ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

M. A. BOUDIBA

La chaîne de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ et les chaînes associées

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 91-132

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_91_0>

LA CHAINE DE FELLER $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ ET LES CHAINES ASSOCIEES

M.A. BOUDIBA

INTRODUCTION

Soit $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires (v.a.) positives indépendantes et de même loi. Si x est un réel on forme la suite $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$ de v.a. positives et définies par :

$$X_0(x) = x \quad \text{et} \quad X_{n+1}(x) = |X_n(x) - Y_{n+1}| \quad .$$

Cette chaîne a d'abord été considérée par H. Von Schelling dans [1] à propos d'un problème de cables téléphoniques. Elle est décrite dans le livre de W. Feller [2] , qui montre que

$$\mu(dx) = P(Y_1 > x)\, 1_{]0,\infty[}(x)\, dx$$

est une mesure stationnaire, qui sera donc bornée si et seulement si $E(Y_1)<\infty$. En réalité, Feller ne mentionne ce fait que sous l'hypothèse supplémentaire d'absolue continuité de Y_1 ; le cas général, facile au demeurant, se trouve dans l'article de F.B. Knight [3] ; ce dernier article mentionne, dans le cas où Y_1 est concentrée sur un multiple de $\mathbb{N}$, une autre mesure stationnaire m (que nous retrouverons au Théorème 4, chapitre 2) et prouve le résultat substantiel suivant : si Y_1 n'est pas concentrée sur un multiple de $\mathbb{N}$, toute mesure stationnaire est proportionnelle à μ .

On peut ranger cette chaîne $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$ dans la classe des chaînes obtenues par itération de fonctions aléatoires considérées dans l'article de Letac [4] . En effet si nous considérons - comme nous allons le faire tout au long de ce travail - la fonction $f_y : [0,\infty[\to [0,\infty[$ définie par $f_y(x) = |x-y|$, où y est un réel fixé, alors la chaîne ci-dessus s'écrit :
$X_n(x) = f_{y_n} \circ f_{y_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{y_1}(x)$, $n \geq 1$.

Considérer la chaîne sous cet angle amène à chercher à la raccrocher à des courants contemporains de réflexion, principalement ceux qui concernent les produits de matrices aléatoires. En effet, bien que nos fonctions f_y n'aient rien à voir avec la linéarité, elles ont encore une propriété de contraction large :

$$|f_y(x_1) - f_y(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

et on peut espérer un comportement asymptotique des itérées des fonctions qui rappelerait le cas linéaire. Cet espoir ne sera pas déçu. Cependant la construction d'une théorie qui engloberait au moins la chaîne de Feller ci-dessus et un degré raisonnable de cas linéaires nous a paru un but ambitieux et prématuré et nous avons choisi d'étudier très soigneusement la chaîne de Feller comme un cas typique de ce que devrait englober une théorie plus générale.

Nous sommes même allés plus loin dans la spécialisation et n'avons considéré la chaîne ci-dessus qu'avec l'hypothèse supplémentaire que Y_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Bien entendu nous prendrons alors x dans $\mathbb{N}$, ce qui entraîne que $X_n(x) \in \mathbb{N}$.

Le problème majeur qui se pose, si on veut pousser l'analogie avec les produits de matrices aléatoires est le suivant : soit

$$H_n(x) = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \ldots \circ f_{Y_n}(x) \quad ,$$

ou, si on veut :

$$H_n(x) = |Y_1 - |Y_2 - |Y_3 \ldots - |Y_n - x| \ldots| \ .$$

Peut-on affirmer que $\lim_{n\to\infty} H_n(x)$ existe presque sûrement ?

Puisque pour x et n fixés, $H_n(x)$ et $X_n(x)$ sont de même loi, il est raisonnable de se limiter, pour étudier ce problème, au cas où $E(Y_1) < \infty$, c'est-à-dire comme nous allons le voir, au cas où $(X_n)(x))_{n=0}$ est récurrente positive.

Il est à noter, que pour x fixé, $(H_n(x))_{n=0}$ n'est pas nécessairement une chaîne de Markov. Cependant la technique pour aborder le problème va être de considérer la chaîne de Markov H_n - et non $H_n(x)$ - sur l'énorme semi-groupe $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. En d'autres termes nous considérons la promenade aléatoire à droite sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ engendrée par les f_{Y_n} .

Ce point de vue général nous amène enfin à reconsidérer la chaîne $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$, ou plutôt $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, comme une promenade aléatoire à gauche sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, engendrée par les f_{Y_n} . Certes, le processus X_n ne saurait converger, même avec $E(Y_1) < \infty$. Cependant on a la surprise de voir $X_n(x) - X_n(0)$ tendre vers 0 (ou presque) ; les fonctions markoviennes X_n tendent à devenir des constantes (aléatoires, et régies par la loi de transition $X_n(x)$).

Les techniques utilisées seront très modestes. Si les démonstrations sont de nature élémentaire (à l'exception du chapitre 3) cela ne veut pas dire hélas qu'elles soient simples.

Le chapitre 1 commence par quelques généralités sur les chaînes de Markov définies par l'action d'une promenade aléatoire dans un semi-groupe sur un ensemble et rassemble du matériel sur les produits $f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_n}$. Le chapitre 2 est consacré à la chaîne de Feller $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}$; on y étudie principalement l'épineux problème des classes et des périodes de cette chaîne, élément indispensable de l'étude d'une chaîne discrète. Le chapitre 3 est le coeur du travail ; on y étudie la chaîne $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ décrite ci-dessus et on montre que $\lim_n H_n$ existe presque sûrement (dans le sens décrit au Théorème 5 du chapitre 3). Enfin le chapitre 4 consacré à la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est court et facile puisqu'il se contente en général d'utiliser les résultats délicats des chapitres précédents.

Chapitre 1 : GENERALITES SUR LES CHAÎNES RESULTANT DE L'ACTION D'UNE MARCHE ALEATOIRE DANS UN SEMI-GROUPE SUR UN ENSEMBLE.

Dans ce chapitre nous allons rassembler des outils techniques nécessaires pour l'étude des diverses chaînes liées à la chaîne de Feller initiale, qui font l'objet de ce travail. Toutes ces chaînes sont construites sur le modèle commun de l'action d'une marche aléatoire dans un semi-groupe sur un autre ensemble. Ainsi, pour la chaîne de Feller, qui correspond au cas le plus simple, on considère donc une probabilité μ sur $\mathbb{N}$, $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires (v.a.) indépendantes et de même loi μ et la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $X_0 = x$ et $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$. Notons $f_y(x) = |x-y|$. Alors on peut écrire $X_n = f_{Y_n} \circ \ldots \circ f_{Y_1}(x)$. D'où l'idée suivante : Notons $S = \{y \in \mathbb{N} ; \mu_y > 0\}$, appelé <u>support</u> de μ, et considérons le semi-groupe $\mathcal{S}$ pour la composition des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, engendré par $\mathcal{S}_1 = \{f_y ; y \in S\}$. Alors $f_{Y_n} \circ f_{Y_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{Y_1}$ définit une promenade aléatoire à gauche sur le semi-groupe engendré par $\mathcal{S}_1$, et $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ résulte de son action sur le point $x \in \mathbb{N}$. Nous aurons à considérer encore d'autres chaînes du même genre. Aussi commençons nous par étudier systématiquement au §1 des aspects ensemblistes simples des chaînes de Markov définies par une action sur un ensemble fini ou dénombrable d'une promenade aléatoire dans un semi-groupe, également fini ou dénombrable.

1°- Semi-groupe et marches aléatoires agissant sur un ensemble

Soit $(\mathcal{S},*)$ un semi-groupe dénombrable et pas nécessairement abélien. Définissons l'action de $\mathcal{S}$ sur un ensemble E par $\mathcal{S} \times E \to E$, $(s,e) \to s.e.$ tel que $(s_2 * s_1).e = s_2(s_1.e)$ pour $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ et $e \in E$.

On munit $\mathcal{S}$ d'une probabilité μ et on considère la chaîne de Markov $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ sur E définie pour $e \in E$ par $e_0 = e$ et $e_n = (s_n * \ldots * s_1) .e_0$ où $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont des v.a. indépendantes et de même loi μ.

Sur E on considère le préordre "<" défini pour e et $f \in E$ par :

$$e < f \iff e = f \quad \text{ou} \quad e \neq f \quad \text{et} \quad \exists\, s \in \mathcal{S} \text{ tel que } f = s.e.$$

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence induite par ce préordre sur E : $\forall$ e et $f \in E$, $e \,\mathcal{R}\, f \iff e < f$ et $f < e$. Il est classique que "<" induit alors un ordre partiel sur l'ensemble E [5]. Cet ordre partiel encore noté " < " . Par rapport à cet ordre partiel les classes maximales sont les classes essentielles pour la chaîne $(e_n)_{n=0}^{\infty}$, au sens de K.L. Chung, dont nous adoptons le vocabulaire sur les chaînes de Markov tel qu'il est défini dans [6].

Par analogie avec l'action d'un groupe sur un ensemble [9] , nous dirons que $C \subset E$ est une classe d'intransitivité pour $\mathcal{S}$ si $\mathcal{S}.C = C$; de même l'orbite de $x \in E$ sous l'action de $\mathcal{S}$ est l'ensemble $C \subset E$ tel que $\mathcal{S}.x = C$. $\mathcal{S}$ agit transitivement sur E si $\forall\, x \in E$, $\mathcal{S}.x = E$.

Concernant la probabilité μ sur $\mathcal{S}$, nous avons à imposer à μ de charger suffisamment d'éléments de $\mathcal{S}$ pour que les structures du semi-groupe et de la chaîne soient convenablement reliées . Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{S}_1 = \{s \,;\, \mu(\{s\}) > 0\}$. On suppose que $\mathcal{S}_1$ engendre $\mathcal{S}$, dans le sens où tout élément de $\mathcal{S}$ est un produit fini d'éléments de $\mathcal{S}_1$. Alors si $C \subset E$:*

C est une classe essentielle pour $(e_n)_{n=0}^{\infty} \iff \mathcal{S}$ agit transitivement sur C.

Démonstration.

Si C est une classe essentielle pour $(e_n)_{n=0}^{\infty}$,C est un ensemble fermé sous l'action de $\mathcal{S}$ donc on a $\mathcal{S}.C \subset C$. Comme C est une classe $\forall$ e et $f \in C$, $\exists\, s \in \mathcal{S}$ tel que e = s.f. Donc $C \subset \mathcal{S}.C$. Réciproquement si $\mathcal{S}$ agit transitivement sur C, $\mathcal{S}.C = C$. Donc C est fermée sous l'action de $\mathcal{S}$ et C est une classe car $\forall$ e et $f \in C$ $\exists\, s \in \mathcal{S}$ tel que $s.e = f$; $s \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists\, s_1, \ldots, s_n$ tel que $s = s_n * \ldots * s_1$ et donc tous les éléments de C communiquent entre eux. Donc C est une classe maximale pour la relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus et l'ordre partiel entre les classes. C'est donc une classe essentielle pour $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ □

Disons quelque chose du lien entre le semi-groupe et la période d'un état e, ainsi que de l'équation aux mesures stationnaires.

Soit e un état de la chaîne $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ et $\mathcal{S}_1 = \{s,\ \mu(\{s\}) > 0\}$, un système générateur de $\mathcal{S}$. e est de période d si
$d = PGCD\ \{n \in \mathbb{N}\ ;\ \exists\ s_1,\ldots,s_n$ dans $\mathcal{S}_1$ tels que $(s_n * \ldots * s_1).e = e\}$

$m = (m_i)_{i\in E}$ est une mesure stationnaire pour $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ si :

$$\forall\ j \in E\ ,\quad m_j = \sum_{i\in E} m_i \sum_{\{s\in\mathcal{S}_1, s.i=j\}} \mu_s = \sum_{s\in\mathcal{S}_1} \mu_s\, m(s^{-1}.j)$$

Nous allons étudier cette chaîne $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ dans cinq cas particuliers. Dans chacun des cas l'ensemble $\mathcal{S}$ est le même. Il est décrit ainsi :

Si $y \in \mathbb{N}$, on définit $f_y : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $f_y(x) = |x-y|$. On se fixe alors une partie S de $\mathbb{N}$ non vide, et on note :

$$\mathcal{S}_1 = \{f_y,\ y \in S\}\ ,\quad \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{n-1} \circ \mathcal{S}_1 \text{ si } n \geq 1 \text{ et } \mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

Notons que $i_{\mathbb{N}} \notin \mathcal{S}$, si $i_{\mathbb{N}}(x) = x$).

On note alors N = sup S, N fini ou non. Pour chacun des cas particuliers on va spécialiser : (a) L'ensemble E sur lequel va agir $\mathcal{S}$.
(b) La loi interne de $\mathcal{S}$.
(c) L'action de $\mathcal{S}$ sur E.

(1) $E = \{0,1,\ldots,N\}$ (et donc $E = \mathbb{N}$ si S est non borné). Si s_1 et s_2 sont dans $\mathcal{S}$, on note $s_2 * s_1 = s_2 \circ s_1$ et on définit l'action de $\mathcal{S}$ sur E par :

$$\mathcal{S} \times E \longrightarrow E\ ,\quad (s,x) \longmapsto s.x = s(x)\ .$$

Si alors S = support de μ, on obtient exactement la chaîne 1 qui est le sujet du chapitre 2.

(2) $E = \{0,1,\ldots,N\}^{\mathbb{N}}$ (et donc $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ si S est non borné). E est donc l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$. Si s_1 et $s_2 \in \mathcal{S}$ on note $s_2 * s_1 = s_1 \circ s_2$ et on définit l'action de $\mathcal{S}$ sur E par : $\mathcal{S} \times E \to E$, $(s,x) \mapsto s.x = x \circ s$.

Si encore S = support de μ, on obtient la chaîne (2), qui est notre sujet principal, traité au chapitre 3. Le traitement exige deux outils techniques correspondant aux cas 3 et 4 suivants.

(3) Soit A un ensemble quelconque appelé alphabet et $E = A^{\mathbb{N}}$. E est donc l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans A ou encore l'ensemble des mots infinis dans l'alphabet A. Comme au (2) si s_1 et s_2 sont dans $\mathcal{S}$, on note $s_2 * s_1 = s_1 \circ s_2$, et on définit l'action de $\mathcal{S}$ sur E par : $\mathcal{S} \times E \to E$, $(s,x) \longmapsto s.x = x \circ s$. Dans ce cas particulier, on peut tirer la spécialisation suivante, si S est borné, en prenant seulement $E = A^{\{0,\ldots,N\}}$, avec la même action de $\mathcal{S}$, qu'il faut restreindre à $\{0,1,\ldots,N\}$.

Soit A = {a,b,c} . Si E = $A^{\mathbb{N}}$ soit par exemple x = abcabcabc ..... . Alors :

x ∘ s = c b a b c a c b a a b c a b c...

Si E = $A^{\{0,1,2,3,4,5\}}$ et x = abcabc alors x ∘ s = c b a b c a.

(4) On prend pour ensemble E l'ensemble P des couples non ordonnés d'entiers consécutifs de {0,...,N} ; il a donc N éléments. Si s_1 et s_2 sont dans $\mathcal{S}$, on note $s_1 * s_2 = s_1 \circ s_2$ et on définit l'action de $\mathcal{S}$ sur P par : $\mathcal{S} \times P \to P$, $(s, \{x,x+1\}) \mapsto s.\{x,x+1\} = \{s(x), s(x+1)\}$.
Le fait que $\forall f \in \mathcal{S}_1$ on ait $|f(x) - f(x+1)| = 1$ garantit en effet qu'on a bien défini une action de $\mathcal{S}$ sur P.

En fait, pour ce cas, nous ne nous intéressons pratiquement pas à la chaîne associée, mais seulement à l'action de $\mathcal{S}$ sur P du point de vue des classes, et nous n'aurons besoin que du cas $N < \infty$ c'est-à-dire S borné.

(5) $E = \{0,\ldots,N\}^{\{0,\ldots,N\}}$ (et donc $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ si S est non borné). Si s_1 et s_2 sont dans $\mathcal{S}$ on note $s_2 * s_1 = s_2 \circ s_1$ et on définit l'action de $\mathcal{S}$ sur E par : $(s,x) \longmapsto s.x = s \circ x$.

Cette chaîne est un perfectionnement de la chaîne (1). Elle n'est étudiée qu'au chapitre 4. Les outils accumulés avant rendront son étude relativement facile.

Les cinq cas que nous venons d'évoquer constituent une sorte de panorama général. Nous aurons souvent à étudier des sous chaînes, généralement obtenues en remplaçant {0,...,N} par les ensembles C_r décrits au chapitre 2.

Pour des raisons techniques nous allons étudier tout de suite le cas n°4.

2°- Action du semi-groupe $\mathcal{S}$ sur les paires d'éléments consécutifs de {0,1,...,N}.

Soit donc E = {0,...,N} , $P_E = \left\{\{x,x+1\} \ , \ 0 \le x < N\right\}$ et $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions sur E engendré par $\{ f_y, y \in S \}$, avec $S \subset E$ et sup S = N. L'action de $\mathcal{S}$ sur P_E est telle que définie dans (4) ci-dessus. Nous avons :

Théorème 1. *Si PGCD(S) = 1, alors $\mathcal{S}$ agit transitivement sur P_E .*

La démonstration du Théorème repose sur les Propositions 2 et 3 ci-dessous :

Proposition 2. *Soient $0 < s < N$, $PGCD(s,N) = 1$, $\mathcal{S}$ le semi-groupe engendré par f_s et f_N, $E = \{0,\ldots,N\}$, $P_E = \{\{x,x+1\}, 0 \le x < N\}$; alors $\forall\, q \in P_E$, $\mathcal{S}.q = P_E$.*

Démonstration.

Pour $x = 0,1,\ldots,N-1$, on note $q(x) = \{x,x+1\}$. Soit $0 \le x < N$ et r_o et k_o tel que $x = r_o + k_o s$.

Si $0 \le j \le k_o$, $f_s^j(q(x)) = q(r_o + (k_o-j)s)$; $f_s(q(r_o)) = q(s-r_o-1)$ et $f_N(q(s-r_o-1)) = q(N-s+x_o)$. Définissons alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'entier $r_p \in \{0,1,\ldots,s-1\}$ par $r_p \equiv p\,N + x \bmod s$ et l'entier k_p par $k_p = \sup\{k; r_p + ks < N\}$.

Par construction des entiers r_p et k_p nous avons : $\forall\, p \ge 1$, $N-s+r_{p-1} = r_p + k_p s$.

Montrons par récurrence sur p que : $q(r_p)$, $q(s-r_p-1)$, $q(N-s+r_p) \in \mathcal{S}(q(x))$, $\forall\, p \ge 0$. C'est vrai pour p=0.

Si c'est vrai pour p-1 alors $q(N-s+r_{p-1}) \in \mathcal{S}(q(x))$; or $N-s+r_{p-1} = r_p + k_p s$. Donc $f_s^{k_p}(q(N-s+r_{p-1})) = q(r_p)$, $f_s(q(r_p)) = q(s-r_p-1)$ et $f_N(q(s-r_p-1)) = q(N-s+r_p)$ sont dans $\mathcal{S}(q(x))$.

Observons alors que $r_i \equiv r_j \bmod s \Rightarrow i-j \equiv 0 \bmod s$, car $PGCD(s,N) = 1$. Donc $p \to r_p$ est une application injective donc bijective de $\{1,\ldots,s\}$ dans $\{0,1,\ldots,s-1\}$ et, par définition de k_p,

$$\bigcup_{p=1}^{s} \{ r_p, r_p+s,\ldots,r_p+k_p s \} = \{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Puisque $q(r_p + k_p s) \in \mathcal{S}(q(x))$, $\forall\, p=1,2,\ldots,s$, $f^j(q(x_p+k_p-s)) = q(r_p+(k_p-j)s)$ est dans $\mathcal{S}(q(x))$ pour $j=0,1,\ldots,k_p$. Donc $P_E \subset \mathcal{S}(q(x))$; et $\mathcal{S}q(x) = P_E$. Comme $\mathcal{S}$ comprend l'identité $f_N \circ f_N$, $\mathcal{S}.P_E = P_E$ d'où la Proposition 2.

□

Proposition 3 :

Soient $0 < s < N$, $PGCD(s,N) = d$, $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions engendré par δ_s et δ_N, $E = \{0,1,\ldots,N\}$, $P_E = \{\{x,x+1\}, 0 \le x < N\}$, $C_r = \{x \in E \;\; x = \pm r \bmod d\}$ pour $r = 0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$. Pour $r \ne \frac{d-1}{2}$ soit $P_r = \{q(x) \in P_E, x \equiv r \bmod d \text{ ou } x \equiv -r-1 \bmod d\}$ et enfin $P_{\frac{d-1}{2}} = \{ q(x) \in P_E, x \equiv r \bmod d \}$. Alors : les classes d'intransitivité de $\mathcal{S}$ sont $P_0, P_1, \ldots, P_{\frac{d}{2}-1}$ si d est pair et $P_0, P_1, \ldots, P_{\frac{d-1}{2}}$ si d est impair.

Démonstration.

Soit $m = (d_1-1)/2$ si d est impair et $m = \frac{d}{2} - 1$ si d est pair et observons que les P_r forment une partition de P_E.

si $r = \frac{d-1}{2}$: soit $q(x) \in P_{\frac{d-1}{2}}$ et montrons que $\mathcal{S}(q(x)) = P_{\frac{d-1}{2}}$.

Définissons r_o et k_o tel que $x = r_o + k_o s$; alors $q(r_o)$, $q(s-r_o-1)$, $q(N-s+r_o) \in \mathcal{S}(q(x))$ si r_p et k_p sont tels que $r_p \equiv pN + x \bmod s$ et $k_p = \sup\{k, r_p+ks < N\}$, $\forall\, p \geq 1$.

On a

$N-s + r_{p-1} = r_p + k_p s$, $\forall\, p \geq 1$, et donc : $\forall p$, $q(r_p+k_p s),\ldots,q(r_p) \in \mathcal{S}(q(x))$

comme $\bigcup_{p=0}^{\infty} \{r_p+js,\ j=0,1,\ldots,k_p\} = \{ y \in E ,\ y \equiv r \bmod d \}$

donc $P_{\frac{d-1}{2}} \subset \mathcal{S}(q(x))$, mais comme $P_{\frac{d-1}{2}}$ est stable sous l'action de $\mathcal{S}$ on a $\mathcal{S} P_{\frac{d-1}{2}} = P_{\frac{d-1}{2}}$.

si $r \neq \frac{d-1}{2}$: soit $q(x) \in P_r$, ou $x \equiv r \bmod d$ ou $x \equiv -r-1 \bmod d$; dans le 2ème cas on se ramène au 1er en prenant $q'(x) = f_N(q(x)) \in P_r$. Soit donc $q(x) \in P_E$ tel que $x \equiv r \bmod d$ et r_o et k_o tels que $x = r_o + k_o s$, alors $q(r_o + (k_o-1)s),\ldots,q(r_o) \in \mathcal{S}(q(x))$, $q(s-r_o-1)$, $q(N-s+r_o) \in \mathcal{S}(q(x))$.

Définissons r_p et k_p tel que $r_p \equiv pN+x \bmod s$ et $k_p = \sup\{k, r_p+ks < N\}$ pour $p \geq 1$.

On a $\forall\, p \geq 1$ $\quad N-s+r_{p-1} = r_p+k_p s$ et $q(r_p+k_p s),\ldots,q(r_p) \in \mathcal{S}(q(x))$.

Comme $\bigcup_p \{r_p+js,\ j=0,1,\ldots,k_p\} = \{ y \in E ,\ y \equiv +r \bmod d \}$

on a : $\mathcal{S}(q(x)) \supset \{q(y),\ y \equiv r \bmod d\}$

et $\mathcal{S}(f_N)(q(x)) \supset \{q(y),\ y \equiv -r-1 \bmod d\}$

et donc $\mathcal{S}(q(x)) \supset P_r$.

Du fait que P_r est stable sous l'action de $\mathcal{S}$ on a finalement $\mathcal{S} P_r = P_r$. D'où la Proposition 3.

□

Démonstration du théorème.

Soit $S = \{s_1,s_2,\ldots,s_n,N\}$, PGCDS = 1 ; P_E les paires d'éléments consécutifs de $E = \{ 0,1,\ldots,N \}$ et $\hat{\mathcal{S}}$ le semi-groupe de fonctions engendré par $(f_s)_{s \in S}$; E_{s_i} le semi-groupe de fonctions engendré par f_{s_i} et f_N , $i=1,2,\ldots,n$; nous avons $E_{s_n} \circ E_{s_{n-1}} \circ \ldots \circ E_{s_1} \subset \mathcal{S}$. Nous voulons montrer que

$\forall\ q(x) \in P_E$, $\mathcal{S}(q(x)) \supset P_E$.

Il suffit de montrer : $\forall\ q(x) \in P_E$, $E_{s_n} \circ \ldots \circ E_{s_1}(q(x)) \supset P_E$.

Soient $d_i = PGCD(s_i,N)$ et $P_{r_i}^{d_i}$ les classes d'intransitivité de E_{s_i}

$r_i = 0,1,\ldots, \frac{d_i-1}{2}$ si d_i est impair et $r_i = 0,1,\ldots, \frac{d_i}{2} - 1$ si d_i est pair,

$i=1,\ldots,n$.

Nous allons procéder de proche en proche ; posons $m_i = \begin{cases} (d_i-1)/2 \text{ si } d_i \text{ est impair} \\ d_{i/2}-1 \text{ si } d_i \text{ est pair} \end{cases}$

si n = 1, c'est la proposition 1 ;

si n = 2 soit donc $S = \{s_1,s_2,N\}$ et $q(x) \in P_E$, $\exists\ r_1 \in \{0,1,\ldots,m_i\}$ tel que $q(x) \in P_{r_1}^{d_1}$;

Si l'on admet alors que : (1) $P_{r_1}^{d_1} \cap P_{r_2}^{d_2} \neq \emptyset$, $\forall\ r_2 \in \{0,1,\ldots,m_2\}$, nous avons alors d'après la proposition 2 encore que :

$$E_{s_2}(P_r^{d_s}) = \bigcup_{r_2=o}^{m_2} P_{r_2}^{d_2} = P_E .$$

En réitérant le procédé nous avons à l'ordre p :

$E_{s_p} \circ E_{s_{p-1}} \circ \ldots \circ E_{s_1}(q(x))$ qui est une réunion de classes telle que :

$$\exists\ r_p \in \{0,1,\ldots,m_p\} \text{ tel que } E_{s_p} \circ E_{s_{p-1}} \circ \ldots \circ E_{s_1}(q(x)) \supset P_{r_p}^{d_p} .$$

En réitérant jusqu'à l'ordre n-1, nous avons :

$$\exists\ r_{n-1} \in \{0,1,\ldots,m_{n-1}\} \text{ tel que } E_{s_{n-1}} \circ \ldots \circ E_{s_1}(q(x)) \supset P_{r_{n-1}}^{d_{n-1}} ,$$

et si l'on admet que : (2) $P_{r_{n-1}}^{d_{n-1}} \cap P_{r_n}^{d_n} \neq \emptyset$, $\forall\ r_n \in \{0,1,\ldots,m_n\}$,

alors $E_{s_n}(P_{r_{n-1}}^{d_{n-1}}) = \bigcup_{r_n=o}^{m_n} P_{r_n}^{d_n} = P_E$ d'après la proposition 2 toujours, et par

conséquent $E_{s_n} \circ E_{s_{n-1}} \circ \ldots \circ E_{s_1}(q(x)) \supset P_E$;

Il reste à établir (1) et (2). Il est évident que (1) $\Leftrightarrow$ (2).D'autre part (1) équivaut à montrer que : $\forall\ r \in \{0,1,\ldots,m_1\}$ et $r' \in \{0,1,\ldots,m_2\}$, $\exists\ x \in E$ tel que : $x \equiv r \bmod d_1$ et $x \equiv r' \bmod d_2$ avec $x \in E$ et $PGCD(d_1,d_2) = 1$.

D'après le théorème chinois du reste [7] , le système de congruences :

(1') $x \equiv r \bmod d_1$ et $x \equiv r' \bmod d_2$, $(d_1,d_2) = 1$, admet toujours des solutions.

Montrons qu'il existe des solutions de (1') qui sont dans E. Soient x et x' deux solutions distinctes ; $x - x' \equiv 0 \bmod(d_1d_2)$ car $x - x' \equiv 0 \bmod d_1$ et $x-x' \equiv 0 \bmod d_2$;

d'autre part $d_1d_2 \leq N$. En effet : $(d_1,d_2) = 1 \Rightarrow d_1d_2 = PPCM(d_1,d_2)$ or N multiple de d_1 et aussi de d_2, donc $d_1.d_2$ divise N.

ceci achève la démonstration du théorème ·

□

Chapitre II : LA CHAÎNE DE FELLER SUR $\mathbb{N}$.

Dans ce chapitre, nous étudions la chaîne de Feller proprement dite sur $\mathbb{N}$. Rappelons que cela signifie qu'on se donne une suite $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et de même loi μ et qu'on considère $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $X_0 = x$ et $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ (chaîne 1 décrite au Chap.1.1). On note toujours $S = \{y \in \mathbb{N}, P(Y_n = y) > 0\}$, $f_y(x) = |x-y|$ et $\mathcal{S}$ le semi-groupe pour la composition engendré par $\{f_y ; y \in S\}$.

Etudier cette chaîne de Markov à temps discret sur un ensemble fini ou dénombrable consiste d'abord à répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les classes de la chaîne, en particulier les classes essentielles ?
- Quelles sont leurs périodes ?
- Quels sont leurs types (récurent positif, récurrent nul ou transient) ?

La première est d'une surprenante difficulté si S n'est pas égal à un intervalle $\{0,1,\ldots,N\}$. Une réponse complète sera donnée dans les §1 (S borné) et §2 (S non borné) par des considérations d'arithmétique élémentaire. Ce travail sera aussi utile dans les chapitres suivants. Le §3 montre que les périodes sont 1 ou 2. Le §4 caractérise le cas récurrent positif par $\mathbb{E}(Y_n)<\infty$. Si $E(Y_n) = \infty$ la séparation entre le cas récurrent nul et le cas transient reste à faire. Le §5 est consacré à une généralisation simple qui considère le cas où les Y_n sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Les résultats du §1 y sont utilisés pour décrire les classes essentielles de cette généralisation.

§1. Etude de la chaîne $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}$ dans le cas où S est borné.

Si N = sup S est fini, il est évidemment possible d'étudier la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}$ et non sur l'intervalle $\{0,\ldots,N\}$. C'est cependant peu intéressant car il est clair qu'aucun état de $\{N+1, N+2,\ldots\}$ n'est essentiel, comme on le voit facilement. On se contente donc d'étudier la chaîne sur $\{0,\ldots,N\}$.

Théorème 1 : *Soit* $S \subset \{0,1,\ldots,N\}$, $N = \sup S < \infty$, $d = PGCDS$ *et* $\mathcal{S}$ *le semi-groupe de fonctions de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *engendré par* $\{f_y,\ y \in S\}$. *Alors* $\forall\ x \in E,\quad \mathcal{S}\{x\} = \{\ y \in E\ ;\ y \equiv \pm x \bmod d\ \}$.

Corollaire : *Avec les mêmes notations que ci-dessus les classes d'intransitivité du semi-groupe* $\mathcal{S}$, *engendré par* $\{f_y,\ y \in S\}$ *sont exactement les* $C_r = \{y \in E,\ y = \pm r \bmod d\}$, $r = 0,1,\ldots,\ [\frac{d}{2}]$.

Démonstration du corollaire :

D'après le Th.1 si $x \in E$ et $x \equiv \pm r \bmod d$, $\mathcal{S}(x) = C_r$; Donc $\mathcal{S}\,C_r \subset C_r$ et C_r est une réunion de classes.

Soit d'autre part $x_0 \in C_r$ un point dans une classe maximale (pour l'ordre partiel entre les classes) ; il en existe car la chaîne est finie et C_r étant une réunion fermée de classes possède forcément une classe maximale car c'est une réunion finie. $\mathcal{S}(x_0)$ est donc fermé et est égal à la classe de x_0. Or d'après le Théorème, $\mathcal{S}(x_0) = \{y \in E\ ;\ y = \pm x_0 \bmod d\ \} = C_r$ et $\mathcal{S}.C_r = C_r$ car $\mathcal{S}(x_0)$ est fermé. Par conséquent C_r est une classe d'intransitivité pour $\mathcal{S}$. □

La démonstration du Théorème reposera sur les Propositions 1,2 et 3 ainsi que sur l'observation immédiate que E est une réunion de classes essentielles pour $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ car fermée sous l'action de $\mathcal{S}$.

Notations : Dans le cas particulier où $S = \{s,N\}$ soit $d = PGCD(s,N)$; pour $x \in \{0,\ldots,N\}$ on considère la suite $(E_s^n(x))_{n=0}^{\infty}$ définie par $E_s^0(x) = \{x\}$, $E_s^n(x) = |S - E_s^{n-1}(x)|$. Si $E_s(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_s^n(x)$, on a $E_s(x) = \mathcal{S}\{x\}$.

Pour $x \in E$ soient $(r_p)_{p=0}^{\infty}$ et $(k_p)_{p=0}^{\infty}$ les suites définies par :

r_0 et k_0 sont tels que : $x = r_0 + k_0 s$, $\quad 0 \le r_0 < s$;

r_1 et k_1 tels que : si $r_0 \neq 0$, $N - r_0 + s = r_1 + k_1 s$, $\quad 0 \le r_1 < s$

si $r_0 = 0$, on prend $N = r_1 + k_1 s$, $\quad 0 \le r_1 < s$.

Plus généralement, r_p et k_p sont définis par : $r_p \equiv pN + x \bmod s$ et $k_p = \sup\{k\ ;\ r_p + ks \leqslant N\}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$.

Alors on a :

Proposition 1. : *Avec les notations ci-dessus on a :*
$\bigcup_{p=o}^{\infty} \{r_p + js \ , \ j=0,1,\ldots,k_p\} = \{y \in E, \ y \equiv x \ mod \ d \}$

Démonstration.

Remarquons que $\forall$ p, $r_p \in E_s(x)$..En effet, nous avons par construction : r_o et $r_1 \in E_s(x)$. Si $r_p \in E_s(x)$, alors ou $r_p \neq 0$ et alors s-r_p et N-s+$r_p \in E_s(x)$ et donc $r_{p+1} \in E_s(x)$, ou $r_p = 0$ et alors $s \in E_s(x)$ et par définition de r_{p+1} et k_{p+1} , $r_{p+1} \equiv N \bmod s$ et N-1, N-2s,...,N- s = $r_{p+1} \in E_s(x)$: la récurrence est étendue.

Montrons que : $\bigcup_p \{r_p+js, j=0,1,\ldots,k_p\} \subset \{y \in E, \ y \equiv x \bmod d\}$.

On a : $\forall$ p $\geq$ 0, $\forall$ j=0,1,...,k_p , $r_p \equiv x \bmod d$. Donc $\forall$ y, y = r_p+js $\Rightarrow$ y $\equiv$ x mod d ; d'où l'inclusion.

Réciproquement si y $\in$ E, y $\equiv$ x mod d, montrons qu'il existe p > 0, et j, 0 $\leq$ j $\leq$ k_p tel que y = r_p + js.

Si y $\in$ E, y $\equiv$ x mod d $\exists$ λ, a,b des entiers tel que y = x + λaN + λbs.

$r_p \equiv p\,N + x \bmod s \Rightarrow y - r_p \equiv (\lambda a - p)N \bmod s$;

soit p_o = s:d, p_o > 0 et p > 0 tel que $\lambda a - p \equiv 0 \bmod p_o$; soit k tel que $\lambda a - kp_o = p$ et $N = N_1 d$.

On a y - r_p = ks N_1 + (λb-α)s, où α est un entier. Donc y $\equiv r_p \bmod s$.

D'où l'inclusion,et l'égalité cherchée. ||

Proposition 2 : *Soient a,b,c trois entiers positifs, a et b premiers entre eux, N = abc,* $A_a(x) = \{ y \in E, \ y \equiv \pm x \ mod \ a\}$, $A_b(x) = \{y \in E, \ y \equiv \pm x \ mod \ b\}$; *alors* $A_a \circ A_b(x) = A_1(x)$.

Démonstration.

Soit x $\in$ E, x = β + B , 0 $\leq$ β < b-β .

$A_b(x) = \{0 \leq y \leq abc \ , \ y \equiv \pm\beta \bmod b\} = \{\beta, b-\beta, b+\beta,\ldots,abc-\beta\}$

(abc + b-β >abc) On a :

$$A_a \circ A_b(x) = \left\{ \bigcup_{k=o}^{ac-1} A_a(\beta+kb) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{ac} A_a\,(kb-\beta) \right\} .$$

Soient les entiers ρ_k et ρ'_k tels que : $kb+\beta \equiv \rho_k \bmod a$ et $kb-\beta = \rho'_k \bmod a$, respectivement pour $0 \le k \le a-1$ et $1 \le k \le a$; $0 \le \rho_k < a$ et $0 \le \rho'_k < a$.

$$A_a \circ A_b(x) = \left\{ \bigcup_{k=0}^{a-1} A_a(\rho_k) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{a} A_a(\rho'_k) \right\} .$$

Soit $y \in [0,abc[$, il existe r et s tel que $y = r+sa$, $0 \le r < a$ et il existe p et q tels que $s = p + qb$ $0 \le p < b$ et $y = r + p\,a + q\,a\,b$ avec $0 \le r < a$, $0 \le p < b$, $0 \le q < c$.

Les applications $k \mapsto \rho_k$ et $k \mapsto \rho'_k$ sont injectives donc bijectives ; en effet $\rho_k = \rho_{k'} \Longrightarrow k-k' \equiv 0 \bmod a \Rightarrow k=k'$ car $k-k' \in \{-(a-1),\ldots,a-1\}$. De même pour $k \mapsto \rho'_k$.

On a : $y \equiv r \bmod a$ et comme $r \in \{0,1,\ldots,a-1\}$, $\exists\, k \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ tel que $\rho_k = r$ ou $\exists\, k \in \{1,\ldots,a\}$ tel que $\rho'_k = r$ et alors $y \equiv \rho_k \bmod a$ ou $y \equiv \rho'_k \bmod a$. Donc $y \in A_a(\rho_k) \cup A_a(\rho'_k)$ et comme $A_1(x) \subset A_a \circ A_b(x)$ on a l'égalité . □

Proposition 3 : *Soient $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, $N = abcd$. On a avec les mêmes notations qu'à la Proposition 2, pour $0 \le x \le N$, $A_{ad} \circ A_{bd}(x) = A_d(x)$.*

Démonstration.

On a $A_d(x) \supset A_{ad} \circ A_{bd}(x)$, pour $0 \le x < N$.

Réciproquement si $0 \le x < N$, $x = r+d(\beta+b(\alpha + ma))$ avec $0 \le r < d$, $0 \le \beta < b$, $0 \le \alpha < a$. Par définition $A_{bd}(x) = A_{bd}(r + \beta d)$ et

$$A_{ad} \circ A_{bd}(x) = \left\{ \bigcup_{k=0}^{ac-1} A_{ad}(kbd + \beta d + r) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{ac} A_{cd}(kbd - \beta d - r) \right\}.$$

Soient ρ_k et ρ'_k tels que $\rho_k \equiv kb + \beta \bmod a$ et $\rho'_k \equiv kb - \beta \bmod a$ avec respectivement $k = 0,1,\ldots,$ ac-1 et $k = 1,\ldots,ac$; ρ_k et $\rho'_k \in [0,a[$.

Si $y \in A_d(x)$ ou bien $y \equiv x \bmod d$, c'est-à-dire $y \equiv r \bmod d$ et dans ce cas il existe h, $0 \le h < abc$ si $r \neq 0$ (respect. $0 \le h \le abc$ si $r=0$) tel que $h \equiv \rho_k \bmod a$. En effet $k \mapsto \rho_k$ de $\{0,1,\ldots,a-1\}$ dans $\{0,1,\ldots,a-1\}$ est injective donc bijective. Donc $y = r + kbd + \beta d$ c'est-à-dire $y \in A_{ad} \circ A_{bd}(x)$. ou bien $y \equiv -x \bmod d$ c'est-à-dire $y \equiv -r \bmod d$ et dans ce cas il existe h, $0 \le h < abc$ si $r \neq 0$ ($0 \le h \le abc$ si $r=0$) tel que $h \equiv \rho'_k \bmod a$ car $k \mapsto \rho'_k$ est injective donc bijective de $\{1,\ldots,a\}$ dans $\{1,\ldots,a\}$.

Donc $y = k\,bd - \beta d - r$. Donc $y \in A_{ad} \circ A_{bd}(x)$. Par conséquent on a $A_d(x) \subset A_{ad} \circ A_{bd}(x)$ et l'égalité . □

Démonstration du Théorème 1.

1°) Cas où S = {s,N}

D'après la Prop.1, on a pour $x \in E$

$$E_s(x) \supset \bigcup_{p=o}^{\infty} \{r_p + js \ , \ j=0,1,\ldots,k_p\} = \{y \in E, \ y \equiv +x \bmod d\}$$

mais comme $E_s(x) = E_s(n-x)$, $E_s(x) \supset \{y \in E \ , \ y \equiv \pm x \bmod d\}$

Réciproquement si $y \in E_s(x)$, $\exists$ n tel que $y \in E^n(x)$ et alors $y \equiv \pm x \bmod d$.

Par conséquent $E_s(x) = \mathcal{S}.x = \{ \ y \in E, \ y = \pm x \bmod d \ \}$.

2°) Cas général

Soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_q, N\}$, N = sup S et d_q = PGCDS. Définissons la suite $(E^n(x))_{n=o}^{\infty}$ pour $x \in E$ par $E^o(x) = \{x\}$, $E^n(x) = |E^{n-1}(x) - S|$ Soit $E(x) = \bigcup_{n=o}^{\infty} E^n(x)$. Nous avons $E(x) = \mathcal{S}(x)$.

Soit $A_{d_q}(x) = \{y \in E \ , \ y \equiv \pm x \bmod d_q \}$. Nous avons que $E(x) \subset A_{d_q}(x)$.

En effet si $y \in E(x)$, $\exists$ n tel que $y \in E^n(x)$ et alors $y \equiv \pm x \bmod d_q$.

Avec les mêmes notations que ci-dessus pour établir le théorème il suffit d'établir que $E_{s_q} \circ \ldots \circ E_{s_1}(x) \supset A_{d_q}(x)$ car $E(x) \supset E_{s_q} \circ \ldots \circ E_{s_1}(x)$. Pour cela on procède par récurrence sur q.

D'après le 1°) c'est vrai pour q=1 ; supposons que ce soit vrai pour p, c'est-à-dire si $d_p = PGCD(s_o, \ldots, s_1, N)$, $E_{s_p} \circ \ldots \circ E_{s_1}(x) \supset A_{d_p}(x)$.

D'après la Proposition 3 :

$\forall \ m \in \mathbb{N}$, m divisant N, $E_s(A_m(x)) = A_d(x)$, si $d = PGCD(s,m,N)$ (il suffit de prendre $s = ad$, $m = bd$, $N = abcd$).

On a donc : $E_{s_{p+1}} \circ E_{s_p} \circ \ldots \circ E_{s_1}(x) = E_{s_{p+1}}(A_{d_p}(x)) = A_{d_{p+1}}(x)$ avec $d_{p+1} = PGCD(s_{p+1}, d_p, N)$. Ce qui étend la récurrence.

Donc $E_{s_q} \circ \ldots \circ E_{s_1}(x) = A_{d_q}(x)$.

Par conséquent $E(x) \supset A_{d_q}(x)$. □

2 - Etude de la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}$ dans le cas où S est non borné

Théorème 2 : *Soit $S \subset \mathbb{N}$ avec $\sup S = \infty$ et $d = PGCDS$, alors :*

1°) $\mathcal{S}$ agit transivement sur $\mathbb{N} \iff d=1$.

2°) si $d > 1$, $\mathcal{S}$ possède $\frac{d+1}{2}$ classes d'intransitivité si d est impair et $\frac{d}{2}+1$ si d est pair qui sont les $C_r = \{y \in \mathbb{N},\ y \equiv \pm r \text{ modulo } d\}$

$r = 0,1,\ldots, [\frac{d}{2}]$.

Démonstration.

Si $N \in S$, soit $S_N = \{ y \in S,\ y \leq N \}$ et soit $d_N = PGCDS_N$. On a : $d_N \to d$ quand $N \to \infty$ et $\exists\ N_o$, $N \geq N_o$, $d_N = d$.

Soit $x \in \mathbb{N}$ et $r = 0,1,\ldots, [\frac{d}{2}]$, tel que $x \equiv \pm r$ modulo d. Désignons par $\mathcal{S}_N$ le semi-groupe de fonctions de $[0,N]$ dans $[0,N]$ engendré par $(f_s)_{s \in S_N}$; si C_N désigne la classe d'intransitivité de x pour $\mathcal{S}_N$, d'après le Th.1, $C_N(x) = \{y,\ 0 \leq y \leq N ,\ y \equiv \pm r \text{ modulo } d_N \}$.

Or $C_N(x) \uparrow C_r$ et si $C(x) = \mathcal{S}.x$, $\forall$ N, $C(x) \supset C_N(x)$ et donc $C(x) \supset C_r$;

D'autre part C_r est fermé et $\forall\ y \in C(x)$, $\exists\ s \in \mathcal{S}$ tel que s.g. $\in C_r$, on en déduit que $C(x) = C_r$. □

3 - Périodes des classes

Théorème 3 : *Soient $S = \{y \in \mathbb{N},\ P_y > 0\}$, $d = PGCDS$ et $S_1 \subset \mathbb{N}$ tel que $S = dS_1$. alors*

1°) ou $\exists$ s pair dans S_1 et alors toutes les classes de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sont apériodiques

2°) ou $S_1 \subset$ impairs et d est impair et alors toutes les classes sont de période 2

3°) ou $S_1 \subset$ impairs et d est pair et alors $C_0, C_1, \ldots, C_{\frac{d}{2}-1}$ sont de période 2 et $C_{\frac{d}{2}}$ est apériodique.

Démonstration. Remarquons que : 1°) toutes les classes sont au plus de période 2, en effet pour $r \leq [\frac{d}{2}]$, $f_{y_1} \circ f_{y_2}(r) = r$ si $y_1 = y_2 > 0$, $y_1 \in S$ et donc la période de C_r est au plus 2.

2°) si d=1, le théorème est immédiat. En effet : - s'il existe s pair dans S, soit $s = 2p$ alors $f_s(p) = p$ et donc la période est 1.

- si $S \subset$ impairs, montrons que pour $x \in \mathbb{N}$, $x \leq \sup S$, s'il existe $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$ tel que $f_{y_n} \circ \ldots \circ f_{y_1}(x) = x$ alors n est pair.

En effet soit $y_1, \ldots, y_n$ tel que $f_{y_n} \circ \ldots \circ f_{y_1}(x) = x$ et $x_o = x$, $x_1, \ldots, x_n = x$ tel que $x_{j+1} = f_{y_{j+1}}(x_j) = |y_{j+1} - x_j|$, $j=0,1,\ldots,n-1$; alors $x_{j+1} \equiv x_j + 1 \bmod 2$ $\forall\ j=0,1,\ldots,n-1$ et donc $x_n - x_o \equiv n \bmod 2$ donc n pair. Ceci avec la remarque du 1° établit le théorème dans ce cas.

Cas où d > 1.

le 2°) si C_r est une classe et $x \in C_r$, avec la même méthode que précédemment si $\exists\ y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{S}$ tel que $f_{y_n} \circ \ldots \circ f_{y_1}(x) = x$ alors n est pair ; et, avec la remarque du 1°) on a que C_r est de période 2.

le 1°) 1er cas : $S = \{s, N\}$

Soit $d = PGCD(s,N)$; $\frac{s}{d} \times \frac{N}{d}$ est pair. On sait déjà que toutes les classes sont au plus de période 2.

Soit C_r une classe et $k_o s + r_o$ le maximum de C_r. On sait que si $r_j \equiv jN + r_o$ modulo s et si $k_j = \sup \{k \text{ tel que } ks + r_j \leq N\}$, alors on a le diagramme suivant

$$k_o s + r_o \to (k_o-1)s + r_o \to \ldots r_o \to s - r_o \to N - s + rs = r_1 + k_1 s \to \ldots r_1 \to$$
$$\ldots r_{\frac{s}{d}-1} \to s - r_{\frac{s}{d}-1} \to N - s + r_{\frac{s}{d}-1} = r_{\frac{s}{d}} + k_{\frac{s}{d}} s = r_o + k_o s .$$

car r_j est de période $\frac{s}{d}$.

Donc les cycles partant de $r_o + k_o s$ sont de longueur $k_o + k_1 + \ldots + k_{\frac{s}{d}-1} + 2\frac{s}{d}$. Nous avons à montrer que $k_o + k_1 + \ldots + k_{\frac{s}{d}-1}$ est impair. Introduisons l'application

$$\varphi : [0, N] \to [0, N] \text{ définie par } \varphi(x) = \begin{cases} x - s & s \leq x \leq N \\ N - x + s & 0 \leq x < s \end{cases}$$

On a $\varphi((k_o - j + 1)s + r_o) = (k_o - j)s + r_o$ et $\varphi(r_o) = N - s + r_o$, donc φ permet de parcourir le cycle partant de $r_o + k_o s$, en "sautant" de r_j à $N - s + r_j$ (φ "oublie" $s - r_j$) ; on peut résumer φ en disant que :

$\varphi(x) \equiv x - s$ modulo N.

On remarque aussi que : $0 \leq \varphi(x) \leq N$; $\varphi^n(x) \equiv x - ns$ modulo N et $0 \leq \varphi^n(x) \leq N$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, φ^n désigne l'itérée $n^{ième}$ de φ.

Soit pour simplifier $\beta = \frac{s}{d}$ et $K = k_0 + k_1 + \ldots + k_{\beta-1}$. D'après le diagramme on a : $\varphi^{k+p}(r_0 + k_0 s) \equiv r_0 + k_0 s - (K+\beta)s$ modulo N;

donc $(K+\beta)s \equiv 0$ modulo N; soit $\alpha = N/d$ on a : $(K+\beta)\beta d \equiv 0$ modulo $d \Rightarrow K+\beta=\alpha$ car $K+\beta$ est le 1er entier n tel que $ns \equiv 0$ mod N.

Donc K est impair et le cycle de longueur $K+2\beta$ est impair, ce qui établit le 1°).

2° cas = S a plus de 2 points.

Il suffit de montrer que pour une classe C_r, il existe toujours un cycle impair. Si s et $N \in S$, de parité différente et tel que $\frac{s}{d} \times \frac{N}{d}$ pair en utilisant le procédé précédent on a dans C_r, un cycle impair. Il en résulte donc que toutes les classes sont apériodiques.

Le 3°) :

Il est immédiat de voir que $C_{\frac{d}{2}}$ est apériodique ; en effet si s et $N \in S$, $s = s_1 d$ et $N = N_1 d$, $C_{\frac{d}{2}} \ni s_1 \frac{d}{2}$ et $N_1 \frac{d}{2}$ et $f_1(s_1 \frac{d}{2}) = s_1 \frac{d}{2}$ et $f_N(N_1 \frac{d}{2}) = N_1 \frac{N}{2}$ c'est-à-dire que $s_1 \frac{d}{2}$ et $N_1 \frac{d}{2}$ se refléchissent sur eux-mêmes. Donc $C_{\frac{d}{2}}$ est apériodique.

Montrons que si $r < \frac{d}{2}$ C_r est de période 2 ; il suffit de montrer que tous les cycles de C_r sont pairs, pour $r < \frac{d}{2}$.

Soit $r < \frac{d}{2}$ et soient $r_0 \in C_r$ et $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \in S$; pour $d = 2d'$, soit la suite $(r_j)_{j=i}^{n}$ définie par $r_{j+1} = |r_j - 2d' s_j|$, $j=0,1,\ldots,n-1$, avec $r_n = r_0$. La suite $(r_j)_j$ décrit tous les cycles partant de r_0. Nous avons à montrer que n est pair. Remarquons que pour tout $j = 1,2,\ldots,n$, il existe des entiers $\eta^{(j)}$ et $\varepsilon_0^{(j)}, \varepsilon_1^{(j)}, \ldots, \varepsilon_{j-1}^{j} \in \{-1,1\}$ tels que :

$r_j = \eta^{(j)} r_0 + 2d'(\varepsilon_0^{(j)} s_0 + \varepsilon_1^{(j)} s_1 + \ldots + \varepsilon_{j-1}^{(j)} s_{j-1})$; si j=0 on définit $\sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_i^{(j)} = 0$.

En effet, c'est vrai si j=1; supposons que c'est vrai pour $j < n$ et montrons que c'est alors vrai pour j+1.

Soit $r_j = \eta^{(j)} r_0 + 2d'(\varepsilon_0^{(j)} s_0 + \ldots + \varepsilon_{j-1}^{(j)} s_{j-1})$. On a :

$r_{j+1} = |r_j - 2d' s_j|$, donc $r_{j+1} = \eta^{(j+1)} r_0 + 2d'(\varepsilon_1^{(j+1)} s_0 + \ldots + \varepsilon_j^{(j+1)} s_j)$,

avec $\eta^{(j+1)} = \eta^{(j)}$, $\varepsilon_i^{(j+1)} = \varepsilon_i^{(j)}$ $i < j$ et $\varepsilon_j^{(j+1)} = -1$, si $r_j - 2d' s_j > 0$

et $\eta^{(j+1)} = -\eta^{(j)}$, $\varepsilon_i^{(j+1)} = -\varepsilon_i^{(j)}$, $i \leq j-1$ et $\varepsilon_j^{(j+1)} = 1$, si $r_j - 2d' s_j < 0$,

et la récurrence est étendue.

En particulier pour j=n on a :

$r_n = r_o = \eta^{(n)} r_o + 2d' \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^{(n)} s_i$; soit $\delta_n = \sum_{i=o}^{n} \varepsilon_i^{(n)} s_i$; on a :

$r_o = \eta^{(n)} r_o + 2d' \delta_n$.

Donc 1) ou $\eta^{(n)} = 1$ et alors $\delta_n = 0$ comme $\delta_n \equiv n \bmod 2$ donc n est pair

2) ou $\eta^{(n)} = -1$ et alors $r_o = d' \delta_n$ et $r_o < d' \Rightarrow \delta_n = 0$ et donc n est encore pair.

Il en résulte que pour $r < \frac{d}{2}$, C_r est de période 2 ; ce qui achève la démonstration du Théorème. ||

4 - Récurrence positive de la chaîne de Feller sur $\mathbb{N}$.

La chaîne qui nous occupe a été initialement considérée par Feller avec des v.a. à valeurs dans $[0,\infty[$ et non nécessairement dans $\mathbb{N}$. En fait, Feller se restreint au cas où les Y_n ont une densité et montre dans ce cas que :

$$\nu(dy) = P(Y_1 > y)\, 1_{[0,\infty[}(y)dy$$

constitue une mesure stationnaire de la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Naturellement, puique $\mathbb{E}(Y_1) = \int_0^{\infty} P(Y > y)dy$, ν est bornée si et seulement si $E(Y_1) < \infty$. Dans ce cas $\frac{1}{\mathbb{E}(Y_1)} \nu(dy)$ est une probabilité stationnaire pour $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.

C'est un exercice de montrer que ν est encore stationnaire sur $]0,\infty[$ lorsque Y_1 n'est plus de loi absolument continue. C'est seulement tout à fait récemment (après la publication de la note [8]) que le Professeur A. Joffe nous a indiqué l'article de F.B. Knight [3] consacré à ces questions. Knight montre en particulier deux résultats importants : le premier est le fait que, à une constante multiplicative près, ν est la seule mesure stationnaire sur $[0,\infty[$ si Y_n n'est pas concentrée sur un multiple de $\mathbb{N}$. Le second est le suivant qui figure également dans notre note.

Théorème 4. *Désignons par* $p_y = \mu(Y_1 = y)$ *avec* $y \in \mathbb{N}$, $S = \{ y ; P_y > 0 \}$, $N = \sup S \leq \infty$ *et* $d = PGCD S$. *Une mesure stationnaire pour la chaîne* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *sur* $\mathbb{N}$ *est donnée par :*

$$m_0 = \frac{1-p_0}{2} \quad \text{et, pour } i > 0 \ , \quad m_i = -\frac{-p_i}{2} + \sum_{k=i}^{\infty} p_k \ .$$

En particulier nous avons les équivalences suivantes :

(1) $\Sigma\, m_i < \infty \iff$ *(2)* $\mathbb{E}(Y_1) < \infty \iff$ *(3)* $\exists\, r \in \{0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]\}$ *tel que* C_r *soit récurrente positive* $\iff$ *(4)* $\forall\, r=0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$, C_r *est récurrente positive.*

5 - Remarques sur l'étude de la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ si Y_1 est dans $\mathbb{Z}$.

Considérons la chaîne $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{Z}$. Si $S = \operatorname{supp} \mu \subset \mathbb{N}$, cette chaîne est la chaîne (1) étudiée ci-dessus. Si $S \cap (-\mathbb{N}^+) \neq \emptyset$, nous allons distinguer deux cas :

- ou $S \cap \mathbb{N}^+ = \emptyset$ et alors la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ est transiente. Plus exactement si $0 \notin S$, chaque état est éphémère ; si $0 \in S$, si x est un état pour $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ou $x < 0$ et alors il est éphémère ou $x \geq 0$ et alors il est transient.

- ou $S \cap \mathbb{N}^+ \neq \emptyset$ et alors les classes essentielles de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sont données par

Théorème 5 : *Soient* $S_0 = S \cap \mathbb{N}$, $S_- = -S \setminus S_0$, $d_- = PGCS(S_-)$, $d_0 = PGCD(S_0)$ *et* $d = PGCD(d_0, d_-)$. *Alors si* y *est un état pour* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *alors ou* $y<0$ *et alors la classe essentielle de* y *est* $\{y\}$, *ou* $y \geq 0$ *et alors la classe essentielle de* y *est* $C(y) = \{x \in \mathbb{N},\ x \equiv \pm y \bmod d\}$.

Démonstration. Si y est un état pour $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, y est transient ; donc la classe de y est $\{y\}$. Si $y \geq 0$, l'ensemble $C(y) = \{x \in N,\ x \equiv \pm y \bmod d\}$ est fermé sous l'action du semi-groupe de fonctions de $\mathbb{Z}$ dans N, $\mathcal{S}$, engendré par $\{f_s,\ s \in S\}$. Nous voulons montrer que l'orbite de y sous l'action de $\mathcal{S}$ est $C(y)$. Il suffit de montrer que $\forall\, x \in \mathbb{N},\ x \equiv \pm y \bmod d \Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = x$.

Soit Σ et Σ_0 les semi-groupes d'entiers engendrés respectivement par S_- et S_0; $\exists$ A et A_0 tel que $\Sigma \supset \{Ad_-,(A+1)d_-,\ldots\}$ et $\Sigma_0 \supset \{A_0 d_0,(A_0+1)d_0,\ldots\}$.

Si $x = y+\gamma d$, $\exists\, B \geq A$ et $B_0 \geq A_0$ tel que $x = y + B_{d_-} - B_0 d_s$ et alors $y + Bd_- \in y + \Sigma$. Si $\mathcal{S}_-$ désigne le semi-groupe de fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$, engendré par $\{f_s,\ s \in S_-\}$, alors $\exists\ f_1 \in \mathcal{S}_-$ tel que $f_1(y) = y + Bd_- = y'$.

Si $\mathcal{S}_0$ désigne le semi-groupe de fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ engendré par

$\{f_s,\ s \in S_0\}$, d'après le Théorème 2, l'orbite de y' sous l'action de $\mathcal{S}_0$ est $\{z \in \mathbb{N},\ z \equiv \pm y' \bmod d_0\}$. Donc $\exists\ f_2 \in \mathcal{S}_0$ tel que $f_2(y') = y' - B_0 d_0$. Donc $f_2 \circ f_1(y) = x$ et $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{S}$. Si $x = -y + \gamma d$, avec les mêmes notations que ci-dessus, soient $B \geq A$ et $B_0 \geq A_0$, tels que $x = -y + Bd_- - B_0 d_0$, $y + B_{d_-} \in -y$.

Donc $\exists\ f_1 \in \mathcal{S}_-$ tel que $f_1(y) = -y + Bd_-$ et là encore d'après le Théorème 2, l'orbite de $y' = y + Bd_- \in \mathbb{N}$, sous l'action de $\mathcal{S}_0$ est $\{z \in \mathbb{N},\ z \equiv \pm y' \bmod d_0\}$, $\exists\ f_2 \in \mathcal{S}_0$ tel que $f_2(y') = y' - B_0 d_0$. Donc $f_2 \circ f_1(y) = -y + B_{d_0} - B_0' d_0 = x$ et $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{S}$.

Donc $x \equiv \pm y \bmod d \Longrightarrow \exists\ f \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = x$. □

Chapitre III : LA CHAINE DE FELLER RENVERSEE.

Soient $Y_1,\ldots,Y_n,\ldots$ des v.a. indépendantes et de même loi μ, à valeurs dans $[0,\infty[$. La chaîne de Feller $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ était définie par $X_n = |X_{n-1} - Y_n|$, $n \geq 1$, $X_0 = x$, ou encore par $X_n = |Y_n - |Y_{n-1} - |\ldots - |Y_1 - x|\ldots| = f_{y_n} \circ f_{y_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{y_1}(x)$. Nous l'avons étudiée au chapitre 2 sous l'hypothèse supplémentaire que $Y_n \in \mathbb{N}$. Ceci pose le problème naturel d'étudier le processus $H_n(x) = |Y_1 - |Y_2 - |\ldots - |Y_n - x|\ldots|$ $= (f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_n})(x)$.

Pour x fixé, $(H_n(x))_{n=0}^{\infty}$ est à valeurs dans $[0,\infty[$ mais n'est plus en général une chaîne de Markov. On peut cependant puisque $H_n(x)$ et $X_n(x)$ sont de même loi (pour x fixé) s'interroger sur le comportement asymptotique de $H_n(x)$, quand $n \to \infty$. Il n'est raisonable d'espérer que H_n tende vers une limite (ou presque) que si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ a une distribution stationnaire, c'est-à-dire si $E(Y_1) < \infty$. D'autre part nous allons nous contenter comme au chapitre 2 de supposer de plus les Y_n à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le cas général relèverait certainement de méthodes assez différentes (Martingales en particulier) des techniques arithmétiques et combinatoires qui sont utilisées ici.

L'idée principale est de considérer la fonction H_n (et non sa valeur en x) comme une chaîne de Markov ayant E^E pour espace d'états (ici Y_n est de loi μ, $S = \{j \in \mathbb{N},\ \mu(j) > 0\}$, $N = \max S \leq \infty$ et $E = \{0,1,\ldots,N\}$. On étudie donc ici la promenade aléatoire à droite sur le semi-groupe E^E.

De cette chaîne de Markov, il nous faut d'abord étudier les classes (le problème n'est pas trivial : qu'on songe qu'il y a 10 milliards d'états si

N=9...). Pour simplifier nous utiliserons constamment la chaîne auxilliaire obtenue en remplaçant E par un alphabet A, le plus souvent à 2 lettres. Si $\varphi : E \to A$, alors $H'_n(x) = \varphi \circ H_n(x)$ définit une chaîne de Markov $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ dans A^E.

Les Th. 1 et 2 du §1, décrivent les classes essentielles de A^E et E^E (si PGCDS=d=1) et de A^{C_r} et E^{C_r} (où C_r est défini au chapitre 2, Th.1). En fait le résultat du Th.1 est inclus dans celui du Th.2. Cependant la méthode de démonstration est différente et beaucoup plus simple pour le Th.1. Dans le cas d=1, on voit clairement que H'_n va converger, non toujours vers une constante, mais du moins finir dans une classe à 2 éléments comprenant des fonctions en dents de scie qui coïncident à translation près.

Le Th.2 considérant le cas S borné et d > 1 est d'une longueur décourageante. Aussi nous nous limitons à d=1 dans le cas où S est non borné. Dans ce cas nous faisons également l'hypothèse essentielle que $E(Y_1) < \infty$, c'est-à-dire que la chaîne de Feller $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ est récurrente positive. Les Théorèmes 3, 4 et 5 constituent alors les résultats principaux de notre travail.

Au Théorème 3, on décrit les classes récurrentes de $A^{\mathbb{N}}$ et de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. On y utilise l'action de $\mathcal{S}$ sur les couples vue au chapitre 1, §2. Au Théorème 4, on démontre la convergence au sens faible de H'_n vers une classe de fonctions à 1 ou 2 éléments (qui coïncident par translation) et ceci quelle que soit la fonction initiale H'_0. Ce mot "convergence faible" doit être entendue au sens suivant : si φ_n et $\varphi \in A^{\mathbb{N}}$ $\varphi_n \to \varphi$, $n \to \infty$, faiblement $\iff \forall\, K > 0, \exists\, N$ tel que $\varphi_n(k) = \varphi(k)$ $\forall\, k \in \{0,\ldots,K\}$ et $\forall\, n \geq N$.

Si on simule la chaîne en remplaçant ses états par des mots c'est-à-dire une suite de lettres, on voit cette suite de lettres progressivement n'utiliser que deux lettres au plus sur tout segment fini et se régulariser en une suite du type $\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$ ... (ou $\alpha\alpha\alpha$ ...).

Le Théorème 5 remplace A par $\mathbb{N}$. Si on simule la chaîne en représentant ses états par des graphes de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on voit ces graphes tendre (à translation près) vers une fonction de période 2 (vérifiant toujours $|h(x+1) - h(x)|$ = constante).

1 - Etude de la chaîne $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ dans le cas où S est borné.

Dans ce cas la chaîne $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ est la chaîne renversée sur E^E, avec $E = \{0,1,\ldots,N\}$ où $N = \sup S$. Soit A un alphabet et soit φ une application de E dans A. Nous allons étudier la chaîne $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $H'_n = \varphi \circ H_n$, sur A^E.

1° cas : S = E

Proposition 1 : *Soit* $h \in A^E$ *et* c *dans* $h(E)$ *tel que* : $\exists\, j \in E$ *tel que* $h(j)$ *et* $h(j+1) \neq c$ *alors* $\exists\, g \in \mathcal{S}$ *tel que si* $h \circ g = h'$ *on ait* $h'(E) \subset \{h(j), h(j+1)\}$.

Démonstration.

Soit la suite g_n de fonctions de E dans E définies par : $g_0(x) = x$, $\forall\, x \in E$; et $g_{n+1}(x) = g_n \circ f_1(x)$; $x \in E$.

$g_n(x) \in \{0,1\}$, si $0 \leq x \leq n \leq N$. En effet $g_1(x) \in \{0,1\}$; $0 \leq x \leq 1 \leq N$ et si $g_n(x) \in \{0,1\}$, $0 \leq x \leq n \leq N$, $g_{n+1}(x) = g_n(1-x) \in \{0,1\}$, $0 \leq x \leq n+1 \leq N$

et donc en particulier $g_N(x) \in \{0,1\}$, $\forall\, x \in E$.
Si on prend $g = f_{j+1} \circ g_N$, $g \in \mathcal{S}$ et $h' = h \circ g$ est tel que
$\forall\, x \in E$, $h'(x) \in \{h(j), h(j+1)\}$.

□

Théorème 1. *Si* $S = E$ *alors les seules classes essentielles pour la chaîne* $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ *sont*

1°) $\{h_{zt}, h_{tz}\}$ $z,t \in A$, $h_{tz}(x) = \begin{cases} t & x \text{ pair} \\ z & x \text{ impair} \end{cases}$ $x \in E$.

2°) $\{h_t\}$ où $h_t = h_{tt}$.

Démonstration.

Il est immédiat de constater que les ensembles $\{h_t\}$ et $\{h_{tz}, h_{zt}\}$, $z,t \in A$ sont des classes d'intransitivité pour $\mathcal{S}$. Nous avons donc à montrer que si $h \in A^E$ alors, ou $\mathcal{S}.h = h \circ \mathcal{S} = h_t$, ou $\mathcal{S}.h = \{h_{tz}, h_{zt}\}$, $z,t \in A$. Trois cas sont alors à considérer.

1. ou $|h(E)| = 1$, le théorème est trivial car $\exists\, t \in A$ tel que $h = h_t$

2. ou $|h(E)| = 2$, et alors, ou bien $\exists\, z,t \in A$ tel que $h = n_{zt}$ et c'est montré, ou bien $\exists\, j, j+1 \in E$ tel que $h(j) = h(j+1) = z, z \in A$, et alors d'après la proposition 1, $\exists\, g \in \mathcal{S}$ tel que $h \circ g = h_z$.

3. ou $|h(E)| \geq 3$, d'après la proposition 1, $\exists\, g \in \mathcal{S}$ tel que $h \circ g = h'$ est tel que $|h'(E)| \leq 2$ et le 1. et le 2. donnent le résultat. □

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur A, on peut donc prendre celui-ci infini ; le théorème 1, reste alors valable pour la chaîne $(H_n)_{n=0}^{\infty}$.

2ème cas : $S \subset E$

Soit d = PGCDS. Dans le cas où d > 1, c'est un problème compliqué de faire la classification de la chaîne $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ sur E^E. Nous allons nous contenter de la classification des chaînes $(H_n^r)_{n=0}^{\infty}$ sur $C_r^{C_r}$, $r=0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$ où $H_n^r = H_{n|C_r}$. Les chaînes $(H_n^r)_{n=0}^{\infty}$, $r=0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$ n'étant pas indépendantes entre elles, leurs classifications ne donnent pas celle de la chaîne $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ car si A_r est une classe pour $(H_n^r)_{n=0}^{\infty}$ $r=0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$, $A_0 \times A_1,\ldots \times A_{[\frac{d}{2}]}$ est tout au plus une réunion de classes pour $(H_n)_{n=0}^{\infty}$. Au reste cette classification des H_n^r suffit pour conclure sur le comportement de $(H_n(x))_{n=0}^{\infty}$ quand x est fixé dans un C_r.

Soient a et $b \in C_r$, et $r \neq \frac{d}{2}$. On note h_{ab} la fonction de C_r dans C_r définie par :

$h_{ab}(x) = a$ si $x \equiv \pm r \bmod 2d$ et $h_{ab}(x) = b$ si $x \equiv d \pm r \bmod 2d$, $h_{aa} = h_a$. (sur $C_{\frac{d}{2}}$ on définit uniquement h_a).

Observons alors que les ensembles $\{h_{ab},h_{ba}\}$ et $\{h_a\}$ sont des classes fermées sous l'action de $\mathcal{S}$.

Le but de ce qui suit est de montrer que les seules classes de la chaîne (H_n^r), $r = 0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$ sont justement ces ensembles. Nous avons :

Théorème 2 : *Soit $S \subset \{0,1,\ldots,N\}$; $N = Sup\ S < \infty$, $d = PGCDS$; pour $r = 0,1,\ldots,[\frac{d}{2}]$ soit $(H_n^r)_{n=0}^{\infty}$ la chaîne de Markov sur $C_r^{C_r}$ décrite ci-dessus. Alors, si A est une classe essentielle pour $(H_n^r)_{n=0}^{n=\infty}$:*

(1) ou bien $\exists\ a \in C_r$ tel que $A = \{h_a\}$.

(2) ou bien $\exists\ a,b \in C_r$, $a \neq b$ tel que $A = \{h_{ab},h_{ba}\}$.

Pour démontrer le Th.2, nous avons besoin des propositions 2,3 et 4, suivantes.

Proposition 2. *Soient $0 < s < N < \infty$, $E = \{0,1,\ldots,N\}$ et pour tout $x \in E$, $g_s(x) = inf|x-2ks|$, $k=0,1,2,\ldots$, alors $\exists\ n_0$ tel que si $n \geq n_0$, $\mathcal{S}_s^{2n}(x) = g_s(x)$ et $\mathcal{S}_s^{2n+1}(x) = s - g_s(x)$, $x \in E$.*

Démonstration. Remarquons que $\forall\ x \in E$, $g_s(x) \in [0,s]$; si $x+2ks \in E$, $g_s(x) = g_s(x+2ks)$; g_s est "périodique" sur E de période 2s. En observant le graphe de g_s par rapport à celui de f_s^n, g_s est une sorte de régularisée de f_s^n.

Pour établir la prop., montrons par récurrence sur n que :

$$\forall\, n,\quad f_s^{2n}(x) = \begin{cases} g_s(x)\ , & 0\le x\le 2ns \\ x-2ns\ , & 2ns\le x\le N \end{cases}$$

C'est vrai pour n=1 car $f_s^2(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le s \\ 2s-n & s\le x\le 2s \\ x-2s & 2s\le x\le N \end{cases}$ donc $f_s^2(x) \equiv \begin{cases} g_s(x),\ x\in t[0,2s] \\ x-2ns \quad 2\le x\le N. \end{cases}$

Supposons que $f_s^{2n}(x) = \begin{cases} g_s(x),\ 0\le x\le 2ns \\ x-2ns,\ 2ns\le x\le N \end{cases}$ (HR)

alors c'est vrai aussi pour n+1. En effet,

- 1) si $0\le x\le (2n+1)s$

$$f_s^{2n+2}(x) = \begin{cases} f_s^2(g_s(x))\ , & 0\le x\le 2ks \\ f_1^2(n-2ns) & 2ns\le x\le (2n+1)s \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $f_s^{2n+2}(x) = g_s(x)$; car si $x \in [0,ns]$ l'HR et le fait que $g_s(x) \in [0,s] \Rightarrow f_s^{2n+2}(x) = f_s^2(g_s(x)) = g_s(x)$.

Si $2ns\le x\le (2n+1)s$, $x-2ns \in [0,s]$ et $f_s^2(x - 2ns) = g_s(x)$ par définition de g_s.

- 2) Si $(2n+1)s\le x\le (2n+2)s$.

d'après l'HR $f_s^{2n+2}(x) = f_s^2(x-2ns) = 2s - x + 2ns = (2n+2)s-x = g_s(x)$ par définition de g_s et du fait que $x - 2ns \in [s,2s]$.

- 3) Si $(2n+2)s\le x\le N$.

$f_s^{2n+2}(x) = f_s^2(x-2ns) = x - 2ns - 2s = x - (2n+2)$ car $x-2ns\ge 2s$

On a donc $\forall n$

$$f_s^{2n}(x) = \begin{cases} g_s(x)\ , & 0\le x\le 2ns \\ x-2ns & 2ns\le n\le N \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $n_0 = [\frac{N}{1}]$ pour que $\forall\ n\ge n_0$ $f_s^{2n}(x) = g_s(x)$, $\forall\ x\in E$ et $f_s^{2n+1}(x) = s-g_s(x)$, $\forall\ x \in E$. □

Proposition 3 : *Soient $0<s_1<s_2 = N$, r le reste dans la division de s_2 par s_1, et $\mathcal{S}'_1$ le semi-groupe de fonctions de $[0,N]$ dans $[0,N]$ engendré par g_{s_1} et δ_{s_2}. Alors $g_r \circ g_{s_1}$ et $\delta_r \circ g_{s_1}$ sont dans $\mathcal{S}'_1$.*

Démonstration.

Sur $[-N,N]$ soit $\tilde{g}_{s_1}$ tel que $\tilde{g}_{s_1}(x) = g_{s_1}(|x|)$ pour $x \in [-N,N]$.

1er cas : $s_2 = 2n_0 s_1 + r$, $0 \le r < s$,

Si $x \in [0,s_1]$, $\tilde{g}_{s_1} \circ f_{s_2}(x) = \tilde{g}_{s_1}(2n_0 s_1 + r - x) = \tilde{g}_{s_1}(r-x) = g_{s_1}(|r-x|) = |r-x| = f_r(x)$.

Donc si $\mathcal{S}'_{s_1} = \mathcal{S}'_{1[0,s_1]}$, $f_r \in \mathcal{S}'_{s_1}$. D'après la prop.2, $\exists\, n_1$ tel que $f_r^{2n_1} = g_r$ et $g_r \in \mathcal{S}'_{s_1}$. Donc $g_r \circ g_{s_1}$ et $f_r \circ g_{s_1} \in \mathcal{S}'_1$.

2ème cas : si $s_2 = (2n_0+1)s_1 + r$.

Si $x \in [0,s_1]$, $g_{s_1} \circ f_{s_2}(x) = \tilde{g}_{s_1}(2n_0 s_1 + s_1 + r - x) = \tilde{g}_{s_1}(s_1 - x + r)$

$$= g_{s_1}(s_1 - |r-x|) = s_1 - |r-x|.$$

et donc $f_{s_1} \circ g_{s_1} \circ f_{s_2}(x) = f_r(x)$ pour $x \in [0,s_1]$ et $f_r \in \mathcal{S}'_{s_1} = \mathcal{S}'_{1|[0,s_1]}$

D'après la prop.2, $\exists\, n_1$ tel que $f_r^{2ns} = g_r$ et $g_r \in \mathcal{S}'_{s_1}$. Donc $g_r \circ g_{s_1}$ et $f_r \circ g_{s_1} \in \mathcal{S}'_1$. □

Proposition 4. *Soient $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, $0<s_1<\ldots>s_n = N$, $d = PGCDS$ et $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions de $[0,N]$ dans $[0,N]$ engendré par $\delta_{s_0}, \ldots, \delta_{s_n}$ alors $g_d \in \mathcal{S}$.*

Démonstration.

Par récurrence sur n.

Si n=1, soit $d_1 = PGCD(s_0,s_1)$ et $\mathcal{S}'_1$ le semi-groupe de fonctions de $[0,s_1]$ dans $[0,s_1]$ engendré par g_{s_0} et f_{s_1} ; soient $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n = d_1$ les restes successifs obtenus en appliquant à s_0 et s_1 l'algorithme d'Euclide.

On a :

$\forall\, k=0,1,\ldots,n$, $g_{r_k} \circ g_{r_{k-1}} \circ \ldots \circ g_{r_0} \circ g_{s_0}$ et $f_{r_k} \circ \ldots \circ g_{r_0} \circ g_{s_0} \in \mathcal{S}'_1$.

En effet : $g_{r_o} \circ g_{s_o}$ et $f_{r_o} \circ g_{s_o} \in \mathcal{S}'_1$ d'après la proposition 3 ; donc c'est vrai pour k=0 ; supposons (HR) que $g_{r_k} \circ g_{r_{k-1}} \circ \ldots \circ g_{s_o}$ et $f_{r_k} \circ g_{r_{k-1}} \circ \ldots \circ g_{r_o} \circ g_{s_o} \in \mathcal{S}'_1$. Soit $\mathcal{S}'_{r_{k-1}} = \mathcal{S}'_{1|[o,r_{k-1}]}$ avec $r_{k-1} = q_{q+1}\, r_k + r_{k+1}$, k=1,...,n .

D'après l'H.R., g_{r_k} et $f_{r_k} \in \mathcal{S}'_{r_{k-1}}$. D'après la Proposition 3 appliquée à r_{k+1}, on a $g_{r_{k+1}} \circ g_{r_k}$ et $f_{r_{k+1}} \circ g_{r_k} \in \mathcal{S}'_{r_{k-1}}$ et donc en remontant :

$g_{r_{k+1}} \circ g_{r_k} \circ \ldots \circ g_{r_o} \circ g_{s_o}$ et $f_{r_{k+1}} \circ g_{r_k} \circ \ldots \circ g_{r_o} \circ g_{s_o} \in \mathcal{S}'_1$.

Donc $g_{d_1} \circ g_{r_{n-1}} \circ \ldots \circ g_{r_o} \circ g_{s_1} \in \mathcal{S}'_1$ et comme $g_a \circ g_{ab} = g_a$, $\forall\, a,b \in \mathbb{N}^*$, $g_{d_1} \in \mathcal{S}'_1$ mais $\mathcal{S}'_1 \circ g_{s_1} \subset \mathcal{S}$ et donc $g_{d_1} \in \mathcal{S}$.

Soit $d_k = PGCD(s_o,s_1,\ldots,s_k)$. Supposons (H.R.) que : $g_{d_k} \in \mathcal{S}$. Comme $d_{k+1} = PGCD(d_k,s_{k+1})$, d'après la Proposition 3 et la récurrence précédente appliquées à d_{k+1}, $g_{d_{k+1}}$ est dans le semi-groupe engendré par $f_{s_{k+1}}$ et g_{d_k} restreint à $[0,s_{k+1}]$ et donc $g_{d_{k+1}} \circ g_{s_{k+1}} \in \mathcal{S}$; soit $g_{d_{k+1}} \in \mathcal{S}$, ce qui étend la récurrence et par conséquent $g_d \in \mathcal{S}$.

□

Démonstration du Théorème 2.

Soit $S = \{s_o,s_1,\ldots,s_n\}$, $N = \text{Sup } S$; $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions de $[0,N]$ dans $[0,N]$ engendré par $f_{s_o},\ldots,f_{s_n}$, $E = [0,N]$.

1. si d=1, d'après la Prop. 4, $g_1 \in \mathcal{S}$. Si $(H_n)_{n=o}^{\infty}$ est tel que $H_o = h$, avec $h(0) = a$ et $h(1) = b$, alors si $h' = h \circ g_1$,
   - ou a=b et alors $h' = h_a$ et $h' \circ \mathcal{S} = \{h_a\}$
   - ou a≠b et alors $h' = h_{ab}$ ou h_{ba} et $h' \circ \mathcal{S} = \{h_{ab}, h_{ba}\}$.

   Donc si A est une classe essentielle, $\exists\, a,b \in E$ tel que ou $A = \{h_a\}$ ou $A = \{h_{ab},h_{ba}\}$.

2. si d>1. Soit $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{|C_r}$ et $g_d^r = g_{d|C_r}$
   a - si r=0, en divisant par d dans C_o ce cas est équivalent au 1.
   b - si $r = \frac{d}{2}$, $g^{[\frac{d}{2}]}(C_{\frac{d}{2}}) = \{\frac{d}{2}\}$. Donc si $(H_n^{\frac{d}{2}})_{n=o}^{\infty}$ est tel que $H_o^{\frac{d}{2}} = h$, avec

$h(\frac{d}{2}) = a$ alors $h' = h \circ g_d^{\frac{d}{2}}$ est tel que $h' = h_a$ et $h' \circ \mathcal{S} = \{h_a\}$ donc si A est une classe alors $\exists$ a tel que $A = \{h_a\}$.

c - si $0 < r < \frac{d}{2}$; $g_d^r(x) = \begin{cases} r & x \equiv \pm r \mod(2d) \\ d-r & x \equiv d \pm r \mod(2d). \end{cases}$

si $h : C_r \to C_r$ est tel que $h(r) = a$ et $h(d-r) = b$, alors si $h' = h \circ g_d^r$
ou $a = b$ et alors $h' = h_a$ et $h' \circ \mathcal{S} = \{h_a\}$
ou $a \neq b$ et alors $h' = h_{ab}$ ou h_{ba} et $h' \circ \mathcal{S} = \{h_{ab}, h_{ba}\}$.
Donc si $(H_n^r)_{n=0}^{\infty}$ est tel que $H_0^r = h$ et si A est une classe essentielle pour $(H_n^r)_{n=0}^{\infty}$ $\exists$ a et b $\in C_r$ tel que ou $A = \{h_a\}$ ou $A = \{h_{ab}, h_{ba}\}$.

□

Remarque : Dans le cas particulier où d=1, en fait si A est une classe pour $(H_n)_{n=0}^{\infty}$, $(H_n)_{n=0}^{\infty}$, A est de la forme $A = \{h_{ab}, h_{ba}\}$ avec a et b tel que $h(x) = a$ et $h(x+1) = b$ où $\{x,x+1\} \in P_E$. En effet d'après le Th.1 du chap.1, pour toute paire $\{x,x+1\}$ de P_E, $\exists$ $g \in \mathcal{S}$ tel que $g(\{0,1\}) = \{x,x+1\}$. Donc si $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ est tel que $H_0 = h$ avec $h(x) = a$ et $h(x+1) = b$ alors $h' = h \circ g \circ g_1$ est telle que $h' \circ \mathcal{S} = \{h_{ab}, h_{ba}\}$. Ce qui explique comment $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ peut finir dans une classe essentielle donnée.

2 - Etude du cas où $S \subset \mathbb{N}$ n'est pas borné et PGCDS = 1

Soit donc $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie pour $H_0 = h$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $H_n = H_{n-1} \circ f_{Y_n}$ où $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de v.a. indépendantes et de même loi de support $S \subset \mathbb{N}$ non borné. Soit $A = \{\alpha, \beta\}$ un alphabet et $\varphi = N \to A$ une application et $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ la chaîne sur $A^{\mathbb{N}}$ définie par $H'_n = \varphi \circ H_n$, $\forall$ n. Soit $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ engendré par $(f_y)_{y \in S}$. Nous avons :

Théorème 3 : *Si $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$ et si PGCDS = 1, les seules classes récurrentes de la chaîne $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ sur $A^{\mathbb{N}}$ (respect. $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) sont : $\{h_\beta\}$ $\{h_\alpha\}$, $\{h_{\alpha\beta}, h_{\beta\alpha}\}$ où $h_{\alpha\beta} : \mathbb{N} \to A$, $h_{\alpha\beta}(x) = \alpha$ si x pair $h_{\alpha\beta}(x) = \beta$ si x impair, $h_{\alpha\alpha} = h_\alpha$ (respect. $\{h_a\}$, $\{h_{ab}, h_{ba}\}$ où $a,b \in \mathbb{N}$ et $h_{ab} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est tel que : $h_{ab}(x) = a$ x pair, $h_{ab}(x) = b$ x impair, $h_{aa} = h_a$).*

Pour démontrer le Théorème nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme : *Si PGCDS = 1, soit* $m \in A^{\mathbb{N}}$ *un mot infini tel que* $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *tel que* $m(k) = m(k+1) = \alpha$ *(ou* β*), alors* $\forall\, N \;\exists\; g \in \mathcal{S}$ *tel que si* $m' = m \circ g$, m' *est de la forme* $m' = \alpha^N m_N$ *où* m_N *est un mot infini.*

Démonstration du lemme.

Soit $m \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $m(k) = m(k+1) = \alpha$ et $S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset S$ $\quad s_n = \sup S_1 < \infty$ tel que $PGCDS_1 = 1$; $\mathcal{S}_1$ le semi-groupe de fonctions engendré par $(f_s)_{s \in S_1}$, de $[0, s_n]$ dans $[0, s_n]$. On choisit $s_n \geq k+3$.

D'après le Th.1 du chapitre 1, $\exists\, h \in \mathcal{S}_1$ tel que $h(\{0,1\}) = \{k, k+1\}$. D'après la Prop.4 du 1°) $g_1 \in \mathcal{S}_1$ et donc $h \circ g_1 \in \mathcal{S}_1$.

On a donc $m_{|[0,s_n]} \circ h \circ g_1(x) = \alpha$, $\forall\, x \in [0, s_n]$ comme $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_{|[0,s_n]}$ cela signifie que $\exists\, g \in \mathcal{S}$ tel que si $m' = m \circ g$ alors $m' = \alpha^n m_n$ avec $n \geq s_n$ et m_n un mot infini. □

Démonstration du Théorème 3.

Il suffit d'établir le Théorème pour la chaîne $(H'_n)_{n \geq 0}$. En effet supposons établi que les classes récurrentes pour $(H'_n)_{n \geq 0}$ sont celles indiquées par le théorème.

Si h est récurrent pour $(H_n)_{n=0}^{\infty}$, mais pas du type indiqué dans le théorème, $\exists$ n,a,b,c des entiers tel que $a \neq b$ et $a \neq c$ tel que $h(n) = a$, $h(n+1) = b$ et $h(n+2) = c$. Il suffit alors de définir $\varphi : N \to A$ tel que $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \varphi(c) = \beta$ pour voir que $\varphi \circ h = m_1 \beta\beta\, m_2$ est récurrent pour $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$. D'où contradiction. Donc si pour $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ les classes récurrentes sont celles indiquées il en est de même pour $(H_n)_{n=0}^{\infty}$.

Nous allons montrer le Th. pour la chaîne $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$.

Supposons que les mots récurrents pour $(H'_n)_{n=0}^{\infty}$ ne sont pas tous du type indiqué. Si m est récurrent mais pas du type indiqué, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $m(k) = m(k+1)$. Soit pour fixer les idées $m(k) = m(k+1) = \alpha$. D'après le lemme $\exists\, g \in \mathcal{S}$ tel que si $m' = m \circ g$ $\quad m' = \alpha^n m_n$ où m_n est un mot infini. Soit C_0 la classe de m et C_n tel que : $C_n = \{m' \in C_0$ tel que $\exists n$ tel que $m' = \alpha^n m_n\}$. Pour $m' \in C_0$ soit :

$T(m') = \sup\{ k \text{ tel que } m' = \alpha^k m_n \text{ où } m_n \in A^{\mathbb{N}} \}$. Considérons alors la chaîne $(H'_n)_{n=o}^{\infty}$ tel que $H'_o = m'$. Soit $(W_n)_{n=o}^{\infty}$ la suite de v.a. définie par $W_n = T(H'_n)$, $\forall$ n avec $W_o = y_o > 0$.

Remarquons que si $W_n \to \infty$, quand $n \to \infty$, avec une probabilité positive, cela signifie que m' communique avec un mot dont la chaîne de α est arbitrairement longue. En effet si $W_n \to \infty$, $n \to \infty$ avec une probabilité positive, soit $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ la suite de v.a. définie par $\tau_1 = \inf \{n>o \text{ tel que } H'_n = m' | H'_o = m'\}$

$$\tau_{k+1} = \inf \{n > \tau_k , H'_n = m' | H'_{\tau_k} = m'\} , \quad k \geq 1$$

$(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de renouvellement.

Si $W_n \to \infty$ avec une probabilité positive, $W_{\tau_k} \to \infty$ avec une probabilité positive $W_{\tau_k} = T(H'_{\tau_k}) = T(m')$, $\forall$ k, il en résulte que $W_{\tau_k} = \infty$, $\forall$ k et que $m' = h_\alpha$. Ce qui établit une contradiction avec l'hypothèse que m' n'était pas de ce type. $(W_n)_{n=o}^{\infty}$ n'est pas nécessairement une chaîne de Markov. Cependant pour montrer que $P[\lim_n W_n = \infty] > 0$, nous allons minorer $(W_n)_{n=o}^{\infty}$ par une chaîne de Markov $(W_n^*)_{n=1}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}$ tel que $P[\lim_n W_n^* = \infty] > 0$, que nous saurons mieux contrôler. A noter que cela utilisera de façon essentielle le fait que $E[Y_1] < \infty$.

Considérons en effet la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, définie par $W_o^* = W_o = y_o > 0$ et pour $n>0$, $W_n^* = \begin{cases} W_{n-1}^* + Y_n & \text{si } Y_n \leq W_{n-1}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Nous avons : $W_n^* \leq W_n$, $\forall$ n.

En effet $W_o^* \leq W_o$ par hypothèse. Supposons(H.R.) que : $W_n^* \leq W_n$; nous avons alors si $Y_{n+1} > W_n^*$, $W_{n+1}^* = 0 \leq W_{n+1}$

si $Y_{n1} \leq W_n^*$, $Y_{n+1} \leq W_n$ (d'après l'H.R.) et

$W_{n+1}^* = Y_{n+1} + W_n^* \leq W_n + Y_{n+1} = W_{n+1}$ par définition de W_{n+1} .

Remarquons à présent que chaque entier forme une classe pour la chaîne $(W_n^*)_{n=o}^{\infty}$. 0 est un état absorbant et pour tout $i,j \neq 0$, $\{i\} < \{j\}$ (au sens de l'ordre partiel entre les classes) si et seulement si j=0 ou $j \geq i$. On note

$T_1 = \inf \{ n > 0, W_n^* = 0 \}$; rappelons que $W_0^* = y_0 > 0$; on a :

$$P[T_1 = \infty] = 1 - P[\exists\, n,\ W^* = 0] = P[W_n^* \geq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}]$$

$$= P[\lim_n W_n^* = \infty].$$

Nous avons à montrer que $P[T_1 = \infty] > 0$. Notons pour simplifier $S_0 = 0$ et pour $n > 0$ $S_n = S_{n-1} + Y_n$; $A_k = \{Y_k \leq y_0 + S_{k-1}\}$ et $B_k = A_k^c$, $k \geq 1$. Nous avons $\{ T_1 = \infty \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ et donc $\{T_1 < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Remarquons alors que si Y_0 est une v.a. indépendante de $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ et de même loi, nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y_{n+1} > y_0 + S_n] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y_0 > y_0 + S_n] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y_0 > y_0 + S_n\}} \right] = \mathbb{E}[N] \quad \text{où} \quad N = \#\{ n \geq 0,\ Y_0 > y_0 + S_n \}.$$

Soit $N(q) = \#\{n \geq 0,\ S_n < q \}$ où q est un entier positif, en convenant que $N(q) = 0$ si $q \leq 0$; on a $N = N(Y_0 - y_0)$.

Supposons établi que : $\mathbb{E}[N(q)] \leq \frac{q}{1 - P[Y_1 = 0]}$, pour $q > 0$. (1)

Nous avons alors :

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\,[N(q) \mid q = Y_0 - y_0] \right] \leq \frac{\mathbb{E}[(Y_0 - y_0)_+]}{1 - P[y_1 = 0]} < \infty$$

et donc $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli : $P\left[\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} B_k\right] = 0$

Donc $P\left[\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k\right] = 1$ et $\exists\, N_0$ tel que $P\left[\bigcap_{k \geq N_0}^{\infty} A_k\right] > 0$, car

$\exists\, y_1, y_2, \ldots, y_{N_0 - 1}$ tels que $0 < y_{N_0 - 1} < \ldots < y_2 < y_1 < y_0$ avec

$P[Y_j = y_j\ ,\ j = 0, \ldots, N-1] > 0$. On a $P\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right] > 0$ et donc $P[T_1 = +\infty] > 0$.

Il reste à montrer (1). Nous avons

$$\mathbb{E}[N(q)] = \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n = k]$$

Soit $\mu_k = P[Y_1 = k]$, $k \geq 0$. Définissons ν sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu = \mu_0 \delta_0 + (1-\mu_0)\nu$.

$$P[S_n = k] = \mu^{*n}(k) = (\mu_0\delta_0 + (1-\mu_0)\nu)^{*n}(k),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[S_n = k] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} C_n^j \mu_0^{n-j}(1-\mu_0)^j \nu^{*j}(k)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-\mu_0)^j \nu^{*j}(k) \sum_{n=j}^{\infty} C_n^j \mu_0^{n-j} \quad ;$$

comme $\sum_{n=j}^{\infty} C_n^j \mu_0^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+j}^j \mu_0^n = \frac{1}{(1-\mu_0)^{j+1}}$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \nu^{*j}(k) \leq 1$

on a : $\sum_{n=0}^{\infty} P[S_n = k] = \frac{1}{1-\mu_0} \sum_{j=0}^{\infty} \nu^{*j}(k) \leq \frac{1}{1-\mu_0}$ ce qui achève la démonstration du Théorème. □

Théorème 4 : *Soit $A = \{\alpha,\beta\}$ un alphabet à 2 lettres ; si $E[Y_1] < \infty$ et si PGCDS = 1 alors p.s. $\forall K \in \mathbb{N}, \exists N_K$ tel que $\forall n \geq N_K$, ou bien $H'_n = h_{\alpha\beta}$ ou $h_{\beta\alpha}$ sur $[0,K]$, ou bien $H'_n = h_\alpha$ (ou h_β) sur $[0,K]$.*

Démonstration.

Soit $m \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini ; alors ou bien m est de la forme $m = (\alpha\beta)^k m'$ ou $m = (\beta\alpha)^k m'$, où m' est un mot infini et dans ce cas m est dit du type M ; ou bien $m = \alpha^{2k} m'$ et dans ce cas m est dit du type A ; ou bien $m = \beta^{2k} m'$ et m est dit du type B.

Pour $m \in A^{\mathbb{N}}$, soit $\psi(m) = M$ si m est du type M, $\psi(m) = A$ si m est du type A, $\psi(m) = B$ si m est du type B, soit φ la fonction définie sur $A^{\mathbb{N}}$ par
$\varphi(m) = \sup \{k > 0$ tel que $m = (\alpha\beta)^k m'$ ou $m = (\beta\alpha)^k m'\}$ si m est du type M;
$\varphi(m) = \sup \{k>0$ tel que $m = (\alpha)^{2k} m'\}$ si m est du type A et ,
$\varphi(m) = \sup \{k >0$, tel que $n = (\beta)^{2k} m'\}$ si m est du type B.

Avec ces notations le Théorème sera démontré si on montre que :
$\lim_n \varphi(H'_n) = \infty$ et $\lim_n \psi(H'_n)$ existe presque sûrement.

On observe que :

$$\text{si } Y_{n+1} < 2\varphi(H'_n) \text{ alors } \varphi(H'_{n+1}) \geq \varphi(H'_n) + \left[\frac{Y_{n+1}}{2}\right] \qquad (1)$$

$$\text{et } \psi(H'_{n+1}) = \psi(H'_n)$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\exists\ N \text{ tel que } \forall n \geq N\ ,\ Y_{n+1} < 2\varphi(H'_n) \quad \text{p.s.} \qquad (2)$$

En effet si (2) est vrai on a p.s.

1) $\lim_n \psi(H'_n)$ existe car pour $n \geq N$, $\psi(H'_n)$ est constante.

2) $\varphi(H'_n) \to \infty$ car d'après (1) on a :

$$\forall\ n \geq N\ ,\quad \varphi(H'_n) \geq \varphi(H'_N) + \left[\tfrac{1}{2} Y_{N+1}\right] + \ldots + \left[\tfrac{1}{2} Y_n\right]\ ;$$

et comme $\left[\frac{1}{2} Y_{N+1}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{2} Y_n\right] \to \infty$ p.s. on a le résultat.

Montrons donc le (2).

Soit $W_n = \varphi(H'_n)$, pour tout n et $(W^*_n)_{n=0}^{\infty}$ la chaîne de Markov définie par $W^*_0 = W_0 > 0$, $W^*_{n+1} = W^*_n + \left[\frac{Y_{n+1}}{2}\right]$ si $Y_{n+1} < 2W^*_n$ et $W^*_{n+1} = 0$ sinon.

On a que 0 est un état absorbant pour $(W^*_n)_n$ et de plus chaque entier positif forme une classe ; enfin $P[W^*_n \geq 1$ pour une infinité de $n] = P[\lim_n W^*_n = \infty] > 0$.

Soit le processus $(\tilde{W}_n)_{n=0}^{\infty}$ défini par $\tilde{W}_0 = W_0 > 0$ et $\tilde{W}_{n+1} = \tilde{W}_n + \left[\frac{Y_{n+1}}{2}\right]$ si $Y_{n+1} < 2\tilde{W}_n$ et $\tilde{W}_{n+1} = W_{n+1}$ sinon.

Nous avons : $\tilde{W}_n \leq W_n$, $\forall\ n$.

En effet c'est vrai pour n=0 par définition de $(\tilde{W}_n)_{n=0}^{\infty}$; si c'est vrai pour n, alors :

- ou $Y_{n+1} < 2\tilde{W}_n$ et alors $\tilde{W}_{n+1} = \tilde{W}_n + \left[\frac{Y_{n+1}}{2}\right]$ et donc

$\tilde{W}_{n+1} \leq W_n + \left[\frac{Y_{n+1}}{2}\right] \leq W_{n+1}$ d'après (1) car $Y_{n+1} < 2\tilde{W}_n < 2W_n$

- ou $Y_{n+1} \geq 2\tilde{W}_n$ et $\tilde{W}_{n+1} = W_{n+1}$ par définition de $\tilde{W}_{n+1}$; et la récurrence est étendue.

$(\tilde{W}_n)_{n=0}^{\infty}$ n'est pas une chaîne de Markov mais, si l'on considère les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ définis par $A_{n+1} = \{Y_{n+1} \geq 2\tilde{W}_n\}$ et la suite $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $T_0 = 0$, $T_{k+1} = \inf\{t > T_k\ ,\ w \in A_t\}$ en convenant que

$T_{k+1}(\omega) = \infty$ si cet ensemble est vide, $(\tilde{W}_n)_{n=0}^{\infty}$ est composée de segments de chaînes de même loi que $(W_n^*)_{n=0}^{\infty}$.

Notre but est de montrer que presque sûrement, il existe k tel que $T_k = \infty$. Pour cela soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les v.a. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$; relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, les T_k sont des temps d'arrêt.

Notons $p(x) = P[\lim_{n\to\infty} W_n^* = \infty | W_0 = x]$. Alors $p(x)$ est croissante avec l'entier x et $p(x) \geq p(1) > 0$.

Remarquons alors que si $T_k < \infty$ alors $(W_{n+T_k} \mid \mathcal{F}_{T_k})$ est une chaîne de Markov sur $[T_k, T_{k+1}[$ dont la loi initiale est celle de W_{T_k} . Donc sur $\{T_k<\infty\}$, $P[T_{k+1} = \infty \mid \mathcal{F}_{T_k}] = p(W_{T_k}) \geq p(1)$.

Montrons alors par récurrence sur n que si $B_n = \{ T_k < \infty, \forall\ k=1,\ldots,n\}$ alors $P(B_n) \leq (1 - p(1))^n$.

En effet si n=1 , $P(B_1) = 1-p(W_0) \leq 1-p(1)$, car $W_n \geq 1$, $\forall\ n \geq 0$.

Si c'est vrai pour n, alors nous avons

$$P(B_{n+1}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{B_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}<\infty\}}\ \mathbb{1}_{B_n}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}<\infty\}} \mid E_{T_n}\right] \mid \mathbb{1}_{B_n}\right]$$
$$= [1 - p(W_{T_n})]\ P(B_n) \leq (1-p(1))^{n+1}$$

Il en résulte que $P(B_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Ce qui achève la démonstration du Théorème. □

En remplaçant A par $\mathbb{N}$, nous avons alors le résultat principal de ce chapitre qui est le suivant :

Théorème 5. *Si $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$ et PGCDS = 1, alors avec la probabilité 1,*

- *ou bien $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ K>0$, $\exists\ N_K$ tel que $\forall\ n \geq N_K$, $H_{n|[0,K]} = h_a$*
- *ou bien $\exists\ a$ et $b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ tel que $\forall\ K>0$, $\exists\ N_K$ tel que $\forall\ n \geq N_K$,*

$H_{n|[0,K]} = h_{ab}$ ou h_{ba} .

Démonstration.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_k : \mathbb{N} \to \{\alpha,\beta\}$ tel que $\varphi_k(k) = \alpha$ et $\varphi_k(x) = \beta$ si $x \neq k$; soit $(\varepsilon_k)_{k=0}^{\infty}$ la suite définie dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ par :

$\varepsilon_k = \alpha$ sur $\{\lim_n \varphi_k(H_n) = h_\alpha\}$;

$\varepsilon_k = \beta$ sur $\{\lim_n \varphi_k(H_n) = h_\beta\}$;

$\varepsilon_k = \gamma$ sur $\{\lim_n \varphi_k(H_n) = \{h_{\alpha\beta}, h_{\beta\alpha}\}\}$.

La suite $(\varepsilon_k)_{k=o}^{\infty}$ est définie avec la probabilité 1.

(1) Si $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_a = \alpha$, alors par définition de $(\varepsilon_k)_{k=o}^{\infty}$, $\lim \varphi_a(H_n) = h_\alpha$. Et par définition de $(\varphi_k)_{k=o}^{\infty}$, si $k \neq a$, $\lim_n \varphi_k(H_n) = h_\beta$; donc $\varepsilon_k = \beta$ $\forall\ k \neq a$. Donc

(2) Il est impossible que $\varepsilon_k = \beta\ \forall\ k \in \mathbb{N}^n$.

(3) Il est impossible que $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_a = \gamma$ et $\forall\ k \neq a$ $\varepsilon_k = \beta$ (ou $\varepsilon_k = \alpha$, $\forall\ k \neq a$).

En effet si $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_a = \gamma$ on a par définition de $(\varepsilon_k)_{n=o}^{\infty}$ que $\lim_n \varphi_a(H_n) = \{h_{\alpha\beta}, h_{\beta\alpha}\}$. Et si pour un seul $k_o \neq a$ $\varepsilon_{k_o} = \beta$ alors d'après (1) pour tout $k \neq k_o$ $\varepsilon_k = \alpha$; en particulier $\varepsilon_a = \alpha$; ce qui est absurde. D'où l'affirmation.

(4) Il est impossible que $\exists$ a,b et c $\in \mathbb{N}$ tel que : $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_c = \gamma$.

En effet : si $\exists$ a, b et c $\in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_c = \gamma$ on a par définition de $(\varepsilon_k)_{k=o}^{\infty}$ que

$\forall\ K > 0$, $\exists\ N$, $\forall\ n \geq N$, $H_{n|[0,K]} = ax_1\ ax_2, \ldots, ax_n$ ou $H_{n|[0,K]} = x_1 a\ x_2 a, \ldots, x_n a$.

et

$\forall\ \ > 0$, $\exists\ N$, $\forall\ n \geq N$, $H_{n|[0,K]} = bx_1'\ bx_2', \ldots, bx_n'$ ou $H_{n|[0,K]} = x_1' b\ x_2' b, \ldots, x_n' b$

avec $x_i \neq a$ et $x_i' \neq b\ \forall\ i$. $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \gamma \Rightarrow x_i = b$ et $x_i' = a\ \forall\ i$. Donc $\forall\ K > 0$, $\exists\ N$, $n \geq N$ $H_n([0,k])$ ne contient pas c. Donc il est impossible que $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_c = \gamma$.

Par conséquent les seuls possibilités qui restent sont :

- $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_a = \alpha$ et $\varepsilon_K = \beta$, $\forall\ k \neq a$ c'est-à-dire $\lim_n H_n = h_a$
- $\exists$ a et b $\in \mathbb{N}$, $a \neq b$ tel que $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \gamma$ et $\varepsilon_k = \beta$ (ou $\varepsilon_k = \alpha$) si $k \neq a$ et $k \neq b$ c'est-à-dire que $\lim_n H_n \in \{h_{ab}, h_{ba}\}$.

□

Chapitre IV : LA CHAÎNE DE FELLER SUR $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Dans ce chapitre enfin, nous considérons la promenade aléatoire à gauche sur $\mathcal{Y}$ et son action sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, définie par X_0 dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $X_n = f_{Y_n} \circ X_{n-1}$, $n \geq 1$.

Au §1, nous considérons le cas borné. Au §2, nous considérons le cas non borné dans un cas particulier ; l'étude de classes récurrentes nous permettra un retour à la chaîne de Feller initiale $(X_n(x))_{n=0}^{\infty}$ au Théorème 4 dans un résultat sur le comportement de $|X_n(x) - X_n(y)|$ que l'étude directe du chapitre 2 ne laissait pas prévoir intuitivement et qui est le résultat principal de ce chapitre.

1 - Cas où S est borné

1er cas : PGCDS = 1

Soit $N = \sup S < \infty$, PGCDS = 1, $E = \{0,1,\ldots,N\}$, $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ la chaîne de Markov définie sur E^E par , $X_n = f_n \circ X_{n-1}$, $n \geq 1$. Si $T \subset E$ soit $C_T \subset E^E$ défini par $f \in C_T \iff \exists\, a,b \in E,\ |a-b| = 1$ avec $f(x) = a$ si $x \in T$ et $f(x) = b$ si $x \notin T$.

Exemple : $N = 3$ et $T = \{0,3\}$ C_T comprend 6 éléments donnés par le tableau suivant :

	0	1	2	3
a=0,b=1	0	1	1	0
a=1,b=0	1	0	0	1
a=1,b=2	1	2	2	1
a=2,b=1	2	1	1	2
a=2,b=3	2	3	3	2
a=3,b=2	3	2	2	3

Si $T=\emptyset$ ou E, C_T est l'ensemble des fonctions constantes sur E. $\forall\, T \subset E$, $C_T = C_{E \setminus T}$.

Théorème 1 :

(1) La C.M. $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ définie ci-dessus a un diagramme de communication formé de 2^N graphes connexes ;

Si $\mathcal{f} : E \to E$, *notons* $T_{\mathcal{f}} = \{x \in E , \mathcal{f}(x) \equiv 0 \bmod 2\}$. *Alors*

(2) $\mathcal{f}$ *et* g *appartiennent à la même composante connexe dans le diagramme de communication si et seulement si ou bien* $T_{\mathcal{f}} = T_g$ *ou bien* $T_{\mathcal{f}} = E \setminus T_g$;

(3) C_T *est une classe essentielle de* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *pour tout* $T \subset E$, *et toute classe essentielle de* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *est de ce type* ;

(4) *toute composante connexe du diagramme des classes de* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *comprend une seule classe essentielle* ;

(5) *si* $X_0 = h$, *presque sûrement* $\exists$ N *tel que* $X_n \in C_{T_h}$, $\forall\ n \geq N$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions de E dans E, engendré par $(f_s)_{s \in S}$

Le (3). a) C_T est une classe fermée sous l'action de $\mathcal{S}$. En effet $\forall\ f \in C_T$, $\mathcal{S} \circ f = C_T$ car $\mathcal{S}$ préserve les paires d'éléments consécutifs de E et $\forall\ x \in E$ $\mathcal{S}\{x\} = E$.

b) soit $h \notin C_T$ et tel que $T_h = T$, alors $\mathcal{S} \circ h \supset C_T$ car d'après la proposition 4 chapitre 3, $g_1 \in \mathcal{S}$.

a) et b) établissent que $\forall\ T \subset E$, C_T est une classe essentielle de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Comme pour $X_0 = h$, $\forall\ y \in S$, $g = f_y \circ h$ est telle que ou $T_g = T_h$ ou $T_g = E \setminus T_h$, C_{T_h} est l'unique classe essentielle de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ pour $X_0 = h$; il en résulte que toute classe essentielle de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ est du type de C_T avec $T \subset E$, ainsi que le (4).

Le (1) : Le diagramme des classes de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ comporte 2^N composantes connexes car il y a 2^{N+1} C_T possibles et $C_T = C_{E \setminus T}$.

Le (2) : Si $T_f = T_g$ ou $T_f = E \setminus T_g$ alors d'après le (4) si $X_0 = f$ l'unique classe essentielle de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ est $C_{T_f} = C_{T_g}$. De même si $X_0 = g$. Donc f et g conduisent tous les deux à la même classe $C_{T_f} = C_{T_g}$. Réciproquement si f et g appartiennent à la même composante connexe du diagramme des classes, il existe $T \subset E$ tel que f et g conduisent tous les deux à C_T. D'après (4) si $X_0 = f$ l'unique classe essentielle de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ est C_{T_f} et donc $T_f = T$ ou $T_f = E \setminus T$. De même pour g on a $T_g = T$ ou $T_g = E \setminus T$. Donc $T_f = T_g$ ou $T_f = E \setminus T_g$. D'où le (2).

Le (5). Si $X_0 = h$, d'après le (3) et le (4) l'unique classe essentielle de $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ est C_{T_h} , comme la chaîne est finie, on a le résultat.

2ème cas : PGCDS(S) = d > 1

Soit N = sup S < ∞ , PGCDS = d > 1, E = {0,...,N} , $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ la chaîne de Markov sur E^E définie par X_0 et $X_n = f_{y_n} \circ X_{n-1}$, $n \geq 1$. Nous n'allons pas donner une classification de la chaîne (X_n). Cependant nous allons donner une généralisation en un certain sens du Théorème 1.

En effet soient $X_n^r = X_{n|C_r}$ et $(X_n^r)_{n=0}^{\infty}$ les chaînes sur $C_r^{C_r}$, pour $T \subset C_r$, $C_T^r = \{ f : C_r \to C_r$, tel que $\exists$ a et b, $|a-b| = d-2r$, avec $f(x) = a$ si $x \in T$ et $f(x) = b$ si $x \notin T \}$, $r = 0,1,\ldots, [\frac{d}{2}]$. Soit enfin $R = |C_r|$ et pour $h : C_r \to C_r$ $T_h = \{x \in C_r, h(x) \equiv \pm r \bmod 2d \}$. Nous avons :

Théorème 2 : *a) si* $0 \leq r < \frac{d}{2}$, *on a :*

(1) Le diagramme de communication de la chaîne $(X_n^r)_{n=0}^{\infty}$ *comprend* 2^{R-1} *graphes connexes.*

(2) Pour f *et* $g \in C_r^{C_r}$, $T_f = T_g$ *ou* $T_g = C_r \setminus T_f$ *si et seulement si* f *et* g *sont dans la même composante connexe.*

(3) Pour tout $T \subset C_r$, C_T^r *est une classe essentiellle pour* $(X_n^r)_{n=0}^{\infty}$ *et toute classe essentielle de* $(X_n^r)_{n=0}^{\infty}$ *est de ce type.*

(4) Toute composante connexe du diagramme des classes comprend une seule classe essentielle.

(5) Si $X_0^r = h$ *presque sûrement* $\exists$ N_0 *tel que* $\forall$ $n \geq N_0$, $X_n \in C_{T_h}^r$.

b) Si $r = \frac{d}{2}$, *le diagramme de communication de* $(X_n^{\frac{d}{2}})_{n=0}^{\infty}$ *est connexe et comprend une seule classe essentielle formée par les fonctions constantes sur* $C_{\frac{d}{2}}$.

Démonstration.

a) Si r=0, on divise C_0 par d et cela revient au même de considérer $(X_n^0)_{n=0}^{\infty}$ sur $C_0^{C_0}$ ou $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sur E^E auquel cas le a) équivaut au Th.1. On suppose donc que $r \neq 0$ et $r \neq \frac{d}{2}$.

Le (1) découle de (3) et du (4).

Le (5) découle du (4) et du fait que la chaîne $(X_n^r)_{n=0}^{\infty}$ est finie.

Le (3) Soit $\mathcal{S}$ le semi-groupe de fonctions de E dans E engendré par $(f_s)_{s \in S}$ et $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{|C_r}$.

- $\forall\ T \subset C_r$, C_T^r est une classe fermée sous l'action de $\mathcal{S}_r$. En effet $\forall\ f \in C_T^r$, $\mathcal{S}_r \circ f = C_T^r$ car $\forall$ a et b $\in C_r$, $|a-b| = d-2r$ $\quad \forall\ f \in \mathcal{S}_r$ $|f(a) - f(b)| = d-2r$ et $\forall\ a \in C_r$, $\mathcal{S}\{a\} = C_r$ (Th.1, Chap.2).

- Soit $h \notin C_T^r$, $h : C_r \to C_r$, si $T_h = T$ alors $\mathcal{S}_r \circ h \supset C_T^r$.

En effet d'après la Proposition 4 du chapitre 3, $g_d \in \mathcal{S}$ et donc si $g_d^r = g_{d|C_r}$ $g_d^r \in \mathcal{S}_r$, avec $g_d^r(x) = r$ si $x \equiv \pm r \bmod 2d$ et $g_d^r(x) = d-r$ sinon.
Donc on a : $g_d^r \circ h = r$ si $x \in T_h$ et $g_d^r \circ h(x) = d-r$ si $x \in C_r \setminus T_h$.
Donc $g_d^r \circ h \in C_{T_h}^r$. Pour tout $T \subset C_r$, il suffit alors de définir $T_{X_o^r}$ tel que $T = T_{X_o^r}$ ou $T = C_r \setminus T_{X_o^r}$ pour voir que C_T^r est une classe essentielle pour $(X_n^r)_{n=o}$; mais comme $\forall\ f \in \mathcal{S}_r$, et $\forall\ h: C_r \to C_r$ $\quad f \circ h = g$ est telle que $T_g = T_h$ ou $T_g = C_r \setminus T_h$, il en résulte que si $X_o^r = h$, $C_{T_h}^r$ est l'unique classe essentielle de $(X_n^r)_{n=o}^{\infty}$; ce qui établit le (3) et le (4).

Le (2) : Si f et $g \in C_r^{C_r}$ et $T_f = T_g$ ou $T_f = C_r \setminus T_g$ alors d'après (4), f et g conduisent tous les deux à la même classe essentielle C_T^r avec $T = T_f = T_g$ et donc f et g appartiennent à la même composante connexe du diagramme.
Réciproquement si f et g appartiennent à la même composante, ou bien $\exists\ T \subset C_r$ tel que f et g $\in C_T^r$ et donc $T_f = T_g$ ou $T_f = C_r \setminus T_g$; ou bien f et g ne sont dans aucun C_T^r mais alors $\exists\ T \subset C_r$ tel que f et g conduisent tous les deux à C_T. Mais alors (4) $\Longrightarrow$ ou $T_f = T_g = T$ ou $T_f = C_r \setminus T_g = T$. D'où le (2).

b) Soit $\mathcal{S}_{\frac{d}{2}} = \mathcal{S}_{|C_{\frac{d}{2}}}$ où $\mathcal{S}$ est le semi-groupe de fonctions de E dans E engendré par $\{f_y,\ y \in S\}$. D'après la Proposition 4 du chapitre 3, $g_d \in \mathcal{S}$; donc $g_d^{\frac{d}{2}} = g_{d|C_{\frac{d}{2}}} \in \mathcal{S}_{\frac{d}{2}}$. D'autre part $\forall\ f : C_{\frac{d}{2}} \to C_{\frac{d}{2}}$, $\forall\ x \in C_{\frac{d}{2}}$, $g_d^{\frac{d}{2}} \circ f(x) = \frac{d}{2}$ et $\mathcal{S}_{\frac{d}{2}} \circ g_d^{\frac{d}{2}} \circ f(x) = C_{\frac{d}{2}}$.
Il en résulte donc que $\left\{ f : C_{\frac{d}{2}} \to C_{\frac{d}{2}} \text{ tel que } \exists\ a \in C_{\frac{d}{2}} \text{ tel que } f(x) = a\ \forall\ x \in C_{\frac{d}{2}} \right\}$ constitue l'unique classe essentielle de $(X_n^{\frac{d}{2}})_{n=o}^{\infty}$.

2 - Cas où S est non borné

On considère à présent la chaîne de Feller sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la chaîne de Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie par X_0 et $X_n = f_{Y_N} \circ X_{n-1}$, $n \geq 1$. Nous avons :

Théorème 3 : *Soit S non borné, $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$ et PGCDS = 1. Pour $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soit $T(\varphi) = \{x \in \mathbb{N} ; \varphi(x) \equiv 0 \bmod 2\}$ et pour $T \subset \mathbb{N}$ soit*

$C_T = \{ \delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} ;$ *$\exists$ a et b $\in \mathbb{N}$, $|a-b| = 1$, tel que $\delta(x) = a$ si $x \in T$ et $\delta(x) = b$ si $x \notin T$ }*

Alors φ est un état récurrent pour la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty} \iff \varphi \in C_{T(\varphi)}$.

Enfin si $p_k = P(Y_n = k)$ et si $\delta_{j,j+1} \in C_T$ est défini par $\delta_{j,j+1}(x) = j$ si $x \in T$ et $\delta_{j,j+1}(x) = j+1$ si $x \notin T$, alors la mesure $\pi = (\pi_j)_{j=0}^{\infty}$ définie par :

$$\pi_j = \pi(\delta_{j,j+1}) = \pi(\delta_{j+1,j}) = \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k \quad , \quad \forall \ j \notin N$$

est une mesure stationnaire sur C_T, et C_T est une classe récurrence positive.

Démonstration.

C_T est une classe récurrente pour la chaîne $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. En effet si $\mathcal{S}$ désigne le semi-groupe de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ engendré par $\{f_s, s \in S\}$, on a $\forall f \in C_T$, $\mathcal{S} \circ f = C_T$ car $\mathcal{S}$ préserve les paires d'entiers consécutifs et d'après le Théorème 2 du chapitre 2, $\forall a \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}\{a\} = \mathbb{N}$ car PGCDS = 1. Donc $\varphi \in C_{T(\varphi)} \Rightarrow \varphi$ est récurrente. Réciproquement si $\varphi : \mathbb{N} \to N$ est récurrent pour $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, alors $\varphi \in C_{T(\varphi)}$. En effet du fait que $E(Y_1) < \infty$ et PGCDS = 1, appliquons le Th. 3 du chapitre 3. Soit $H_n = f_{Y_1} \circ \ldots \circ f_{Y_n}$ et σ sa loi limite dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Comme l'état initial de $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ est $id_{\mathbb{N}}$, $\forall n$ $H_n \in \mathcal{C}(\mathbb{N}) = \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(x+1)| = 1, \forall x \in \mathbb{N}\}$ et σ est concentrée sur $\mathcal{C}(\mathbb{N})$. En fait σ est concentrée sur C_P où P = ensemble des entiers naturels pairs car d'après le Théorème 5 du chapitre 3, σ est concentrée sur les h_{ab} avec ici $|a-b| = 1$, car h_{ab} est dans $\mathcal{C}(\mathbb{N})$.

Donc si $X_n = f_{Y_n} \circ \ldots \circ f_{Y_1}$, $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(H_n)$ et $\mathcal{L}(X_n \circ \varphi) = \mathcal{L}(H_n \circ \varphi)$. Notons ν l'image de σ par $h \longmapsto h \circ \varphi$; alors ν est concentrée sur $C_{T(\varphi)}$. Donc $\exists$ N, $\forall$ n $\geq$ N, $X_n \circ \varphi \in C_{T(\varphi)}$. Or on a supposé que φ est récurrent pour $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ c'est-à-dire que $X_n \circ \varphi = \varphi$ pour une infinité de n avec probabilité 1. Donc $\varphi \in C_{T(\varphi)}$ □

Pour montrer la 2ème partie du Théorème soit C_T une classe récurrente pour $(X_n)_{n=o}^{\infty}$. Ecrivons l'équation aux mesures stationnaires sur C_T.

π est une mesure stationnaire du $C_T \iff \pi$ satisfait à :

$$(1)\quad \begin{cases} \pi(f_{j,j+1}) = \sum_{k=o}^{\infty} \pi(f_{k,k+1})\, P_{f_{k,k+1},f_{j,j+1}} + \sum_{k=o}^{\infty} \pi(f_{k+1,k})\, P_{f_{k+1,k},f_{j,j+1}} \\ \text{et} \\ (f_{j+1,j}) = \sum_{k=o}^{\infty} \pi(f_{k,k+1})\, P_{f_{k,k+1},f_{j+1,j}} + \sum_{k=o}^{\infty} \pi(f_{k+1,k})\, P_{f_{k+1,k},f_{j+1,j}} \end{cases}$$

où $P_{hg} = P(X_{n+1} = g \mid X_n = h)$.

Posons pour simplifier $s_j = \pi(f_{j,j+1})$ et $t_j = \pi(f_{j+1,j})$, alors

$$(1) \iff (1') \quad \begin{cases} s_j = \sum_{k=j}^{\infty} s_k p_{k-j} + \sum_{k=o}^{\infty} t_k\, p_{k+j+1} \quad , \quad \forall\, j \in N \\ t_j = \sum_{k=o}^{\infty} s_k p_{k+j+1} + \sum_{k=j}^{\infty} t_k\, p_{k-j} \end{cases}$$

Une solution de (1') est alors $\pi_j = s_j = t_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k$, $\forall\, j \in N$.

En effet $\pi_j = \sum_{k=j}^{\infty} \sum_{y \geq k+1} p_y p_{k-j} + \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{y \geq k+1} p_y\, p_{k+j+1} =$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} p_{k-j} \sum_{y=k+1}^{\infty} p_y + \sum_{y=1}^{\infty} p_y \sum_{k=o}^{y-1} p_{k+j+1} = \sum_{n=o}^{\infty} p_u \sum_{y=u+j+1}^{\infty} py + \sum_{y=1}^{\infty} py \sum_{t=j+1}^{y+j} p_t =$$

$$= \sum_{u=1}^{\infty} p_u \Big(\sum_{y=u+j+1}^{\infty} p_y + \sum_{y=j+1}^{u+j} p_y \Big) + p_o \sum_{y=j+1}^{\infty} p_y = (1-p_o) \sum_{y=j+1}^{\infty} p_y + p_o \sum_{y=j+1}^{\infty} p_y = \pi_j \quad \forall j$$

Donc la mesure π définie par $\pi_j = \pi(f_{j,j+1}) = \pi(f_{j+1,j}) = \sum_{y=j+1}^{\infty} p_y$ est bien une mesure stationnaire sur C_T . □

<u>Théorème 4</u> : *Si S est non borné, PGCDS = 1 et* $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$, *alors presque sûrement* $\forall\, K > 0$, $\exists\, N_K$ *tel que* $\forall\, x$ *et* $y \in [0,K]$, $\forall\, n \geq N_K$, *on ait*

$|X_n(x) - X_n(y)| = 0$ *si* $x \equiv y \bmod 2$

$|X_n(x) - X_n(y)| = 1$ *si* $x \not\equiv y \bmod 2$.

Démonstration.

Il suffit de montrer le résultat pour $x \equiv y \bmod 2$. En effet supposons le établi dans ce cas. Si $x \not\equiv y \bmod 2$, soit $y' = y+1$. On a :

$|X_n(y) - X_n(y')| = 1$ et pour n assez grand $|X_n(x) - X_n(y')| = 0$

Donc $|X_n(x) - X_n(y)| = |X_n(x) - X_n(y') + X_n(y') - X_n(y)| = 1$ pour n assez grand.

Pour $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soit $R(f) = \sup \{n , f(0) = f(1) = \ldots = f(n)\}$ et R_n et R'_n les v.a. définies par : $R_n = R(f)$ si $f(x) = X_n(2x)$ et $R'_n = R(f)$ si $f(x) = X_n(2x+1)$.

Pour établir le Théorème il suffit d'établir que $R_n \to \infty$ et $R'_n \to \infty$ presque sûrement. Nous allons montrer que $R_n \to \infty$ presque sûrement. La démonstration que $R'_n \to \infty$ p.s. est tout à fait analogue.

Pour cela observons que le processus $(R_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissant au sens large. En effet $\forall\, n$, $R_{n+1} \geq R_n$ car $\forall\, x \in [0,R(f)]$, $f_Y \circ f(x) = |f(0) - y|$ et donc $R(f_y \circ f) \geq R(f)$.

D'autre part $R_{n+1} > R_n \iff Y_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n(0) + X_n(2R + 2))$.

En effet soit $n = R(f)$, on a : $R(f_y \circ f) > R(f) \iff |f(n+1)-y| = |f(0) - y| \iff y = \frac{1}{2}(f(0) + f(n+1))$.

Le problème revient donc à montrer que l'évènement $Y_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n(0)+X_n(2R+2))$ se produit une infinité de fois presque sûrement.

Si cet événement se produit un nombre fini de fois avec une probabilité positive, alors il existe R et N tels que avec une probabilité positive $R_n=R$, $\forall\, n \geq N$. Donc $Y_{n+1} \neq \frac{1}{2}(X_n(0) + X_n(2R+2)) \quad \forall\, n > N$.

Remarquons que $X_n(0) = X_n(2R)$ et $\frac{1}{2}(X_n(2R) + X_n(2R+2)) = X_n(2R+1)$ car $X_n(2R+2) \neq X_n(2R)$.

Donc pour montrer que l'événement $\{Y_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n(0) + X_n(2R+2))\}$ se produit une infinité de fois presque sûrement il revient au même de montrer que l'événement $Y_{n+1} \neq X_n(2R+1)$, $\forall\, n > N$ est de probabilité nulle.

Or $X_{n+1}(2R+1) = |X_n(2R+1) - Y_{n+1}|$. Comme la chaîne $(X_n(2R+1))_{n=0}^{\infty}$ est récurrente positive sur $\mathbb{N}$ (Théorème 4 chapitre 2) on a $X_{n+1}(2R+1) = 0$ pour une infinité de n presque sûrement. Ce qui achève la démonstration. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Von SCHELLING. "Über die Verteilung Kopplungswerte in gerkreuzten Ferumeldekabeln grosser Länge" Elektrische Nachrichten Technik, 11/12 November/Dezember 1943, 20, 251-259.

[2] W. FELLER. "An Introduction to Probability Theory and its Applications" Tome II, Wiley, New-York, 1966, 208.

[3] F.B. KNIGHT. "On the Absolute Difference Chains". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1978, 43, 57-63.

[4] G. LETAC. "A contraction Principle for certain Markov chains and its Applications. Random matrices and their applications". Contemporary Mathematics, J. Cohen and C. Small editors, A.M.S. Publications, Providence, Rhodes Island. [A paraître].

[5] N. BOURBAKI. Livre I. Herman, Paris, 1964, p.39.

[6] K. LAI CHUNG. "Markov chains with stationary Transition Probabilities". 2ème édition, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[7] S. LANG. Algebra. Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1965, p.63. 3ème tirage 1971.

[8] M.A. BOUDIBA. "La chaîne de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ où les Y_n sont i.i.d." C.R. Académie des Sciences, Paris, t.301, 517-519, 1985.

[9] N. BOURBAKI. Livre II, chap.1, p.106. 2ème édition, Herman, Paris 1964.

Laboratoire de Statistique et Probabilités
U.A.-C.N.R.S. 745 - Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

Institut National d'Enseignement
Supérieur d'Informatique
Oued Aïssi - TIZI-OUZOU
ALGERIE

Reçu en Juin 1986