ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

M. R. JAIBI

Charges stationnaires d'une file d'attente avec blocages

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 90, série *Probabilités et applications*, n° 6 (1987), p. 85-104
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1987__90_6_85_0>

CHARGES STATIONNAIRES D'UNE FILE D'ATTENTE AVEC BLOCAGES

M.R. JAIBI

SUMMARY

We consider a F.C.F.S. queue with the server subject to being blocked. Given the stationary processes of arrivals of customers and of blocking times, we construct a stationary model giving the different loads on the server and we derive relations between the first moments of these quantities and their moments with respect to the Palm measure of the superposition of the arrival processes.

We then define the waiting times and completion service times of the customers. This couple is the unique solution of a system of two equations which verifies a natural condition.

Finally, we introduce a decomposition of the waiting time in steady state using a new service discipline. This decomposition gives the steady state counterpart of the decomposition in law established by J.A. HOOKE in [2] and in the almost sure case by us in [4], when the blocking process is the process of busy periods of an M/GI/1 queue in a preemptive resume priority queue with two classes of customers.

INTRODUCTION

Nous considérons une file d'attente à un serveur et service dans l'ordre des arrivées, sujette à des blocages de service.

Le service d'un client interrompu reprend dès la fin du blocage au point où il a cessé, l'acquis de service étant conservé. Deux blocages consécutifs ne peuvent se superposer, mais les clients peuvent arriver durant un blocage.

Nous construisons un modèle stationnaire en explicitant les différentes charges du système. A cet effet, nous nous donnons deux processus ponctuels simples d'arrivées de clients et d'instants de blocages $N^i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n^i}$ (i=0,1) stationnaires pour un flot $(\theta_t\ ,\ t \in \mathbb{R})$ ainsi que la demande σ du client "0" définie sur $\{T_o^o = 0\} = \hat{\Omega}^o$ et la durée du blocage initié en 0, soit B défini sur $\{T_o^1 = 0\} = \hat{\Omega}^1$ [par hypothèse de stationnarité, la demande de service et la durée du blocage intervenant à l'instant T_n^i (i=0,1) valent respectivement $\sigma \circ \theta_{T_n^o}$ et $B \circ \theta_{T_n^1}$] . L'espace $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_o \cup \hat{\Omega}_1$ sera ainsi l'espace de processus de toutes les arrivées au système : $N = N^o + N^1$ que nous supposerons simple, et $\hat{E}(.)$ l'intégration par rapport à la mesure de Palm $\hat{P}$ du processus N

Les différentes charges stationnaires "Γ_t" à chaque instant sont construites à partir des v.a. $\hat{\Gamma}^o$ qui sont les charges aux instants d'arrivée au système et définies sur $\hat{\Omega}$. Celles-ci sont solution d'équations classiques des files d'attente, soit pour la charge en service $\hat{\Gamma}^o$:

$$\hat{\Gamma}^o \circ \hat{\theta} = (\hat{\Gamma}^o + \sigma - (\tau - \hat{\Gamma}^1 - B)^+)^+$$

Leurs existences et unicités sont assurées dès que $\hat{E}(B+\sigma) < 1$. Nous montrons que

$$P(\Gamma_o^o > 0) = \hat{E}(B+\sigma) - \hat{E}\left(1_{\{\hat{\Gamma}^o=0\}} B \wedge \tau\right)$$

et

$$E(\Gamma_o^o) = \hat{E}((B+\sigma)\hat{\Gamma}^o + \sigma\hat{\Gamma}^1) + \frac{1}{2}\hat{E}(\sigma^2)$$

Nous introduisons ensuite le temps (virtuel sur $\hat{\Omega}_1$) d'attente $\hat{Z}$ et le temps d'achèvement de service $\hat{C}$ du client "0", c'est à dire la durée effective de son service compte tenu du processus des blocages. Nous montrons que ce couple est l'unique solution du système

$$\hat{C} \overset{\text{déf}}{=} \inf\{t \geq 0 : \int_{\hat{Z}}^{\hat{Z}+t} \gamma_s \, ds = \sigma\}$$

$$\hat{Z} \circ \hat{\theta} = (\hat{Z} + \hat{C} + B\, 1_{\{\hat{\Gamma}^o=0\}} - \tau)^+$$

telle que $\hat{P}[\hat{Z}=0] > 0$ et $\hat{Z}$ est la plus petite solution de la deuxième équation lorsque $\hat{C}$ est donné par la première.

Le temps virtuel d'attente Z_t à l'instant t, stationnaire, est alors obtenu à partir du couple $(\hat{Z},\hat{C})$ et son premier moment vérifie

$$E(Z_o) = \hat{E}(\hat{Z}\,\hat{C}) + \frac{1}{2}\hat{E}(\hat{C}^2 + B^2\, 1_{\{\hat{\Gamma}^o=0\}}).$$

Enfin, une décomposition en régime stationnaire de la v.a. Z_t est introduite (cf. le théorème) en considérant une nouvelle discipline de service qui conserve la "charge" Z_t. Cette décomposition retrouve celle en régime transitoire introduite en Loi par J.A. HOOKE dans [2] et que nous avons établie au sens p.s. dans [4], sous les hypothèses d'indépendance des v.a. qui définissent le système et lorsque le processus des blocages est celui des périodes de services ininterrompu dans une file d'attente M/GI/1 formée par une deuxième classe de clients qui disposent d'une priorité absolue.

I - NOTATIONS ET HYPOTHESES :

Soit $\Omega = M_p(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_+^* \times \{0,1\})^{\mathbb{Z}}$ l'espace des mesures ponctuelles simples et doublement infinies sur $\mathbb{R}$ marquées par $\mathbb{R}_+^* \times \{0,1\}$ et $\mathcal{Q}$ la tribu qui rend mesurables les applications de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}$ qui à ω associent $\omega(F \times G \times H)$ obtenues lorsque $F \times G \times H$ décrit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*) \times \mathcal{P}\{0,1\}$

Un élément $\omega \in \Omega$ s'écrit $\omega = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{t_n}, (s_n,\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ avec $t_n < t_{n+1}$ et $t_0 \leq 0 < t_1$. On définit sur Ω le flot mesurable $\theta = (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ par :

$$\theta_t(\omega) = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{t_n - t}, (s_{n+p},\alpha_{n+p})_{n\in\mathbb{Z}}) \quad \text{si} \quad t_p \leq t < t_{p+1}$$

sur $(\Omega, \mathcal{Q})$, on se donne une probabilité P invariante pour le flot θ. On suppose le flot θ ergodique.

Le processus global N des arrivées au système est la projection de $(\Omega, \mathcal{Q})$ sur $(M_p(\mathbb{R}), \mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ et est la superposition des deux processus N^0 des arrivées de clients et N^1 des instants de blocage. Il est supposé simple et s'écrit

$$N(\omega,.) = \sum_{\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n(\omega)}(.) \quad \text{où} \quad T_n(\omega) = t_n \quad \text{si} \quad \omega = (\sum_n \varepsilon_{t_n}, (s_n,\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \, , \quad \alpha_n = 0$$

ou 1 suivant que c'est un client ou un blocage qui arrive à l'instant t_n, et s_n est la durée du service demandé ou du blocage. Ainsi les sous-processus des arrivées de clients ou de blocages sont définis par :

$$N^i(\omega,.) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n(\omega)}(.) \, 1_{[\alpha_n(\omega)=i]} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n^i(\omega)} \quad \text{pour } i = 0 \text{ et } i = 1$$

avec par convention $T_0^i \leq 0 < T_1^i$. Les trois processus sont stationnaires par construction.

Soit $\hat{\Omega} = \{\omega \in \Omega \mid N(\omega,\{0\}) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid T_0(\omega) = 0\}$ l'espace de Palm du processus N et $\hat{\theta}$ la restriction à $\hat{\Omega}$ de l'opérateur θ_{T_1}. Le processus N étant simple, l'espace $\hat{\Omega}$ est réunion disjointe des espaces de Palm $\hat{\Omega}_0$ et $\hat{\Omega}_1$

associés aux sous-processus N^o et N^1. Sur $\hat{\Omega}$, nous considérons la variable aléatoire (v.a.) $\tau = T_1 - T_o = T_1$ ainsi que les v.a. $\sigma = s_o 1_{\hat{\Omega}_o}$ et $B = s_o 1_{\hat{\Omega}_1}$ qui sont respectivement la demande en service (si c'est un client qui arrive) et la durée du blocage intervenant à l'instant 0 ($=T_o$). Ainsi, $\sigma = 0$ sur $\hat{\Omega}_1$ (resp. $B = 0$ sur $\hat{\Omega}_o$). Par hypothèse et si on définit $\tau^1 = T_1^1 - T_o^1$ (pour le processus N^1), nous avons $B < \tau^1$ sur $\hat{\Omega}_1$ (un blocage ne peut intervenir qu'après la fin du précédent).

On notera $\hat{P}$ la mesure de Palm de N définie par

$$\int_\Omega f(\theta_s\omega,s)\ N(\omega,ds)P(d\omega) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int f(\omega,s)ds$$

pour $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable positive, et $\hat{P}_i$ lá mesure de Palm de N^i pour $i = 0,1$ (cf. [5]). Nous avons $\hat{P} = \hat{P}_o + \hat{P}_1$ et $\hat{E}(\tau) = 1$.

Nous supposerons $\hat{E}(B + \sigma) < 1$ et $(\hat{\Omega},\hat{P},\hat{\theta})$ ergodique.

<u>II - CHARGES DU SERVEUR</u> :

1) La théorie classique des files d'attente de type G/G/1 (cf. [7]) affirme sous nos hypothèses l'existence et l'unicité sur $\hat{\Omega}$ de la <u>charge stationnaire</u> $\hat{\Gamma}$ <u>en services et blocages confondus</u> (resp. $\hat{\Gamma}^1$ <u>en blocages)</u> comme solution $\hat{P}$ p.p. finie de

$$(1)\qquad \hat{\Gamma} \circ \hat{\theta} = (\hat{\Gamma} + (B+\sigma)-\tau)^+ \qquad (\text{resp. } \hat{\Gamma}^1 \circ \hat{\theta} = (\hat{\Gamma}^1 + B-\tau)^+)$$

Les charges stationnaires à l'instant t sont alors données par

$$\Gamma_o = ((\hat{\Gamma} + B + \sigma) \circ \theta_{T_o} + T_o)^+ \quad \text{et} \quad \Gamma_t = \Gamma_o \circ \theta_t$$

$$(\text{resp. } \Gamma_o^1 = ((\hat{\Gamma}^1 + B) \circ \theta_{T_o} + T_o)^+ \quad \text{et} \quad \Gamma_t^1 = \Gamma_o^1 \circ \theta_t)$$

et sont les uniques solutions càd-làg, stationnaires pour le flot θ des équations

$$(2)\qquad d\Gamma_t + 1_{\{\Gamma_t > o\}}\, dt = (B+\sigma) \circ \theta_t \quad dN(t)$$

$$\left(\text{resp.} \quad d\Gamma_t^1 + 1_{\{\Gamma_t^1 > o\}}\, dt = B \circ \theta_t \quad dN^1(t)\right)$$

en prolongeant les v.a. $\dot{B}$ et σ de manière indifférente à l'espace Ω.

2) <u>La charge stationnaire</u> $\hat{\Gamma}^o$ <u>en service</u> s'obtient sur $\hat{\Omega}$ par différence : $\hat{\Gamma}^o = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}^1$. C'est l'unique solution $\hat{P}$ p.p. finie de l'équation

(3) $$\hat{\Gamma}^o \circ \hat{\theta} = (\hat{\Gamma}^o + \sigma - (\tau - \hat{\Gamma}^1 - B)^+)^+$$

qui s'obtient par différence des équations (1).

En posant $\tau_{nb} = (\tau - \hat{\Gamma}^1 - B)^+$, et puisque la v.a. $\hat{\Gamma}^1 - \hat{\Gamma}^1 o\theta = \hat{\Gamma}^1 \wedge (\tau - B)$ comprise entre τ et $-B$ est intégrable et d'intégrale nulle, nous avons

$$\hat{E}(\tau_{nb}) = 1 - \hat{E}(B)$$

La condition $\hat{E}(B+\sigma) < 1$ équivaut donc à $\hat{E}(\sigma) < \hat{E}(\tau_{nb})$

Notons $\gamma_t = 1_{\{\hat{\Gamma}^1_t = o\}}$ <u>la f.a. indicatrice de non-blòcage du serveur</u>, qui vaut 0 s'il est en période de blocage et 1 sinon. Cette f.a. est stationnaire, nous avons $\tau_{nb} = \int_o^\tau \gamma_s \, d_s$.

La charge stationnaire Γ^o_t en services à l'instant t est donnée par :

$$\Gamma^o_o = \left((\hat{\Gamma}^o + \sigma) \circ \theta_{T_o} - \int_{T_o}^{o} \gamma_s \, ds \right)^+ \quad \text{et } \Gamma^o_t = \Gamma^o_o o\theta_{.t}$$

et est l'unique solution cad-lag et stationnaire de l'équation obtenue à partir de (2) :

(4) $$d\Gamma^o_t + 1_{\{\Gamma^o_{t^-} > o\}} \gamma_t \, dt = \sigma \circ \theta_t \, dN^o(t)$$

On en déduit que $P\left\{\Gamma^o_o > 0, \ \Gamma^1_o = 0\right\} = \hat{E}(\sigma)$

Pour calculer $P\left\{\Gamma^o_o > 0\right\} = P\left\{(\hat{\Gamma}^o + \sigma) \circ \theta_{T_o} > \int_{T_o}^{o} \gamma_s \, ds\right\}$, posons

$$g(\omega,t) = 1_{\left\{(\hat{\Gamma}^o + \sigma) > \int_o^t \gamma_s \, ds\right\}}$$

Nous avons (cf.[6])

$$\int_\Omega g(\theta_{T_o}(\omega) - T_o(\omega)) dP = \int_{\hat{\Omega}} d\hat{P} \int_o^{T_1(\omega)} g(\omega,t) dt$$

$$= \int_{\hat\Omega} 1_{\{\hat\Gamma^o + \sigma > 0\}} \; \tau \wedge (\hat\Gamma + B + \sigma)\, d\hat P$$

$$= \hat E(B+\sigma) - \int_{\{\hat\Gamma^o = 0\} \wedge \{\sigma = 0\}} \tau \wedge (\hat\Gamma^1 + B)\, d\hat P$$

(5) d'où $$P\{\Gamma^o_o > 0\} = \hat E(B+\sigma) - \hat E\left(1_{\{\hat\Gamma^o = 0\}} \tau \wedge B\right)$$

Ainsi la probabilité qu'un client soit en interruption de service à l'instant 0 vaut

$$P\left\{\Gamma^o_o > 0,\ \Gamma^1_o > 0\right\} = \hat E\left(B\, 1_{\{\hat\Gamma^o > 0\}} + 1_{\{\hat\Gamma^o = 0\}} (B-\tau)^+\right)$$

3) Relations entre les moments d'ordre 1 des charges stationnaires :

En différenciant la f.a. $\frac{1}{2}(\Gamma_t)^2$ qui est cad-lag, il est facile de voir que le saut à l'instant T_n vaut $(B+\sigma)\ (\Gamma + \frac{1}{2}(B+\sigma)) \circ \theta_{T_n}$ et donc que

$$d\,\frac{1}{2}(\Gamma_t)^2 + 1_{\{\Gamma_t > 0\}}\, \Gamma_t\, dt = \left[(B+\sigma)(\hat\Gamma + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2}\sigma)\right] \circ \theta_t \; dN(t)$$

Cela permet d'obtenir par intégration sur Ω que :

$$E(\Gamma_o) = \hat E((B+\sigma)\hat\Gamma) + \frac{1}{2}\hat E(B^2+\sigma^2)$$

(Cette formule peut être obtenue en utilisant les résultats de [1]). Un calcul analogue permet d'obtenir que $E(\Gamma^1_o) = \frac{1}{2}\hat E(B^2)$ et par différence

(6) $$E(\Gamma^o_o) = \hat E((\sigma+B)\ \hat\Gamma^o + \sigma\,\hat\Gamma^1) + \frac{1}{2}\hat E(\sigma^2)$$

Remarquons que

$$E\left(\Gamma^o_o\, 1_{\{\Gamma^1_o = 0\}}\right) = \hat E(\sigma\,\hat\Gamma^o) + \frac{1}{2}\hat E(\sigma^2)$$

III - SERVICE DES CLIENTS :

Nous supposons pour toute la suite la f.a. Υ indicatrice de non-blocage du serveur donnée.

1) Sur $\hat{\Omega}$, l'instant de début de service ou temps d'attente $\hat{Z}$ du client (virtuel sur $\hat{\Omega}_1$) qui se présente à l'instant 0 est égal au temps nécessaire au serveur pour accomplir la charge $\hat{\Gamma}^o$ en services et, lorsque celle-ci est nulle, à l'instant où le serveur devient disponible, soit :

$$(7) \qquad \hat{Z} = \inf\{t \geq \hat{\Gamma}^1 : \int_0^t \gamma_s \, ds = \hat{\Gamma}^o\}$$

$$= \hat{\Gamma}^1 \, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}} + \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \gamma_s \, ds = \hat{\Gamma}^o\}$$

L'instant $\hat{Z} + \hat{C}$ de fin de service de ce client est défini par :

$$(8) \qquad \hat{Z} + \hat{C} = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \gamma_s \, d_s = \hat{\Gamma}^o + \sigma\}$$

La variable $\hat{C}$ représente le temps d'achévement de service de ce client, c'est-à-dire :

$$(9) \qquad \hat{C} = \inf\{t \geq 0 \int_{\hat{Z}}^{\hat{Z}+t} \gamma_s \, ds = \sigma\}$$

$$= \inf\{t > 0 \int_0^t \gamma_{\hat{Z}+s} \, ds = \sigma\}$$

Puisque

$$\int_0^\infty \gamma_s \, ds = \sum_{n=o}^{\infty} (T_{n+1} - T_n - (\hat{\Gamma}^1 + B) \circ \theta_{T_n}) +$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} (\tau - \hat{\Gamma}^1 - B)^+ \circ \hat{\theta}^n$$

$$= +\infty \qquad \hat{P}\text{p.p.}$$

car $\hat{E}(\tau - \hat{\Gamma}^1 - B)^+ > \hat{E}(\sigma) > 0$ et d'après le théorème ergodique, il est clair que les v.a. $\hat{Z}$ et $\hat{C}$ sont $\hat{P}$ p.p. finies

Par ailleurs

$$\hat{P}(\hat{Z} = 0) = \hat{P}(\hat{\Gamma} = 0) > 0$$

2) Equation vérifiée par le temps d'attente $\hat{Z}$:

D'après les relations de définition (7) et (8) , nous avons :

$$\hat{Z} \circ \hat{\theta} = \hat{\Gamma}^{1} \circ \hat{\theta}\, 1_{\{\hat{\Gamma}^{o} \circ \hat{\theta} = 0\}} + \inf\{t > 0 : \int_{0}^{t} \gamma_s \circ \hat{\theta}\, ds = \hat{\Gamma}^{o} \circ \hat{\theta}\}$$

$$= (\hat{\Gamma}^{1} + B - \tau)^{+}\, 1_{\{\hat{\Gamma}^{o} + \sigma \leq \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds\}}$$

$$+ \inf\{t > 0 : \int_{0}^{t} \gamma_{\tau+s}\, ds = (\hat{\Gamma}^{o} + \sigma) \vee \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds - \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds\}$$

$$= (\hat{\Gamma}^{1} + B - \tau)^{+}\, 1_{\{\hat{\Gamma}^{o} + \sigma \leq \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds\}}$$

$$+ \inf\{t > 0 : \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds + \int_{\tau}^{\tau+t} \gamma_s\, ds = (\hat{\Gamma}^{o} + \sigma) \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds\}$$

Il en découle que :

- lorsque : $\hat{\Gamma}^{o} + \sigma > \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds$, la relation (8) montre que $\tau < \hat{Z} + \hat{C}$

et que $\tau + \hat{Z} \circ \hat{\theta} = \hat{Z} + \hat{C}$

- lorsque $\hat{\Gamma}^{o} + \sigma \leq \int_{0}^{\tau} \gamma_s\, ds$, nous avons $\hat{Z} + \hat{C} \leq \tau$ et $\hat{Z} \circ \hat{\theta} = (\hat{\Gamma}^{1} + B - \tau)^{+}$

d'où dans tous les cas :

$$\hat{Z} \circ \hat{\theta} = (\hat{Z} + \hat{C} - \tau)^{+} + (\hat{\Gamma}^{1} + B - \tau)^{+}\, 1_{\{\hat{\Gamma}^{o} + \sigma \leq \tau_{nb}\}}$$

Or, sur $\{\hat{\Gamma}^o > 0\} \cup \hat{\Omega}_o$ et dés que $0 < \hat{\Gamma}^o + \sigma \leq \tau_{nb}$, $(\hat{\Gamma}^1 + B - \tau)^+ = 0$ et sur l'ensemble complémentaire $\{\hat{\Gamma}^o = 0\} \cap \hat{\Omega}_1$,

$$(\hat{\Gamma}^1 + B - \tau)^+ \, 1_{\{\hat{\Gamma}^o + \sigma \leq \tau_{nb}\}} = (B - \tau)^+ \, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}$$

Nous obtenons donc que $\hat{Z}$ est solution de l'équation :

$$\hat{Z} \circ \hat{\theta} = (\hat{Z} + \hat{C} - \tau)^+ + (B - \tau)^+ \, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}$$

où la v.a $\hat{C}$ est donnée par la définition (9) . Cette équation s'écrit également

(10) $$\hat{Z} \circ \hat{\theta} = (\hat{Z} + \hat{C} + B \, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}} - \tau)^+$$

étant donné que

$$\{\hat{\Gamma}^o = 0\} \cap \hat{\Omega}_1 = \{\hat{\Gamma} = 0\} \cap \hat{\Omega}_1 = \{\hat{Z} + \hat{C} = 0\} .$$

3) Temps virtuel d'attente des clients

A partir des v.a. $\hat{Z}$ et $\hat{C}$ ainsi définies sur $\hat{\Omega}$, nous pouvons construire sur Ω la f.a. Z_t temps virtuel d'attente des clients à l'instant t , càd-làg et stationnaire, par :

$$Z_o = ((\hat{Z} + \hat{C} + B \, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}) \circ \theta_{T_o} + T_o)^+$$

$$Z_t = Z_o \circ \theta_t$$

L'égalité $\{Z_o = 0\} = \{\Gamma_o = 0\}$ et les relations :

$$P\{Z_o = 0\} = 1 - \hat{E}\,(\hat{C} + B1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}})$$

$$P\{\Gamma_o = 0\} = 1 - \hat{E}\,(B + \sigma)$$

nous montrent que

$$\hat{E}(\hat{C} + B\,1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}) = \hat{E}(B + \sigma) < 1$$

Par ailleurs un calcul analogue à celui du II,3) donne que

$$\begin{aligned} E(Z_o) &= \hat{E}((\hat{C} + B\,1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}})(\hat{Z} + \tfrac{1}{2}\,(\hat{C} + B\,1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}})) \\ &= \hat{E}(\hat{Z}\,\hat{C}) + \tfrac{1}{2}\,E\,(\hat{C}^2 + B^2\,1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}) \end{aligned} \tag{11}$$

car sur $\hat{\Omega}_1 \cap \{\hat{\Gamma}^o = 0\}$ nous avons $\hat{Z} = 0$.

4) Etude de l'équation (10) :

Les v.a. $\hat{Z}$ et $\hat{C}$ étant données par les relations de définition (7) et (8) , soit (Z_1, C_1) un autre couple de v.a. qui vérifie l'équation (10) et la relation (9) , c'est-à-dire :

$$Z_1 \circ \theta = (Z_1 + C_1 + B\,1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}} - \tau)^+$$

$$C_1 = \inf\{t \geq 0 \int_{Z_1}^{Z_1+t} \gamma_s\, ds = \sigma\}$$

L'ensemble $\{\hat{Z} \leq Z_1\}$ est $\hat{\theta}$-invariant car si $\hat{Z} \leq Z_1$ alors $\sigma = \int_{\hat{Z}}^{\hat{Z}+\hat{C}} \gamma_s \, ds \geq \int_{Z_1}^{\hat{Z}+\hat{C}} \gamma_s \, ds$

et donc $\hat{Z} + \hat{C} \leq Z_1 + C_1$; d'où $\hat{Z} \circ \hat{\theta} \leq Z_1 \circ \hat{\theta}$.

De plus $\{\hat{Z} \leq Z_1\}$ contient $\{\hat{Z} = 0\}$ avec $\hat{P}(\hat{Z} = 0) > 0$?

Il en découle que $\hat{Z}$ est la plus petite solution de l'équation (10), lorsque $\hat{C}$ est donné par la relation (9). C'est aussi l'unique solution qui s'annule sur un ensemble de $\hat{P}$- mesure strictement positive.

IV - DECOMPOSITION DU TEMPS VIRTUEL D'ATTENTE

L'équation (10) dont $\hat{Z}$ est la plus petite solution s'écrit également :

$$\hat{Z} \circ \hat{\theta} = (\hat{Z} + \hat{C} + B\, 1_{\{\hat{Z} = 0\}} - \tau)^+ \tag{12}$$

en vertu de l'égalité :

$$\{\hat{\Gamma}^0 = 0\} \cap \hat{\Omega}_1 = \{\hat{\Gamma} = 0\} \cap \hat{\Omega}_1 = \{\hat{Z} = 0\} \cap \hat{\Omega}_1$$

Cette équation où il apparait un rejet de la charge B lorsque $\hat{Z} > 0$, admet des solutions qui ne sont plus comparables au sens de l'inégalité de v.a. Elle permet cependant d'introduire une décomposition du temps d'attente $\hat{Z}$ qui est l'une de ses solutions, lorsqu'on se donne la v.a. $\hat{C}$ sur $\hat{\Omega}$,

1°/ Considérons tout d'abord l'équation :

$$\tilde{Z} \circ \hat{\theta} = (\tilde{Z} + \hat{C} - \tau)^+ \tag{13}$$

Cette équation est celle de la charge $\tilde{Z}$ d'une file d'attente "premier arrivé - premier servi" (G/G/1) où les clients arrivent suivant le processus N^0 et demandent un temps de service égal à leur temps d'achevement de service.

Etant donné que $\hat{E}(\hat{C}) < 1$, cette équation admet une unique solution $\tilde{Z}$ $\hat{P}$-p.p. finie et telle que $\hat{P}(\tilde{Z} = 0) > 0$. De plus, nous avons $\tilde{Z} \leq \hat{Z}$ $\hat{P}$-p.p. puisque l'ensemble $\{\tilde{Z} \leq \hat{Z}\}$ est $\hat{\theta}$ - invariant et contient $\{\tilde{Z} = 0\}$.

2°/ Les v.a. $\tilde{Z}$ et $\hat{Z}$ seraient égales si la v.a. $B\, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}$ était identiquement nulle. Nous appellerons un tel blocage qui intervient lorsque la file est vide de clients "un blocage à vide".

Soit $\tilde{\Gamma}^1$ la v.a. définie sur $\hat{\Omega}$ par :

$$\tilde{\Gamma}^1 = \hat{Z} - \tilde{Z}$$

La nouvelle discipline de service où le serveur sert en premier lieu la charge $\tilde{Z}$ en temps d'achèvement de service des clients (nous avons $\tilde{Z} = 0$ sur $\{\hat{Z} = 0\}$) puis "accomplit" la charge en "blocages à vide" lorsque la charge $\tilde{Z}$ est épuisée, conserve la charge $\hat{Z}$. Ainsi $\tilde{Z}$ est bien la solution de (13) et $\tilde{\Gamma}^1$ représente la charge résiduelle en "blocages à vide", compte-tenu de l'inversion de la discipline de service (qui épuisait d'abord les blocages, puis les demandes de services).

L'analogie avec les charges $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}^1$ et $\hat{\Gamma}^o$ et les équations (10), (13) et (14) nous permettent de faire les mêmes calculs qu'au II.2) et d'obtenir que $\tilde{\Gamma}^1$ est l'unique solution de l'équation :

$$(15) \qquad \tilde{\Gamma}^1 \circ \hat{\theta} = (\tilde{\Gamma}^1 + B\, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}} - (\tau - \tilde{Z} - \hat{C})^+)^+.$$

3°/ Nous pouvons définir sur Ω , de la même manière que dans II -2) la f.a. stationnaire $\tilde{\gamma}_t$ indicatrice de l'état du serveur à l'instant t pour la nouvelle discipline le service, qui vaut 0 si le serveur sert la charge $\tilde{Z}$ et 1 sinon, par :

$$\tilde{\gamma}_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_{[\![T_n + (\tilde{Z} + \hat{C}) \circ \theta_{T_n} ,\, T_{n+1}[\![}(t)$$

Sur Ω , les charges stationnaires $\tilde{Z}_t$ et $\tilde{\Gamma}^1_t$ pour la nouvelle discipline de service sont données à l'instant t par les relations :

(16) $$\tilde{Z}_o = ((\tilde{Z} + \hat{C}) \circ \theta_{T_o} + T_o)^+ \quad \text{et} \quad \tilde{Z}_t = \tilde{Z}_o \circ \theta_t$$

$$\tilde{\Gamma}^1_o = ((\tilde{\Gamma}^1 + B\, 1_{\{\hat{\Gamma}^o = 0\}}\, \tilde{\gamma}_o) \circ \theta_{T_o} - \int_{T_o}^{o} \tilde{\gamma}_s\, ds) \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}^1_t = \tilde{\Gamma}^1_o \circ \theta_t$$

et nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'égalité sur Ω :

(17) $$Z_t = \tilde{Z}_t + \tilde{\Gamma}^1_t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

4) <u>Etude de la f.a. $\tilde{\Gamma}^1_.$</u>

En considérant les équations (12), (13) et (14); nous obtenons que $\tilde{\Gamma}^1$ est une solution de l'équation :

(18) $$\tilde{\Gamma}^1 \circ \hat{\theta} = (\tilde{\Gamma}^1 + B\, 1_{\{\tilde{Z} = 0\}}\, 1_{\{\tilde{\Gamma}^1 = 0\}} - (\tau - \tilde{Z} - \hat{C})^+)^+$$

équation qui est celle de la charge dans une file d'attente à rejet lorsque les v.a. $B\, 1_{\{\tilde{Z} = 0\}}$, $\tilde{Z}$ et $\hat{C}$ sont données .

Si $\tilde{\Gamma}^1_t$ est la charge stationnaire à l'instant t dans cette file d'attente, elle vérifie sur Ω l'équation, déduite de (18) et donnée par :

(19) $$d\tilde{\Gamma}^1_t + 1_{\{\tilde{\Gamma}^1_t > 0\}}\, \tilde{\gamma}_t dt = B\, 1_{\{\tilde{\Gamma}^1 = 0\}} \circ \theta_t\, \tilde{\gamma}_t\, dN^1_t$$

a) Considérons la fonction aléatoire I_t additive et continue, représentant le temps de liberté cumulé entre l'instant 0 et l'instant t (si $t < 0$, $I_t \leq 0$)

dans la file $G/G/1$ définie dans IV - 1), dont la charge est la f.a. $\tilde{Z}$:

$$I_t = \int_0^t \tilde{\gamma} \circ \theta_s \, ds$$

et le changement de temps associé

$$C_t = \inf\{u \in \mathbb{R} : I_u > t\}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, C_t est P-p.s. fini sur Ω puisque $\int_0^{+\infty} \tilde{\gamma}_s \, ds = \int_{-\infty}^{0} \tilde{\gamma}_s \, ds = \infty$ P - p.s. sous la condition $\hat{E}(\hat{C}) < 1$.

Remarquons tout d'abord que les v.a. C_{0-} et C_0 sont nulles $\tilde{\gamma}_0 .P$ p.p.: par définition, nous avons

$$\int_0^{C_0} \tilde{\gamma}_0 \circ \theta_s \, ds = 0$$

et, puisque le flot $(\theta_s)_s$ préserve P ,

$$0 = \int_\Omega dP \int 1_{[\![0, C_0]\!]}(s) \, \tilde{\gamma}_s \circ \theta_s \, ds$$

$$= \int_\Omega \tilde{\gamma}_0 dP \int 1_{[\![0, C_0 \circ \theta_{-s}]\!]}(s) ds$$

$$= \int_\Omega \tilde{\gamma}_0 \, dP \int 1_{\{s \geq 0 \,:\, s \leq C_0 \circ \theta_{-s}\}} \, ds$$

$$= \int_\Omega \tilde{\gamma}_0 dP \int 1_{\{u \leq 0 \,:\, C_0 \circ \theta_u + u \geq 0\}} \, du$$

L'ensemble $\{u \leq 0 : C_o \circ \theta_u + u \geq 0\}$ étant un intervalle de longueur $(-C_{o-})$, nous obtenons que $\int_\Omega (C_{o-}) \tilde{\gamma}_o \, dP = 0$ avec $C_{o-} \leq 0$ par définition, d'où $C_{o-} = 0$ pour $\tilde{\gamma}_o . P$ presque tout ω (le même résultat est clair pour C_o puisque la f.a. $\tilde{\gamma}$ est continue à droite).

Le flot $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_s)_{s \in \mathbb{R}}$ défini par $\tilde{\theta}_s(\omega) = \theta_{C_s(\omega)}(\omega)$ vérifie bien $\tilde{\theta}_t \circ \tilde{\theta}_s = \tilde{\theta}_{t+s}$ $(C_t + C_s \circ \theta_{C_t} = C_{t+s})$ pour tous t et s dans $\mathbb{R}$, préserve la mesure $\tilde{\gamma}_o . P$ et est ergodique sur la restriction de l'espace de Probabilité à $\{\tilde{\gamma}_o = 1\}$ (cf [8]).

b) Soit $\tilde{N}^1$ le processus changé de temps du processus N^1, dont les variables de comptage sont :

$$\tilde{N}^1_t = \int_\bullet^{C_t} \tilde{\gamma}_s \, dN^1_s$$

et soit $\tilde{P}_1$ sa mesure de Palm ; ce processus est stationnaire pour le flot $\tilde{\theta}$ qui préserve la mesure $\tilde{\gamma}_o . P$. Ainsi pour toute fonction mesurable positive $f : \Omega \to R_+$ et par définition de la mesure de Palm, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega) d\tilde{P}_1(\omega) &= \iint_{\Omega \times \mathbb{R}} f(\omega) \, 1_{[0,1]}(s) \, d\tilde{P}_1(\omega) ds \\ &= \iint_{\Omega \times \mathbb{R}} f(\tilde{\theta}_s \omega) \, 1_{[0,1]}(s) \, \tilde{\gamma}_o(\omega) \, dP(\omega) \, \tilde{N}^1(\omega, ds) \\ &= \int_\Omega \tilde{\gamma}_o(\omega) dP(\omega) \int_o^1 f(\tilde{\theta}_s \omega) \tilde{N}^1(\omega, ds)\end{aligned}$$

Si nous posons $u = C_s(\omega)$ pour un ω fixé, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,1]}(s) f(\tilde{\theta}_s \omega) \tilde{N}^1(\omega, ds) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,1]}(I_u(\omega)) f(\theta_u \omega) \tilde{\gamma}_u(\omega) N^1(\omega, du)$$

et puisque $I_o \circ \theta_{-u}(\omega) = -I_{-u}(\omega)$, nous obtenons en posant

$g(\omega,u) = f(\omega)\ 1_{[0,1]}(-I_{-u}(\omega))\ \tilde{\gamma}_0(\omega)\ \tilde{\gamma}_{-u}(\omega)$ que :

$$\int_\Omega f(\omega)d\tilde{P}_1(\omega) = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} g(\theta_u\,\omega,u)N^1(\omega,du)dP(\omega)$$

$$= \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} g(\omega,u)d\hat{P}_1\ du$$

$$= \int_\Omega f(\omega)\ \tilde{\gamma}_0(\omega)\ d\hat{P}_1(\omega)\int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,0]}(I_{-u}(\omega))\tilde{\gamma}_{-u}(\omega)du$$

$$= \int_\Omega f(\omega)\ \tilde{\gamma}_0(\omega)d\hat{P}_1(\omega)\int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,0]}(I_v(\omega)dv$$

Or sur $\{\tilde{\gamma}_0 = 1\}$, $C_0 = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,0]}(I_v(\omega))\ \tilde{\gamma}_v(\omega)dv = \int_{C_{-1}}^0 \tilde{\gamma}_v(\omega)dv = 1$$

La mesure de Palm $\tilde{P}_1$ de $\tilde{N}^1$ vaut donc :

$$\tilde{P}_1 = \tilde{\gamma}_0\ .\ \hat{P}_1$$

c) Soit $\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_\cdot$ <u>la f.a. changée de temps</u> de $\tilde{\Gamma}^1$ et définie sur Ω par

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_t = \tilde{\Gamma}^1_{C_t} = \tilde{\Gamma}^1_0 \circ \tilde{\theta}_t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Par différentiation à droite et en utilisant les définitions de C_t et $\tilde{N}^1_t$

nous obtenons, à partir que l'équation (19) dont $\tilde{\Gamma}^1$ est solution, que la f.a $\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_.$ est solution stationnaire pour le flot $\tilde{\theta}$ sur l'espace de probabilité trace

$(\{\tilde{\gamma}_0 = 1\}\ ,\ \mathcal{Q} \cap \{\tilde{\gamma}_0 = 1\}\ ,\ \frac{1}{E(\tilde{\gamma}_0)}\ \tilde{\gamma}_0 .\ P)$

(20)
$$d\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_t + 1_{\{\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_t > 0\}}\, dt = 1_{\{\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_{t-} = 0\}}\ B \circ \tilde{\theta}_t\ d\tilde{N}^1_t$$

qui est celle de la charge dans une file à rejet, définie sur $\{\tilde{\gamma}_0 = 1\}$ par le processus $\tilde{N}^1$ des arrivées et la demande de service B.

5). <u>Décomposition du temps virtuel d'attente</u> :

La f.a. $\tilde{\Gamma}^1_t$ est constante sur l'intervalle $[\![C_{0-}, C_0]\!]$ qui contient 0 et, sur $\{\gamma_0 = 1\}$, les v.a. $\tilde{\Gamma}^1_0$ et $\tilde{\tilde{\Gamma}}^1_0$ sont égales. Ainsi, puisque la transformation θ_{C_0} projette l'espace Ω sur $\{\tilde{\gamma}_0 = 1\}$, nous avons

$$\tilde{\Gamma}^1_0 = \tilde{\Gamma}^1_{C_0} = \tilde{\Gamma}^1_0 \circ \theta_{C_0} = \tilde{\tilde{\Gamma}}^1_0 \circ \theta_{C_0}$$

La formule (17) s'écrit alors, pour $t = 0$:

$$Z_0 = \tilde{Z}_0 + \Gamma^1_0$$

(21)
$$= \tilde{Z}_0 + \tilde{\tilde{\Gamma}}^1_0 \circ \theta_{C_0}$$

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème :

Le temps virtuel d'attente à l'instant t, en régime stationnaire, admet la décomposition

$$Z_t = \tilde{Z}_t + \tilde{\tilde{\Gamma}}{}^1_o \circ \tilde{\theta}_{I_t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Le couple $(\tilde{Z}_t, I_t)$ représente la charge stationnaire et le temps de liberté cumulé depuis l'instant 0, à l'instant t, dans la file d'attente G/G/1 où les charges arrivent suivant le processus N^o et valent les temps d'achèvement de service des clients. La f.a. $\tilde{\tilde{\Gamma}}{}^1_t = \tilde{\tilde{\Gamma}}{}^1_o \circ \tilde{\theta}_t$ est une solution stationnaire pour le flot $\tilde{\theta}$ sur l'espace de Probabilité trace sur $\{\tilde{Z}_o = 0\}$ de l'équation (20) de la charge de la file d'attente à rejet, où les charges arrivent suivant le processus $\tilde{N}^1$ obtenu à partir de N^1 par le changement de temps inverse de la f.a. $I.$ et valent les durées des blocages correspondants (aux sauts de N^1 qui induisent ceux de $\tilde{N}^1$).

<u>Preuve</u> : Il suffit de composer à droite par θ_t les deux membres de l'égalité (21) et de remarquer que

$$C_o \circ \theta_t = \inf\{u : I_u \circ \theta_t = i_{u+t} - I_t > 0\}$$

Donc $t + C_o \circ \theta_t = \inf\{v : I_v > I_t\} = C_{I_t}$

et $\theta_{C_o} \circ \theta_t = \theta_{C_{I_t}} = \tilde{\theta}_t$. Le reste découle de la stationnarité des f.a. $Z_.$ et $\tilde{Z}_.$. Par ailleurs, il est clair que $\{\tilde{Y}_o = 1\} = \{\tilde{Z}_o = 0\}$ à partir de (16).

La décomposition du théorème contient celle établie en loi par J.A. HOOKE dans [2], et que nous avons établie au sens p.s. dans [4], pour le temps virtuel d'attente, en régime transitoire, des clients non prioritaires dans une file d'attente à priorité absolue, deux classes de clients et acquis de service pour les clients non-prioritaires, lorsque les clients prioritaires arrivent suivant un processus de Poisson, sous les conditions d'indépendance des v.a. définissant le système et de nullité de toutes les charges à l'instant 0. Le processus des blocages est alors celui des périodes de service ininterrompu de la file du type M/GI/1 constituée par les clients prioritaires.

Sous ces conditions, qui signifient dans notre modèle que le processus N^o et la suite $\left(\sigma_\circ\theta_{T^o_n}\right)_n$ sont indépendants entre eux, sont indépendants du couple $\left\{N^1, \left(B_\circ\theta_{T^1_n}\right)_n\right\}$, et enfin que les v.a. $\left((T^1_1-B)_\circ\theta_{T^1_n}\right)_n$ sont indépendantes et de même loi exponentielle, J.A. HOOKE caractérise dans [2] la loi limite du temps virtuel d'attente des clients non-prioritaires en calculant sa transformée de Laplace grâce à cette décomposition et à l'indépendance des f.a. $(\tilde{Z}_., I_.)$ et $\tilde{\tilde{\Gamma}}_.$ qui a alors lieu.