1}^d \text{ en } 0)\, d\tilde{\omega}.$$

Comme on a l'équivalence :
e est spécial pour $(A_i - y_i)_{i=1}^{d}$ en $0 \Leftrightarrow e \in C(u_1^d(y_1^d))$; alors

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) = \int_{\partial A_1} .... \int_{\partial A_d} P(\theta' \cup \{A_i + x - y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } C_t).$$
$$I(e \in C(u_1^d(y_1^d))\, d\tilde{\omega}$$
$$= \int_{\partial A_1} .... \int_{\partial A_d} P(\theta^* \text{ recouvre } C_t)\, P(x \notin U\theta).$$
$$I(e \in C(u_1^d(y_1^d))\, d\tilde{\omega}$$

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) \geq \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} P(\tau \geq t)\, [\, P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } D_e^{\delta})\,]^{-1}.$$
$$e^{-\lambda f(x_0) E|A|}\, I(e \in C(u_1^d(y_1^d)))\, d\tilde{\omega}$$
$$\leq e^{-\lambda f(x_0) E|A|} \beta_+(A_1,...,A_d, e)\, P(t \geq t)$$

$$\Phi(x,A_1,...,A_d) \geq \int_{\partial A_1} ... \int_{\partial A_d} P(\tau \geq t)\; P(\theta' \cup \{A_i - y_i\}_{i=1}^{d} \text{ recouvre } D_e^{\delta}).$$
$$e^{-\lambda f(x_0) E|A|} \exp(-e^{f(x_0)} E|A|).$$
$$I(e \in C(u_1^d(y_1^d)))\, d\tilde{\omega}$$
$$\geq e^{-\lambda f(x_0) E|A|} \exp(-e^{f(x_0)} E|A|)\;\; \beta_-(A_1,...., A_d, e).\, P(\tau \geq t).$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{d!} \lambda^d\, E\, \Phi(t,A_1,...,A_d)\, Z(t)$$

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{d!} \lambda^d\, e^{-\lambda f(x_0) E|A|}\, P(\tau \geq t)\, E\, \beta_+(A_1,...,A_d, e) \;\leq\; \alpha_+(A,e,\lambda,\delta)\, \gamma(A,\lambda)\, P(\tau \geq t)$$

$$\varphi(t) \geq \frac{1}{d!} \lambda^d\, f(x_0)^d\, e^{-\lambda f(x_0) E|A|} \exp(-e^{-f(x_0)} E|A|)\, P(\tau \geq t)\, E\, \beta_-(A_1,...,A_d, e)$$
$$\geq f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)} E|A|)\, \alpha_-(A,e,\lambda,\delta)\, \gamma(A,\lambda)\, P(\tau \geq t).$$

Le lemme se trouve démontré en notant que pour $t > 0$ les fonctions $h_1(t) = P(\tau \geq t) \exp\,[f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)} E|A|)\gamma\, \alpha_- t]$ et $h_2(t) = P(\tau \geq t)\, e^{\gamma \alpha_+ t}$ sont respectivement décroissante et croissante et aussi que les ensembles $[0,\varepsilon[\, \times T^{d-1}$ et $[\, s+\varepsilon, s+2\varepsilon\, [\, \times T^{d-1}$ sont recouverts indépendamment avec la même probabilité $P(t \geq \varepsilon)$ on fera tendre ensuite ε vers 0.

Lemme 2:

Si e est admissible, $2r(A) < s$ et Q est un cube de $\mathbb{R}^d$ de côté s ; $s > \delta$ alors :

$$\exp -\gamma\,\alpha_+(s+\delta)^d \leq P(\theta \text{ recouvre } Q) \leq \exp -\gamma\,\alpha_-\ f(x_0)^d \exp(-e^{f(x_0)}\ E|A|\ s^d$$

Preuve du lemme 2 :

Les transformations : $s \to as$; $\delta \to a\delta$; $A \to aA$ conservent :

$P(\theta$ recouvre $Q)$; α_+ ; α_- et transforment λ en $a^{-d}\lambda$ et γ en $\gamma(a^{-d}\lambda, aA) = a^{-d}\gamma(\lambda, A)$, donc il suffit de prouver le lemme pour un s particulier on prendra $s = 1/2$.

C_1 est décomposé en 2^d cubes de côté 1/2, chacun est recouvert (par le processus θ sur $\mathbb{R} \times T^{d-1}$) avec la même probabilité que Q.

$P(\tau \geq t) = P(C_1$ recouvert $) \geq P(Q$ recouvert $)^{2^d}$

Ensuite on prendra $s + \delta = 1$.

Comme $Q \subset C_{1-\delta}$ alors :

$P(Q)$ recouvert $) \geq P(C_{1-\delta}$ recouvert $) = P(\tau = 1 - \delta) \geq \exp -\gamma\alpha_+$.

Lemme 3 :

K borné de $\mathbb{R}^d$; $n_1,\ldots,n_d$ des entiers ; $\mathfrak{F}_s$ est l'ensemble des cubes $\{\ x\ /\ n_i\, s \leq x \leq (n_i+1)\ ;\ s\ \ i = 1,\ldots,d\ \}$.

$n_s = \#\{\ Q \in \mathfrak{F}_s\ ; Q \subset K\ \}$ et $m_s = \#\{\ Q \in \mathfrak{F}_s\ ; Q \cap \partial K \neq \emptyset\ \}$.

On a :

$$\exp -\gamma\alpha_+(\,n_s + m_s\,)(s+\delta)^d \leq P(\theta \text{ recouvre } K\,) \leq \exp -\gamma\,\alpha\, f(x_0)^d\, n_s(s-\delta)^d\ \exp -e\ \ f(x_0)\ \ E\,|\,A\,|$$

Preuve du Lemme 3:

Soit Q_i le cube de même centre que Q_i et de côté $s-\delta$.

Les événements $\{\ \theta$ recouvre tout $Q_i\ \}$ sont indépendants .

$$P(\theta \text{ recouvre } K\,) \leq P(\,\theta \text{ recouvre tout } Q_i\,) = \prod_{i=1}^{n_s} P(\theta \text{ recouvre } Q_i\,) \leq$$

$$\exp -\gamma\,\alpha - f(x_0)^d\, n_s(s-\delta)^d\ \exp - e^{f(x_0)}\ E|A|$$

d'autre part $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_s+m_s}$

$$P(\theta \text{ recouvre tout } K) \geq P(\theta \text{ recouvre tout } Q_i \ , \ 1 \leq i \leq n_s + m_s)$$

$$\geq \prod_{i=1}^{n_s+m_s} P(\theta \text{ recouvre } Q)$$

$$\geq \exp - \gamma\alpha_+(n_s + m_s)(s + \delta)^d$$

La preuve du théorème 1 est achevée par le fait que :

$$\gamma(aA,\lambda) \longrightarrow \frac{1}{f(x_0)} \frac{1}{|K|} \frac{1}{\alpha} e^{-u} \; [a \longrightarrow 0]$$

$$\bigcup_{i=1}^{n_s} Q_i \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{n_s+m_s} Q_i \quad \text{d'où} \quad n_s s^d \leq |K| \leq (n_s + m_s) s^d$$

aussi on a que $\bigcup_{i=n_s+1}^{n_s+m_s} Q_i \subset \{ x \setminus d(x,\partial K) \leq \sqrt{d} \; s \}$ d'où

$m_s s^d \leq |\{ x / d(x,\partial K) \leq \sqrt{d} \; s \}| \longrightarrow |\partial K| = 0 \; (s \longrightarrow 0)$ par conséquent

$m_s s^d \longrightarrow 0$ et $n_s s^d \longrightarrow |K|$

$m_s (s - \delta)^d \longrightarrow |K|$ et $(n_s + m_s)(s - \delta)^d \longrightarrow |K|$ lorsque $s \longrightarrow 0$

Preuve du théorème 2:

$\Delta_n < r$ ssi K_r est recouvert par $\{ X_i - rA \}_{i=1}^n$.

On remplace le nombre fixe n de variables X_i pour un nombre aléatoire N_t où N_t est un processus de Poisson d'intensité 1 indépendant de $X_1, X_2, ...$

$N_t \sim$ Poisson (t) ; $\{ X_i \}_{i=1}^{N_t}$ est un processus de Poisson d'intensité $t.f(x_0)$.

On note $\Delta_t = \Delta_{N_t}$ et $V_t = V_{N_t} = (\Delta_t)^d$.

Comme $\frac{N_t}{t} \rightarrow 1$ p.s. et $\left(\frac{N_t}{t} - 1\right) \text{Log } t \rightarrow 0$ p.s. le théorème 2 est équivalent à :

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{tf(x_0) V_t - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \geq d\text{-}1 \quad \text{p.s.}$$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{tf(x_0) V_t - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \leq d\text{+}1 \quad \text{p.s.}$$

D'après le théorème 1

$$\gamma(aA,\lambda) = \lambda^d (E\,|aA|)^{d-1} e^{-\lambda f(x_0) E|aA|}$$

$$\gamma(r,t) = t^d (r^d)^{d-1} e^{-tf(x_0)r^d} = t \times (tr^d)^{d-1} e^{-f(x_0)tr^d}$$

On pose $w = tr^d$ d'où $\gamma(r,t) = tw^{d-1} e^{-f(x_0)\,w}$

$\Delta_t < r \Leftrightarrow \Delta_t^d < r^d \Leftrightarrow tV(t) < w$ or on a

$$\exp - \gamma\alpha_+ \leq P(\Delta_t < r) \leq \exp - \gamma\alpha_- f(x_0)^d \exp - e^{-f(x_0)r^d} \quad \alpha_+(tr^d), \alpha_-(tr^d) \rightarrow \alpha$$

Pour $t_\kappa = \exp(k)^{1/2}$ on pose $w_k = \dfrac{\text{Log } t_k + c \text{ Log Log } t_k}{f(x_0)}$ avec $c < d\text{-}1$ quelconque fixé

$\gamma_k = t_k\, w_k^{d-1}\, e^{-W_k f(x_0)} \sim f(x_0)\,(\text{Log } t_k)^{d-1-c} \quad k \to \infty$

$P(t_k V(t_k) < w_k) \le \exp -\gamma_k \alpha_- f(x_0)^d \ \exp - e^{f(x_0)} \dfrac{w_k}{t_k} = 0 \ (\exp - \dfrac{\gamma_k}{2} \alpha_- \ f(x_0)^d)$

D'après le lemme de Borel Cantelli :

$P(t_k v(t_k) < w_k \text{ i.0.}) = 0.$

Supposons $t_k v(t_k) \ge w_k$.

$t_{k-1} \le t \le t_k$; et pour t et k suffisamment grands

$tf(x_0) V(t) - \text{Log } t \ge t_{k-1} f(x_0) V(t_k) - \text{Log } t_k \ge \dfrac{t_{k-1}}{t_k} w f(x_0) - \text{Log } t_k \ \ge$

$$\left(1 - \frac{1}{2(k)^{1/2}}\right)(\text{Log } t_k + c \text{ Log Log } t_k) - \text{Log } t_k \ \ge \ c \text{ Log Log } t - \frac{1}{2} - c \frac{\text{Log } (k)^{1/2}}{2\,(k)^{1/2} \text{ Log Log } t}$$

$$\frac{tf(x_0) V(t) - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \ge c - \frac{1}{2 \text{ Log Log } t} - \frac{c \text{ Log } (k)^{1/2}}{2\gamma k \text{ Log Log } t}$$

D'où lim inf $\dfrac{tf(x_0) V(t) - \text{Log } t}{\text{Log Log } t} \ge d\text{-}1$

La seconde partie est démontrée de la même manière :

En choisissant $c > d+1$ fixé

$P(t_k V(t_k)\, w_k) < 1 - \exp(-\gamma_k \alpha_+) < \gamma_k \alpha_+ = \rho \left(\dfrac{1}{f(x_0)^{d-1}} k^{(d-i-e)/2}\right)$

l'où $P(t_k v(t_k) \ge w_k \text{ i.0.}) = 0.$

REFERENCES :

[1] **P.DEHEUVELS** : Strong limit theorems for maximal spacings from a general univariate distribution. Annals of probability. Vol.12-n°4. (1984)

[2] **L.FARHANE** : Lois limites fortes pour le k-ième espacement maximal. C.R.A.S. PARIS t.308 série I. (1989)

[3] **H.FEDERER** : Geometric measure theory. Springer.Berlin. (1969)

[4] **S.JANSON** : Random coverings. Acta Mathematica. (1986)

[5] **O.KALLENBERG**: Random measures. Academic Press. London. (1976)

[6] **E.M.STEIN** : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton. (1970)

L.S.T.A. Univ. Paris VI. Place Jussieu
Tour n°45. 3ème Etage 75006 PARIS.

Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5019 Monastir
TUNISIE.