ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

M. DOISY

Files d'attente à rejet différé

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 73-89

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_73_0>

FILES D'ATTENTE A REJET DIFFERE

M. DOISY

RESUME : Nous étudions dans cet article les files d'attente stationnaires à rejet différé. Ces files admettent la discipline suivante : le client qui trouve le serveur occupé revient avec le client suivant ; ils sont servis tous deux si le serveur est libre, sinon ils sont à nouveau rejetés ; le nombre de rejets est limité à k (k entier $\geqslant 1$).

Dans un premier temps on construit une solution stationnaire dans une extension de l'espace sous-jacent Ω (par une méthode analogue à celle de Neveu [1]).

On étudie ensuite quelques constantes du système, liées au temps moyen des inter-arrivées et des demandes de service.

ABSTRACT : This article deals with postponed stationary queues. These allow of the following procedure : the customer who finds the attendant busy comes back with the next customer ; both are waited on if the attendant is available ; if not they are rejected again ; the rejections may not number more than k (integer k $\geqslant 1$).

A stationary solution is first elaborated within an extension of the underlying space Ω.

Various constants of the system are then studied in connexion with the average of the inter-arrival and service-times.

I - LE MODELE.

Le modèle étudié est le suivant.
Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'un automorphisme ergodique θ et deux variables aléatoires réelles intégrables strictement positives réelles intégrables strictement positives σ et τ, considérons un flot de clients arrivant à des instants successifs T_n $(n \in \mathbb{Z})$ avec $T_o = 0$ et $T_{n+1} - T_n = \tau o \theta^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ qui réclament des services $\sigma_n = \sigma o \theta^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ à un unique serveur.

Le client d'indice n est servi si le serveur est libre à l'instant T_n ; sinon il est rejeté. Dans ce cas il se représente au serveur à l'instant T_{n+1} ; il est alors servi avec le client d'indice $n+1$ si le serveur est libre ; sinon il est rejeté à nouveau, comme le client d'indice $n+1$, et ils reviennent tous deux avec le client suivant. Les clients n'acceptent pas plus de k rejets (k entier ≥ 1).

Si à l'instant T_n le serveur est libre, il se charge d'un bloc de clients, de taille au plus $k+1$; le client d'indice m sera dans ce bloc si $m = n$ ou s'il a été rejeté précédemment avec m vérifiant la relation : $0 < n-m \leq k$.

Si $M(\omega)$ désigne l'ensemble des indices n pour lesquels le serveur est libre en T_n-0, la connaissance de $M(\omega)$ détermine le système au sens où il fournit les indices de tous les clients servis ; en effet les distances entre les indices consécutifs de $M(\omega)$ donnent les longueurs des blocs de clients servis.

Nous chercherons donc à construire un sous-ensemble aléatoire $M(\omega)$ de $\mathbb{Z}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) la condition de stationnarité :

$$M(\theta\omega) = M(\omega) - 1 \qquad \forall \omega \in \Omega$$

2) si 0 est dans $M(\omega)$ et si j est le nombre de clients dans le bloc correspondant $(1 \leq j \leq k+1)$ en posant :

$$V_j(\omega) = \mathrm{Inf}\{n \geq 1 \ \text{ tq } \ \tau + \tau o\theta + \ldots + \tau o\theta^{n-1} > \sigma + \sigma o\theta^{-1} \ldots + \sigma o\theta^{-j+1}\}$$

qui représente l'indice suivant de liberté, alors $V_j(\omega)$ doit être le premier entier à droite de 0 dans $M(\omega)$.

En fait, dans la construction que nous proposons, le sous-ensemble aléatoire M ne sera pas défini sur Ω lui-même, mais sur une extension de Ω.

II - CONSTRUCTION DE LA SOLUTION STATIONNAIRE SUR UNE EXTENSION DE Ω.

Remarquons tout d'abord qu'à l'instant $T_{V_j}(\omega)$, le bloc sera de longueur : $\mathrm{Inf}\,(V_j(\omega),k+1)$ qu'on notera :

$$V_j(\omega) \wedge k+1.$$

Si 0 est dans $M(\omega)$ avec j clients à servir, on obtient facilement, par récurrence, les indices à droite de 0 dans $M(\omega)$; plus délicat est de "remonter dans le passé" c'est-à-dire, de déterminer le **prédécesseur** de 0. Pour celà on ne suppose plus 0 dans $M(\omega)$, et on s'intéresse au dernier client servi avant (au sens large) le client d'indice 0.

Si l'indice de celui-ci est ℓ, on doit avoir :

$$V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell.$$

On est aussi amené à considérer l'ensemble :

$$\overline{\Omega} = \{(\omega,j,\ell) \in \Omega \times [1,k+1] \times \mathbb{N} \quad \text{tq} \quad V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell\}$$

que l'on munira de la trace de la mesure produit, soit :

$d\overline{P} = 1_{\overline{\Omega}}\, dP \otimes d\lambda_1 \otimes d\lambda_2$ où $d\lambda_1$ (resp. $d\lambda_2$) est la mesure de comptage.

On définit une transformation $\overline{\Theta}$ sur $\overline{\Omega}$, à partir de θ, en observant quels indices conviennent en $\theta\omega$, donc en étudiant :

$$V_j[\theta^{-(\ell+1)}(\theta\omega)] = V_j(\theta^{-\ell}\omega).$$

Si $V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell+1$, on prend le point $(\theta\omega, j, \ell+1)$ de $\overline{\Omega}$.

Si $V_j(\theta^{-\ell}\omega) = \ell+1$, pour $\theta\omega$, le dernier client servi est celui d'indice 0 avec un bloc de longueur $V_j(\theta^{-\ell}\omega) \wedge k+1$.

On prend donc le point $(\theta\omega, V_j(\theta^{-\ell}\omega) \wedge k+1, 0)$ de $\overline{\Omega}$. En résumé, pour (ω, j, ℓ) dans $\overline{\Omega}$ on définit la transformation $\overline{\Theta}$ par :

$$\overline{\Theta}(\omega,j,\ell) = (\theta\omega, j, \ell+1) \quad \text{si} \quad V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell+1$$

$$\overline{\Theta}(\omega,j,\ell) = (\theta\omega, V_j(\theta^{-\ell}\omega) \wedge k+1, 0) \quad \text{si} \quad V_j(\theta^{-\ell}\omega) = \ell+1.$$

Considérons la section de $\overline{\Omega}$ en ω, notée $\overline{\Omega}(\omega)$.

On a : $$\text{Card } \overline{\Omega}(\omega) = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_j(\theta^{-\ell}\omega) > \ell\}}$$

Les applications V_j étant croissantes en j, on a :

$$\text{Card } \overline{\Omega}(\omega) \leq (k+1) - \sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1}(\theta^{-\ell}\omega) > \ell\}}$$

et la condition : $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1}(\theta^{-\ell}\omega) > \ell\}}$ finie presque sûrement, suffit à assurer que $\text{Card } \overline{\Omega}(\omega)$ est aussi fini presque sûrement. Nous ferons cette hypothèse pour la suite.

Remarquons que cette condition est vérifiée si $E(V_{k+1})$ est finie. En effet

$$E(V_{k+1}) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P(V_{k+1} > \ell)$$

ce qui s'écrit encore :

$$[V_{k+1}] = \int_{\Omega} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1} \circ \theta^{-\ell} > \ell\}} \, dP.$$

En posant : $\bar{\Omega}_n = \bar{\Theta}^n(\bar{\Omega})$, on obtient une suite décroissante d'ensembles et on s'intéresse à :

$$\bar{\Omega}_\infty = \lim_n \downarrow \bar{\Omega}_n.$$

Pour tout n, $\bar{\Omega}_n(\omega)$ est non vide car :

$$\bar{\Theta}^n(\theta^{-n}\omega, x, x) \text{ est de la forme } (\omega, x, x).$$

Un argument classique de compacité prouve alors que $\bar{\Omega}_\infty(\omega) = \bigcap_n \bar{\Omega}_n(\omega)$ est non vide, pour tout ω.

Tout point de $\bar{\Omega}_n$ de la forme $(\theta\omega, x, x)$ est l'image par $\bar{\Theta}$ d'au moins un point de $\bar{\Omega}_{n-1}$, de première composante ω.

En effet si $(\theta\omega, j, \ell)$ appartient à $\bar{\Omega}_n$, on a : $(\theta\omega, j, \ell) = \bar{\Theta}^n(\omega', j', \ell')$ avec (ω', j', ℓ') dans $\bar{\Omega}$ et donc

$$\begin{aligned}(\theta\omega, j, \ell) &= \bar{\Theta}[\bar{\Theta}^{n-1}(\omega', j', \ell')] \\ &= \bar{\Theta}[(\theta^{n-1}(\omega'), j'', \ell'')].\end{aligned}$$

Alors $\theta^{n-1}(\omega') = \omega$ et (ω, j'', ℓ'') appartient à $\bar{\Omega}_{n-1}$.

Finalement on a : Card $\overline{\Omega}_n(\theta\omega) \leqq \text{Card } \overline{\Omega}_{n-1}(\omega)$. Par passage à la limite décroissante, on a :

$$0 \leqq \text{Card } \overline{\Omega}_\infty(\theta\omega) \leqq \text{Card } \overline{\Omega}_\infty(\omega).$$

Grâce à l'ergodicité de l'application θ, on en déduit que Card $\overline{\Omega}_\infty(\omega)$ est presque sûrement une constante finie et non nulle.

Posons alors : Card $\overline{\Omega}_\infty(\omega) = c$ p.s. $[1 \leqq c \leqq \infty)$.
Appelons N l'ensemble négligeable des ω pour lesquels cette égalité n'est pas vérifiée et remplaçons Ω par l'ensemble équivalent :

$$\Omega \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \theta^j(N)$$

qu'on notera encore Ω.

On a alors, pour tout ω et pour tout entier j de $\mathbb{Z}$

$$\text{Card } \overline{\Omega}_\infty(\omega) = \text{Card } \overline{\Omega}_\infty(\theta^j\omega) = c.$$

Notons encore que l'égalité : Card $\overline{\Omega}_\infty(\cdot) = c$ implique : $\overline{P}(\overline{\Omega}_\infty) = c$.

L'application $\overline{\Theta}$ envoie surjectivement $\overline{\Omega}_\infty(\omega)$ dans $\overline{\Omega}_\infty(\theta\omega)$. En effet, si à partir du point $(\theta\omega,j,\ell)$ de $\overline{\Omega}_\infty$ on peut "remonter" $n+1$ fois par $\overline{\Theta}$ (i.e. $(\theta\omega,j,\ell) \in \overline{\Theta}^{n+1}(\overline{\Omega})$), il existe au moins un point de :

$$\overline{\Theta}^{-1}(\{(\theta\omega,j,\ell)\})$$

à partir duquel on peut "remonter" n fois par $\overline{\Theta}$.
Ceci étant vrai, pour tout entier n, l'un des points de $\overline{\Theta}^{-1}(\{\theta\omega,j,\ell\})$ est dans $\overline{\Omega}_\infty(\omega)$.

Les ensembles $\overline{\Omega}_\infty(\omega)$ et $\overline{\Omega}_\infty(\theta\omega)$ ayant le même cardinal fini, l'application $\overline{\Theta}$ transforme bijectivement $\overline{\Omega}_\infty(\omega)$ en $\overline{\Omega}_\infty(\theta\omega)$. De plus la première composante de $\overline{\Theta}$ étant θ, l'application $\overline{\Theta}$ est une bijection de $\overline{\Omega}_\infty$.

Vérifions enfin que dans $\overline{\Omega}_\infty$, l'application $\overline{\Theta}$ préserve $\overline{P}$.

Soit f une application mesurable positive sur $\overline{\Omega}_\infty$ et posons :

$$\overline{\Theta}(\omega,j,\ell) = (\theta\omega,\alpha(\omega,j,\ell),\beta(\omega,j,\ell)).$$

Alors

$$\int_{\overline{\Omega}_\infty} f \circ \overline{\Theta}\, d\overline{P} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \int_\Omega f(\theta\omega,\alpha(\omega,j,\ell),\beta(\omega,j,\ell))1_{\overline{\Omega}_\infty}(\omega,j,\ell)dP(\omega).$$

L'invariance de P par θ, permet d'écrire cette égalité :

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \int_\Omega f(\omega,\alpha(\theta^{-1}\omega,j,\ell),\beta(\theta^{-1}\omega,j,\ell))1_{\overline{\Omega}_\infty}(\theta^{-1}\omega,j,\ell)dP(\omega)$$

Comme $\overline{\Theta}$ transforme bijectivement les sections, les indices j et ℓ vérifiant $(\theta^{-1}\omega,j,\ell)$ dans $\overline{\Omega}_\infty$, se transforment par α et β en les indices j' et ℓ' vérifiant (ω,j',ℓ) dans $\overline{\Omega}_\infty$ et donc :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} f(\omega,\alpha(\theta^{-1}\omega,j,\ell),\beta(\theta^{-1}\omega,j,\ell))1_{\overline{\Omega}_\infty}(\theta^{-1}\omega,j,\ell)$$

$$= \sum_{j'=1}^{k+1} \sum_{\ell'\in\mathbb{N}} f(\omega,j',\ell')1_{\overline{\Omega}_\infty}(\omega,j',\ell')$$

D'où finalement :

$$\int_{\overline{\Omega}_\infty} f \circ \overline{\Theta}\, d\overline{P} = \int_{\overline{\Omega}_\infty} f\, d\overline{P}.$$

Dans l'ensemble $\overline{\Omega}_\infty$, considérons l'ensemble aléatoire :

$$M(\overline{\omega}) = \{n \in \mathbb{Z} \quad \text{tq} \quad \overline{\Theta}^{n}(\overline{\omega}) \in \Omega \times [1,k+1] \times \{0\}\}.$$

On a immédiatement : $M(\overline{\Theta}\,\overline{\omega}) = M(\overline{\omega}) - 1$. Si 0 est dans $M(\overline{\omega})$, alors le point $\overline{\omega}$ est de la forme $(\omega,j,0)$ et on a :

$$\operatorname{Inf}\{n \geq 1 \quad \text{tq} \quad \overline{\Theta}^{n}(\omega,j,0) \in \Omega \times [1,k+1] \times \{0\}\} = V_j(\omega).$$

Ainsi le successeur de 0 dans $M(\overline{\omega})$ est $V_j(\omega)$.

Conclusion : Sous l'hypothèse : $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} 1_{\{V_{k+1}\circ\theta^{-\ell} > \ell\}}$ finie presque sûrement, on a obtenu une extension de Ω, soit $\overline{\Omega}_\infty$, de mesure $\overline{P}(\overline{\Omega}_\infty) = c$, munie de l'automorphisme (non nécessairement ergodique) $\overline{\Theta}$ qui préserve la la mesure et de plus transforme bijectivement les sections. L'ensemble aléatoire : $M(\overline{\omega}) = \{n \in \mathbb{Z} \quad \text{tq} \quad \overline{\Theta}^{n}(\overline{\omega}) \in \Omega \times [1,k+1] \times \{0\}\}$ est une solution stationnaire au problème associé à $\overline{\Omega}_\infty$, $\overline{\Theta}$ et à l'application V définie sur la base par : $V(\omega,j,0) = V_j(\omega)$.

Un point (ω,j,ℓ) de $\overline{\Omega}_\infty$ s'interprète de la façon suivante ; l'instant $T_{-\ell}(\omega)$ est un instant de liberté du serveur ; le client d'indice $-\ell$ sera servi avec $j-1$ clients précédemment rejetés, et il est prédécesseur de 0. Pour presque tout ω, il y a c solutions stationnaires.

III - TRADUCTION DANS L'ESPACE DES TOURS.

On transcrit, dans ce paragraphe, les résultats obtenus, dans l'espace des tours, ce qui fournit une meilleure représentation.

Considérons l'ensemble :

$$T = \{(\omega,j,\ell) \in \Omega \times [1,k+1] \times \mathbb{N} \quad \text{tq} \quad 0 \leq \ell < V_j(\omega)\}$$

que l'on notera symboliquement :

$$T = \Omega \times [1,k+1] \times [0,V_j[$$

et l'"ascenseur" t dans T défini par :

$$t(\omega,j,n) = (\omega,j,n+1) \quad \text{si} \quad V_j(\omega) > n+1$$

$$t(\omega,j,n) = \theta^{V_j}(\omega),V_j(\omega) \wedge k+1,0) \quad \text{si} \quad V_j(\omega) = n+1.$$

La mesure Q sur T est toujours la trace de la mesure produit.

On met en bijection $\overline{\Omega}$ et T par l'application :

$$\phi(\omega,j,\ell) = (\theta^{-\ell}\omega,j,\ell) \quad \text{pour} \quad (\omega,j,\ell) \quad \text{dans} \quad \overline{\Omega}.$$

On vérifie sans peine que : $\phi \circ \overline{\Theta} = t \circ \phi$.

De plus, l'application ϕ envoie la mesure $\overline{P}$ sur Q. Soit, en effet, A un ensemble mesurable de T :

$$\int_{\Omega} 1_A \circ \phi(\overline{\omega})d\overline{P}(\overline{\omega}) = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} 1_A(\theta^{-\ell}\omega,j,\ell)\ 1_{\overline{\Omega}}(\omega,j,\ell)dP(\omega)$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} 1_A(\omega,j,\ell)\ 1_{\overline{\Omega}}(\theta^{-\ell}\omega,j,\ell)dP(\omega).$$

Mais on a les équivalences suivantes :

$$(\theta^{\ell}\omega,j,\ell) \in \overline{\Omega} \Longleftrightarrow V_j(\omega),<\ell \Longleftrightarrow (\omega,j,\ell) \in T.$$

L'expression précédente devient :

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} 1_A(\omega,j,\ell)\ 1_T(\omega,j,\ell)dP(\omega) = Q(A).$$

Si maintenant nous posons : $T_n = t^n(T)$ on a :

$$T_\infty = \lim_n \downarrow t^n(T) \quad \phi(\overline{\Omega}_\infty).$$

En particulier : $Q(T_\infty) = \overline{P}(\overline{\Omega}_\infty) = c.$

Si π_1 désigne la projection de T_∞ sur Ω, on en déduit que $\pi_1(T_\infty)$ n'est pas négligeable. On enlève à T_∞, l'image par ϕ des négligeables que l'on a ôté à $\overline{\Omega}_\infty$, et on identifie cet ensemble à T_∞.

Dans $\overline{\Omega}_\infty$, l'application $\overline{\Theta}$ préservant $\overline{P}$, après transport par ϕ, l'application t préserve Q dans T_∞.

Comme t vaut $\phi \circ \overline{\Theta} \circ \phi^{-1}$ et que $\overline{\Theta}$ est une bijection dans $\overline{\Omega}_\infty$, t est aussi une bijection sur T_∞. L'ensemble T_∞, stable par l'ascenseur t, a une structure de tours ; il est donc parfaitement déterminé par sa base sur $\Omega \times [1,k+1[$, que l'on notera T_0, et par les V_j. On écrira symboliquement :

$$T_\infty = T_0 \times [0,V_j[.$$

Intéressons-nous à cette base T_0, munie de la mesure trace notée Q_0.

Dire que (ω,j) est dans T_0, c'est-à-dire que pour ω, 0 est un instant de liberté du serveur avec un bloc de j clients à servir.

On construit à partir de t, l'application t_0 de T_0 dans lui-même, en posant :

$$t_0(\omega,j) = (\theta^{V_j}(\omega), V_j(\omega) \wedge k+1) \quad \text{pour} \quad (\omega,j) \quad \text{dans} \quad T_0.$$

Alors t_0 est une bijection de T_0 ; en effet l'image réciproque d'un point de T_0, s'obtient en prenant tout d'abord son image réciproque par t, puis en redescendant jusqu'à la base.

L'application t_o préserve Q_o sur T_o, et c'est même équivalent au fait que t préserve Q sur T_∞ ; pour s'en convaincre il suffit de songer à la forme d'ascenseur de t.

Finalement, l'application t_o donne l'évolution du système, tant future que passée (grâce à t_o^{-1}) pour les solutions stationnaires pour lesquelles 0 est instant de liberté du serveur.

Enfin, dans T_∞ on a une solution stationnaire en considérant, comme précédemment l'ensemble aléatoire :

$$M(\tilde{\omega}) = \{n \in \mathbb{Z} \quad \text{tq} \quad t^n(\tilde{\omega}) \in T_o\} \qquad \text{pour } \tilde{\omega} \text{ dans } T_\infty.$$

IV - QUELQUES CONSTANTES DU SYSTEME.

Rappelons que Q_o est la mesure trace sur la base T_o des tours, donc :

$$Q_o = 1_{T_o}(\omega,j)dP(\omega) \otimes d\lambda^1(j).$$

On a vu déjà que : $Q(T_\infty) = c$.

Grâce à la structure de tours de T_∞, on a :

$$Q(T_\infty) = \int_{T_o} V_j(\omega)\, dQ_o(\omega,j) = c$$

ce que l'on écrira :

$$\boxed{\int_{T_o} V_j \frac{dQ_o}{c} = 1}$$

Les points intermédiaires (ω,j,ℓ) avec $0 < \ell < V_j(\omega)$ au-dessus de (ω,j) de T_o, seront des clients servis ou non, selon la position de ℓ par rapport à $V_j(\omega)$.

Plus précisément :

si $V_j(\omega) \leqq k+1$: tous les clients de la tour seront servis

si $V_j(\omega) > k+1$: seuls les points intermédiaires d'indice ℓ, vérifiant :

$\ell \geqq V_j(\omega) - k$ seront servis.

Il y a aura toujours : $V_j \wedge k+1$ clients servis sur une tour. Ainsi le nombre moyen de clients servis, soit N_s vaut :

$$\boxed{N_s = \int_{T_o} V_j \wedge (k+1) \cdot \frac{dQ_o}{c}}$$

Les clients servis immédiatement, correspondent aux points de la base T_o : leur nombre moyen N'_s vaut donc :

$$\boxed{N'_s = \int_{T_o} \cdot \frac{dQ_o}{c}}$$

Dans l'espace des tours T, le temps de retour à T_o est donné, pour (ω,j) dans T_o, par $V_j(\omega)$.

Posons $T_{V_o}(\omega,j) = \sum_{0 \leq i < V_j(\omega)} \tau \circ \theta^i(\omega)$ pour (ω,j) dans T_o qui représente le premier instant d'arrivée et de liberté après 0.

On a : $$T_{V_o}(\omega,j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tau \circ \theta^i(\omega)\ 1_{\{i<V_j(\omega)\}}.$$

Alors : $$\int_{T_i} T_{V_o} \frac{dQ_o}{c} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{k+1} \int_\Omega \sum_{i=0}^{+\infty} \tau \circ \theta^i(\omega)\ 1_{\{i<V_j(\omega)\}}\ 1_{T_o}(\omega,j)dP(\omega)$$

ce qui s'écrit encore :

$$= \frac{1}{c} \int_\Omega \tau \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{i=0}^{+\infty} 1_{\{i<V_j(\theta^{-i}\omega) \text{ et } (\theta^{-i}\omega,j) \in T_o\}} dP(\omega) \right\}$$

Les conditions : "$(\theta^{-i}\omega,j) \in T_o$ et $i < V_j(\theta^{-i}\omega)$" traduisent exactement que le client d'indice $-i$ est un prédécesseur (toujours au sens large) de 0
Comme pour presque tout ω, il y a c solutions stationnaires donc c prédécesseurs de 0, cette double somme vaut c, presque sûrement.

On a donc : $$\boxed{\int_{T_o} T_{V_o} \frac{dQ_o}{c} = E(\tau).}$$

Le temps de service associé à un point (ω,j) de T_o vaut :

$$\sigma + \sigma \circ \theta^{-1} + \ldots + \sigma \circ \theta^{-j+1}.$$

Soit S le temps moyen de service :

$$S = \int_{T_o} (\sigma + \ldots + \sigma \circ \theta^{-j+1}) \frac{dQ_o}{c} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{k+1} (\sigma + \ldots + \sigma \circ \theta^{-j+1}) 1_{T_o}(\omega,j) dP(\omega).$$

En réordonnant les termes de cette somme, et en utilisant toujours l'invariance de P par θ, on obtient :

$$S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sigma(\omega)\ f(\omega) dP(\omega)$$

où $$f(\omega) = \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} 1_{T_o}(\theta^{+i}\omega,j)\ /\ \omega \in \Omega.$$

Les conditions : "$(\theta^{+i}\omega,j) \in T_o$ avec $i < j$" traduisent que le client d'indice 0 est dans un bloc de clients servis.

Ainsi $f(\omega)$ compte le nombre de solutions servant le client d'indice 0.

On a alors : $$\boxed{S = E(\sigma \cdot \frac{f}{c}).}$$

Remarquons que ce calcul reste valable en remplaçant σ par la constante 1. On obtient donc :

$$\boxed{\int_{T_o} j \cdot \frac{dQ_o}{c} = E(\frac{f}{c})}$$

La définition des applications V_j, implique que :

$$\sigma + \ldots + \sigma \circ \theta^{-j+1} < T_{V_o}.$$

Ainsi $$\boxed{E(\sigma \cdot \frac{f}{c}) \leq E(\tau).}$$

Utilisons la seconde inégalité de définition des V_j, soit :

$$\sum_{i=0}^{V_j-2} \tau \circ \theta^i \leq \sigma + \sigma \circ \theta^{-1} + \ldots + \sigma \circ \theta^{-j+1}.$$

Le premier membre diffère de T_{V_o}, pour le seul terme : $\tau \circ \theta^{V_j-1}$ que l'on intègre :

$$\int_{T_o} \tau \circ \theta^{V_j-1} \frac{dQ_o}{c} = \frac{1}{c} \int_\Omega \sum_{j=1}^{k+1} \tau \circ \theta^{V_j-1}(\omega) 1_{T_o}(\omega,j) dP(\omega)$$

$$= \frac{1}{c} \int_\Omega \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{n\geq 1} \tau \circ \theta^{n-1}(\omega) 1_{\{V_j(\omega)=n \ \text{ et } \ (\omega,j)\in T_o\}} dP(\omega)$$

ou encore :

$$= \frac{1}{c} \int_\Omega \tau \circ \theta^{-1}(\omega) \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{n\geq 1} 1_{\{V_j \circ \theta^{-n}(\omega)=n\} \text{ et } (\theta^{-n}\omega,j)\in T_o\}} \right\} dP(\omega)$$

On pose $g(\omega)$ cette double somme.

Si le point $(\theta^{-n}\omega,j)$ est dans T_o, avec : $V_j \circ \theta^{-n}(\omega) = n$, le client d'indice 0 est servi sans attente.

Ainsi la quantité $g(\omega)$ compte le nombre de solutions servant le client d'indice 0 sans attente.

On peut écrire plus simplement : $g(\omega) = \sum_{j=1}^{k+1} 1_{T_o}(\omega,j)$.

Alors
$$\boxed{\int_{T_o} \tau \circ \theta^{V_j - 1} \frac{dQ_o}{c} = E(\tau \circ \theta^{-1} \cdot \frac{g}{c})}$$

Remarquons que l'on a toujours $0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)$.

Les inégalités de définition des applications V_j donnent ainsi par intégration, la double inégalité :

$$\boxed{E(\tau) - E(\tau \circ \theta^{-1} \cdot \frac{g}{c}) \leq E(\sigma \cdot \frac{f}{c}) \leq E(\tau).}$$

Si l'on suppose les suites : $(\sigma \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\tau \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indépendantes, le fait que le client d'indice 0 soit servi ou non, ne dépend pas du service qu'il demande ainsi les variables aléatoires σ et f sont indépendantes. La deuxième inégalité devient :

$$\boxed{E(\frac{f}{c}) \leq \frac{E(\tau)}{E(\sigma)}}$$

En particulier si les délais de service sont grands devant les délais d'inter-arrivée, peu de solution en moyenne serviront le client d'indice 0 (ou un client d'indice 1)

BIBLIOGRAPHIE :

A.A. BOROVKOV : Stochastic processes in queuing theory. Springer 1976.

J.W. COHEN : The simple server queue. North Holland. Amsterdam 1969.

M.R. JAÏBI : Evolution d'une file d'attente avec priorité. Annales de l'I.H.P., Section B, Vol. XVI n° 3.

R. LOYNES : The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service-times. Proc. Cambridge Philo-Soci. 58 (1962).

J. NEVEU

[1] : Cours de Zurich. (Février 83). Théorie Ergodique et Processus Ponctuels Stationnaires. Application aux files d'attente.

[2] : Introduction aux processus aléatoires. Cours de 3$^{\text{ème}}$ Cycle. Université Paris VI.

[3] : Processus Ponctuels. Ecole d'Eté de Probabilités de St-Flour VI (1976. Lecture Notes. Springer Verlag (1977).

Michel DOISY
B.P. 4060
TANANARIVE (Madagascar)

Reçu en Mars 1986