

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

O. JULIA

**Temps local pour les martingales à deux indices par
rapport à sa variation quadratique**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEMPS LOCAL POUR LES MARTINGALES A DEUX INDICES PAR

RAPPORT A SA VARIATION QUADRATIQUE

O. JULIA

Abstract:

We give a local time for some square integrable continuous martingales with respect to their quadratic variation; we also exhibe the local time of the processes J_z with respect to its quadratic variation.

1. Introduction

Pour les martingales à deux indices continues et avec leur moment d'ordre quatre fini, il existe un processus de temps local L_{st}^x , continu dans les trois variables. Ce processus est un temps local par rapport à la variation quadratique de $\tilde{M}$, qui est une martingale associée a M (cf [4]). Ces résultats on été démontrés par Nualart en [5].

Il serait intéressant de voir sous quelles conditions il existe un temps local de la martingale M par rapport à sa propre variation quadratique $\cdot M$.

L'existence d'un temps local pour le drap brownien $\{W_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ par rapport à sa variation quadratique a été démontré par Walsh [6] en utilisant les temps locaux à une dimension, de la façon suivante:

Si $L_1(x, s, t)$ est le temps local du mouvement brownien unidimensionel $\{W_{st}, s \geq 0\}$, on définit le temps local sur le plan comme:

$$L(x, s, t) = \int_0^t L_1(x, s, v) dv$$

Walsh démontre que le processus $\{L(x, s, t), x \in \mathbb{R}, (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ est

continu dans les trois variables, continuellement différentiable en s et t , et vérifie presque partout : pour toute ϕ borélienne et bornée

$$\int_0^s \int_0^t \phi(W_{uv}) du dv = \int_R \phi(x) L(x, s, t) dx.$$

Nous nous sommes demandés si c'est possible d'utiliser la même idée pour trouver le temps local pour des martingales à deux indices continues et de carré intégrable par rapport à sa variation quadratique.

Plus précisément, dans la deuxième partie on démontre pour des martingales continues et de carré intégrable, un théorème d'existence d'un temps local, $L(x, s, t)$, continu dans les trois variables, par rapport à la variation quadratique de la martingale, sous des hypothèses de continuité et dérivabilité des processus $\frac{d\langle M \rangle_z}{dz}$, $\frac{d\langle M_s \rangle_t}{dt}$, $\frac{d\langle M_t \rangle_s}{ds}$.

Cependant, on ne peut pas appliquer ce Théorème aux processus du genre

$$\iint_{R_z \times R_z} \psi(\xi, \xi') dW_\xi dW_{\xi'}$$

et en particulier aux processus $J_z = \int_{R_z} \int_{R_z} 1_D(\xi, \xi') dW_\xi dW_{\xi'}$

ou $D = \{(z, z') \in R_+^2, z = (s, t), z' = (s', t') / s \leq s', t \leq t'\}$.

Dans la troisième partie on fait une étude particulière pour le processus J_z qui nous permet d'obtenir son temps local, $L(x, s, t)$, continu dans les trois variables, par rapport à sa variation quadratique.

2. Temps local pour les martingales à deux indices.

Notations

On considère R_+^2 muni de l'ordre partiel usuel:

$$(s, t) \leq (s', t') \iff s \leq s', \text{ et } t \leq t',$$

$$(s, t) < (s', t') \iff s < s', \text{ et } t < t'.$$

En plus on définit

$$(s, t) \geq (s', t') \iff s \geq s', \text{ et } t \geq t'.$$

Si $z < z'$, on notera $]z, z']$ le rectangle $\{x \in \mathbb{R}_+^2; z < x \leq z'\}$.

En particulier, le rectangle $[0, z]$ sera indiqué par R_z .

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, et $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions habituelles (cf [2]):

$$F_1. \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}_{z'}, \text{ si } z \leq z' \quad (\text{famille croissante})$$

$$F_2. P(A) = 0 \text{ entraîne } A \in \mathcal{F}_0$$

$$F_3. \bigcap_{z < z'} \mathcal{F}_{z'} = \mathcal{F}_z \text{ pour tout } z \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \quad (\text{continuité à droite})$$

$$F_4. \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2, \text{ les tribus } \mathcal{F}_{s\infty} = \bigvee_{y \geq 0} \mathcal{F}_{sy} \text{ et } \mathcal{F}_{\infty t} = \bigvee_{x \geq 0} \mathcal{F}_{xt} \text{ sont conditionnellement indépendantes par rapport à } \mathcal{F}_{st}.$$

On dira qu'un processus $\{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ intégrable et adapté à la filtration $\mathcal{F}_z$ est une martingale si pour tous $z \leq z'$ on a $E(M_{z'} / \mathcal{F}_z) = M_z$.

Pour établir le Théorème de décomposition de Doob-Meyer pour les martingales à deux indices et de carré intégrable, on a besoin de la notion de martingale faible. On dira qu'un processus $\{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ intégrable et adapté à la filtration $\mathcal{F}_z$ est une martingale faible si $E(M([z, z']) / \mathcal{F}_z) = 0$ pour tous $z < z'$. Rappelons que $M([z, z']) = M_{z'} - M_{st'} - M_{s't} + M_z$ avec $z = (s, t)$ et $z' = (s', t')$.

La tribu prévisible $\mathcal{P}$ dans $R_+^2 \times \Omega$ est définie comme la tribu engendrée par les ensembles $]z, z'] \times H$ ou $z < z'$ et H appartient à $\mathcal{F}_z$. D'autre part, on dira qu'un processus $\{A_z, z \in R_+^2\}$ est un processus croissant s'il est continu à droite, adapté, $A_0 = 0$, et vérifie $A(]z, z']) \geq 0$ pour tout rectangle $]z, z']$.

Si M est une martingale de carré intégrable, il existe un unique processus croissant, $\langle M \rangle$, prévisible, nul sur les axes, appelé variation quadratique de M , tel que $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale faible (cf [2], [3]).

Si M est une martingale de carré intégrable, pour tout $t \in R_+$, on notera par $\langle M_t \rangle_s$ la variation quadratique du processus à un indice $\{M_{st}, s \geq 0\}$. Également, pour tout $s \geq 0$, on définit $\langle M_s \rangle_t$.

On notera par $\{W_z, z \in R_+^2\}$ le drap brownien, c'est à dire, W sera un processus gaussien, centré, continu et avec covariance $E(W_{st} W_{s't'}) = (s \wedge s')(t \wedge t')$.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant:

Théorème (2.1)

Soit $\{M_z, z \in R_+^2\}$ une martingale continue, de carré intégrable, nulle sur les axes et telle que:

$$a) \langle M \rangle_z = \int_{R_z} g(u, v) du dv \quad \forall z \in R_+^2$$

ou $g(u, v, \omega)$ est un processus $B(R_+^2) \times \mathcal{F}$ -mesurable, adapté, continu et avec dérivée en u continue en $(0, +\infty)^2$.

$$b) \langle M_t \rangle_s = \int_0^s f(u, t) du \quad \forall t > 0$$

où $f(u, t, \omega)$ est un processus $B(R^2_+) \times F$ - mesurable, adapté, continu, avec dérivée par rapport à u continue et tel que $f(u, t) > 0$ sur $(0, +\infty)^2$.

$$c) \langle M_{s.} \rangle_t = \int_0^t h(s, v) dv \quad \forall s > 0$$

ou $h(s, v, \omega)$ est un processus $B(R^2_+) \times F$ - mesurable et tel que

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E[|h(s, v)|^p] < \infty \quad \forall s, t \geq 0$$

pour quelque $p > 4$.

Alors: il existe un temps local $\{L(x, s, t), x \in R, (s, t) \in R^2_+\}$ de la martingale $\{M_z, z \in R^2_+\}$ par rapport à sa variation quadratique qui admet une version continue en $(R - \{0\}) \times R^2_+$.

Évidemment les conditions a, b et c peuvent être énoncées en échangeant les rôles de s et t .

Pour démontrer ce théorème on a besoin de quelques lemmes. Soit

$\{M_z, z \in R^2_+\}$ une martingale continue et de carré intégrale; on peut considérer la famille de martingales continues à un indice $\{(M_{.t})_{s \geq 0}, t \geq 0\}$ et leurs temps locaux $\{L_1(x, s, t), x \in R, s \geq 0, t \geq 0\}$.

Lemme (2.2)

Sous la condition c) du Théorème (2.1), il existe une version de $\{L_1(x, s, t), x \in R, s, t \geq 0\}$ continue en (x, s, t) :

Démonstration

En utilisant le Théorème(1.1) de M. Yor [7] il suffit de démontrer qu'il existe un $p \in [1, \infty)$ et un $\lambda \in (0, 1]$ avec $\lambda p > 4$ tel que:

$$\|M_{.t} - M_{.t'}\|_{H_p} \leq C \|t - t'\|^\lambda,$$

ou $\|M\|_{H_p}$ désigne $E[\sup_s |M_s|^p]^{1/p}$.

$\forall S, T \geq 0$, on considère $\{(M_t)_s, 0 \leq s \leq S, 0 \leq t \leq T\}$.
D'après la condition c) du Théorème (2.1), il existe un $\bar{p} > 4$ tel que

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E[|h(s, v)|^{\bar{p}}] < \infty \quad \forall s, t \geq 0.$$

Prenons $t < t'$, à cause des inégalités de Doob et Burkholder, on a,

$$\begin{aligned} \|M_{\cdot, t} - M_{\cdot, t'}\|_{H_p} &\leq C_p E[|M_{St} - M_{St'}|^p]^{1/p} \leq C_p \left\| \left(\int_t^{t'} h(S, v) dv \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq C_p |t - t'|^{1/2} \left[\sup_{t \leq \tau \leq t'} E[|h(S, \tau)|^{p/2}]^{1/p} \right] \leq |t - t'|^{1/2} K^{1/p}, \text{ si on} \\ &\text{prend } p = 2\bar{p}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme (2.3)

Il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}$, avec $P(N) = 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ il existe une région d'arrêt $D_x \subset \mathbb{R}_+^2$ qui vérifie,

- 1) $\overline{D_x^c}$ a une intersection vide avec les axes
- 2) $\forall \omega \in \Omega \setminus N$ et $\forall (s, t) \in D_x(\omega)$ on a $L_1(x, s, t, \omega) = 0$.

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ on définit $D_x(\omega) = \{ (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sup_{z \in R_{st}} |M_z(\omega)| \leq \frac{|x|}{2} \}$.

La martingale est nulle sur les axes, ainsi donc $\overline{D_x^c}$ vérifie 1).

Soit $s, t \in \mathbb{R}_+$ fixés. Notons $A_{st} = \{ \omega \mid (s, t) \in D_x(\omega) \}$.

Pour tout $\omega \in A_{st}$ nous avons

$$1_{\{M_{s', t} > x\}}(\omega) = 0 \quad \forall s' \leq s, \text{ si } x > 0,$$

$$1_{\{M_{s', t} > x\}}(\omega) = 1 \quad \forall s' \leq s, \text{ si } x < 0,$$

et d'après la propriété de localisation de l'intégrale stochastique, si $\omega \notin N_{st}$ (avec $P(N_{st}) = 0$)

$$\left(\int_0^s 1_{\{M_{s,t} > x\}} d_1 M_{s,t} \right) (\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ M_{st} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et par la formule de Tanaka, $L_1(x, s, t) (\omega) = 0$.

Il nous reste à prendre un ensemble mesurable et dense dans R_+^2 , $\{(s_n, t_n), n \geq 1\}$, et définir $N_x = \bigcup_{n \geq 1} N_{s_n, t_n}$.

Alors, si $\omega \notin N_x$ et $(s, t) \in D_x(\omega)$, $L_1(x, s, t) (\omega) = 0$; en plus si $x < x'$, $D_x(\omega) \subset D_{x'}(\omega)$. Alors il suffit de prendre $N = \bigcup_{q \in Q} N_q$ pour obtenir le résultat.

Démonstration du Théorème (2.1)

$$\text{Soit } L(x, s, t) = \int_0^t \frac{g(s, v)}{f(s, v)} L_1(x, s, v) dv - \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right) L_1(x, u, v) du dv \quad (2.1)$$

$L(x, s, t)$ est continu parce que les fonctions f, g , leurs dérivés par rapport à u , et L_1 le sont.

Notons que $\frac{g(s, v)}{f(s, v)} L_1(x, s, v)$ et $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right) L_1(x, u, v)$ sont intégrables sur $[0, T]$ et $[0, T] \times [0, S]$ respectivement, $\forall S, T > 0$ et $\forall x \neq 0$; en effet, $f(s, v)$ est strictement positive en $(0, +\infty)^2$ et pour le lemme (2.3) $L(x, s, v) = 0$ près des axes.

Pour établir que le processus $L(x, s, t)$ est un temps local de M par rapport à sa variation quadratique il nous faut vérifier que pour toute fonction ϕ borélienne et bornée on a la relation suivante:

$$\begin{aligned} & \int_R \int_0^t \frac{g(s, v)}{f(s, v)} L_1(x, s, v) \phi(x) dv dx \\ & - \int_R \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right) L_1(x, u, v) \phi(x) du dv dx = \int_0^t \int_0^s \phi(M_{uv}) d\langle M \rangle_{uv}. \end{aligned}$$

Étant donné que $L_1(x, s, t)$ est un temps local du processus $\{M_{st}, s \geq 0\}$, le premier membre de cette égalité vaut

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{g(s, v)}{f(s, v)} \int_0^s \phi(M_{uv}) f(u, v) du dv \\ & - \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right) \int_0^u \phi(M_{s'u}) f(s', u) ds' du dv \\ & = \int_0^t \int_0^s \frac{g(u, v)}{f(u, v)} (M_{uv}) f(u, v) du dv = \int_0^t \int_0^s \phi(M_{uv}) d \langle M \rangle_{uv}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de finir la démonstration.

Remarques

1) Avec des arguments de localisation on peut démontrer le Théorème (2.1) pour des martingales pour les quelles le processus $h(s, t)$ est continu en plus des hypothèses a et b.

2) Pour des martingales fortes, étant donné que $\langle M \rangle_z = \langle M_{\cdot, t} \rangle_s \langle M_{s, \cdot} \rangle_t$, la conclusion du Théorème reste vraie si

$$\langle M \rangle_z = \int_{R_z} g(u, v) du dv \quad \text{ou } g(u, v) \text{ est } B(R_+^2) \times F \text{ - mesurable,}$$

adapté, continu, dérivable en u, avec dérivée continue et tel que $g(u, v) > 0$ sur $(0, +\infty)^2$.

3) Si M est une martingale brownienne de carré intégrable, nulle sur les axes, on a la représentation suivante:

$$M_z = \int_{R_z} \phi(z') dW_{z'} + \int_{R_z} \int_{R_z} \psi(z', z'') dW_{z'} dW_{z''}, \text{ où}$$

$\{W_z, z \in R_+^2\}$ est le drap brownien (cf [7]). Alors,

$$\langle M \rangle_z = \int_{R_z} g(u, v) du dv \text{ où } g(u, v) = \phi^2(u, v) + \int_{R_{uv}} \psi^2(x, v; u, y) dx dy$$

$$\text{et } \langle M \rangle_{\cdot t} = \int_0^s f(x, t) dx \text{ où } f(x, t) = \int_0^t (\phi(x, y) + \int_{R_{xt}} \psi(\zeta; x, y) dW_\zeta)^2 dy$$

Si $\psi \not\equiv 0$; c'est à dire si la martingale M n'est pas forte [2], alors

$f(s, t)$ ne sera pas dérivable à cause de l'intégrale stochastique qui apparaît dans sa définition.

Si $\psi \equiv 0$, la martingale est forte et on revient à la remarque 2).

3. Temps local du processus J_z

Soit $J_{st} = \int_{R_{st}} \int_{R_{st}} 1_D(\xi, \xi') dW_\xi dW_{\xi'}$. Les variations quadratiques du processus J_z à un et deux indices sont:

$$\langle J \rangle_{st} = \frac{s^2 t^2}{4}$$

$$\langle J \rangle_{\cdot t} = \int_0^s \int_0^t (W_{xt} - W_{xy})^2 dy dx$$

$$\text{et } \langle J \rangle_{s \cdot} = \int_0^t \int_0^s (W_{sy} - W_{xy})^2 dx dy.$$

Notons que,

$$\sup_{Q \leq v \leq t} E \left[\left| \int_0^s (W_{sv} - W_{xv})^2 dx \right| \right] < \infty \quad \forall p \geq 1 \quad \forall s, t \geq 0.$$

Comme on a déjà remarqué, le processus J_z ne vérifie pas les hypothèses du Théorème (2.1). Dans la définition (2.1) du temps local on utilise le terme $\frac{\partial}{\partial u} (g(u, v))$ qui maintenant pourrait être interprété comme la différentielle $\frac{\partial}{\partial u} f(u, v)$

d'une fonctionnelle d'une semimartingale.

Cette idée va nous permettre d'appliquer une méthode semblable à celle de la deuxième partie pour construire le temps local de J_z .

Le processus $\{f(u,v), u \geq 0\}$ a la suivante décomposition de Doob-Meyer:

$$f(u,v) = M_{uv} + V_{uv}$$

$$\text{avec } M_{uv} = \int_0^v [(W_{uv} - W_{u\tau})^2 - u(v - \tau)] d\tau \quad (\text{martingale}) \text{ et } V_{uv} = \frac{uv^2}{2}$$

(processus à variation bornée).

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous considérons une fonction de C^2 , croissante,

$\psi_\varepsilon: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon \quad \text{si} \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

$$\psi_\varepsilon(x) = x \quad \text{si} \quad |x| \geq 2\varepsilon$$

avec $|\psi'_\varepsilon| \leq 1$ et $|\psi''_\varepsilon| \leq 1$.

Soit $F(x,y) = \frac{x}{\psi_\varepsilon(y)}$ (3.1); F est une fonction continue et de classe C^2 en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Si on applique la formule d'Itô en $[0, u]$ on obtient:

$$\begin{aligned} F(u, f(u,v)) &= \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} = \int_0^u \frac{dx}{\psi_\varepsilon(f(x,v))} \\ &- \int_0^u \frac{x}{\psi_\varepsilon(f(x,v))^2} \psi'_\varepsilon(f(x,v)) d_1 f(x,v) + \int_0^u \frac{x}{\psi_\varepsilon(f(x,v))^3} \psi'_\varepsilon(f(x,v))^2 d \langle M_v \rangle_x \\ &- \frac{1}{2} \int_0^u x \frac{\psi''_\varepsilon(f(x,v))}{\psi_\varepsilon(f(x,v))^2} d \langle M_v \rangle_x. \end{aligned}$$

On définit les approximations suivantes pour le candidat à temps local du processus J_z :

$$\begin{aligned}
 L_{\varepsilon}(x, s, t) &= \int_0^t \frac{sv}{f(s, v)} L_1(x, s, v) dv - \int_0^t \int_0^s \frac{v}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))} L_1(x, u, v) du dv \\
 &+ \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))^2} \psi'_{\varepsilon}(f(u, v)) L_1(x, u, v) d_1 M_{uv} dv \\
 &+ \int_0^t \int_0^s L_1(x, u, v) \frac{uv}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))^2} \psi'_{\varepsilon}(f(u, v)) \frac{v^2}{2} du dv \\
 &- \int_0^t \int_0^s L_1(x, u, v) \left[\frac{uv \psi'_{\varepsilon}(f(u, v))^2}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))^3} - \frac{uv \psi''_{\varepsilon}(f(u, v))}{2 \psi_{\varepsilon}(f(u, v))^2} \right] \cdot \\
 &\cdot 4 \left(\int_0^v \int_0^v (W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'})(v - \tau v \tau') d\tau d\tau' \right) dudv,
 \end{aligned}$$

où $L_1(x, s, t)$ est le temps local du processus $\{J_{st}, s \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Soit alors } L(x, s, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\varepsilon}(x, s, t) = \int_0^t \frac{sv}{f(s, v)} L_1(x, s, v) dv \\
 &- \int_0^t \int_0^s \frac{v}{f(u, v)} L_1(x, u, v) du dv + \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^2} L_1(x, u, v) d_1 M_{uv} dv \\
 &+ \int_0^t \int_0^s \frac{uv^3}{2f(u, v)^2} L_1(x, u, v) du dv \\
 &- \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^3} L_1(x, u, v) 4 \int_0^v \int_0^v (W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'})(v - \tau v \tau') d\tau d\tau' \cdot dudv
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

$\forall x \neq 0$ et $\forall s, t \geq 0$.

Proposition (3.1)

Il existe une version continue du processus $L(x, s, t)$ en $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}_+^2$.

Démonstration

À l'exception de l'intégrale stochastique $\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^2} L_1(x, u, v) d_1 M_{uv} dv$,

tous les termes du second membre de (3.2) sont des intégrales par trajectoires des processus continus et, en conséquence, ces termes sont continus.

Pour démontrer la continuité de $\int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v) d_1 M_{uv} dv$ on utilise le critère de Kolmogorov.

Soit $S, T, A > 0$ fixes. $\forall s, s' \leq S, t, t' \leq T, |x|, |x'| \leq A$ et $p > 1$, nous avons:

$$\begin{aligned} & E \left[\left| \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v) d_1 M_{uv} dv - \int_0^{t'} \int_0^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) d_1 M_{uv} dv \right|^p \right] \\ & \leq C_p \left[E \left[\left| \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} (L_1(x,u,v) - L_1(x',u,v)) d_1 M_{uv} dv \right|^p \right] \right. \\ & \quad + E \left[\left| \int_0^t \int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) d_1 M_{uv} dv \right|^p \right] \\ & \quad \left. + E \left[\left| \int_t^{t'} \int_0^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) d_1 M_{uv} dv \right|^p \right] \right] = C_p (B_1 + B_2 + B_3) \quad (\text{d'éf}) \end{aligned}$$

a) Les inégalités de Hölder, Doob et Burkholder montrent que:

$$\begin{aligned} B_1 & \leq t^{2p-1} \int_0^t E \left[\sup_{s \in [0,S]} \left| \int_0^s \frac{u}{f(u,v)^2} [L_1(x,u,v) - L_1(x',u,v)] dM_{uv} \right|^p \right] dv \\ & \leq t^{2p-1} \int_0^t C_p E \left[\left| \int_0^s \frac{u}{f(u,v)^2} [L_1(x,u,v) - L_1(x',u,v)] dM_{uv} \right|^p \right] dv \\ & \leq C_p t^{2p-1} \int_0^t E \left[\int_0^s \frac{u^2}{f(u,v)^4} [L_1(x,u,v) - L_1(x',u,v)]^2 d\langle M_{\cdot v} \rangle_u |^{p/2} \right] dv \end{aligned}$$

et d'après Schwartz et Jensen :

$$B_1 \leq C(p, S, T) \left(E \left[\left| \int_0^S \frac{u^8}{f(u,v)^{16}} du \right|^{p/2} \right] \right)^{1/4}.$$

$$\cdot \sup_{s \in [0,S]} (E [|L_1(x, s, v) - L_1(x', s, v)|^{8p}])^{1/8}.$$

$$\cdot \left(\int_0^S \int_0^v \int_0^v E \left[\left| (W_{uv} - W_{u\tau}) (W_{uv} - W_{u\tau'}) \right|^{2p} (v - \tau \vee \tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right] \right)^{1/4}.$$

La variable aléatoire $\int_0^v \frac{(W_{uv} - W_{u\tau})^2}{u} d\tau$ a la même loi que $\int_0^1 W_1^2 \tau d\tau$, ainsi donc elle a des moments de tous les ordres, et par conséquent

$$\left(\int_0^S E \left[\left| \frac{u^{8p}}{f(u, v)^{16p}} du \right| \right] \right)^{1/8} \leq C_1(p, S).$$

D'autre part, le Théorème (3.2) de Barlow et Yor [1] montre que $\forall p \in (0, \infty)$, il existe une constante universelle k_p telle que pour tout couple de martingales continues (M, N) leurs temps locaux $L_t^a(M)$ et $L_t^a(N)$ vérifient:

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \sup_{t \geq 0} |L_t^a(M) - L_t^a(N)| \right|_{L^p} \leq k_p \|M - N\|_{H_p}^{1/2} \{ \|M\|_{H_p}^{1/2} + \|N\|_{H_p}^{1/2} \}.$$

En utilisant ce résultat en $a = 0$ avec $M = J_{sv} - x$ et $N = J_{sv} - x'$ on obtient:

$$\sup_{s \in [0, S]} (E |L_1(x, s, v) - L_1(x', s, v)|^{8p})^{1/8p} \leq C_2(p, A, T) |x - x'|^{p/2}.$$

Finalement:

$$\left(\int_0^S \int_0^v \int_0^v E \left[\left| (W_{uv} - W_{u\tau}) (W_{uv} - W_{u\tau'}) \right|^{2p} (v - \tau \vee \tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right] \right)^{1/4} \leq C_3(p, S, T);$$

ainsi donc $B_1 \leq K_1(p, S, T, A) |x - x'|^{p/2}$.

b) Pour le terme B_2 on procède de la même façon que pour B_1 , jusqu'à obtenir:

$$B_2 \leq C_p t^{2p-1} (E \int_s^{s'} \frac{u^8}{f(u,v)^{16}} du)^{1/4} |s - s'|^{p/8}.$$

$$\sup_{v \in [0, T]} \left(\sup_{s \in [0, s']} E [|L_1(x', s, v)|^{8p}] \right)^{1/8}.$$

$$\sup_{v \in [0, T]} 4^{p/2} \left(\int_0^{s'} \int_0^v \int_0^v E [|(W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'})|^{2p}] (v - \tau \vee \tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right)^{1/4}$$

Les inégalités démontrées au paragraphe a) entraînent que

$$E \left(\int_s^{s'} \frac{u^{8p}}{f(u, v)^{16p}} du \right)^{1/4} \leq C_4(p, S) |s' - s|^{p/8},$$

$$\sup_{v \in [0, T]} \left(\sup_{s \in [0, s']} E [|L_1(x', s, v)|^{8p}] \right)^{1/8} \leq C_5(p, A, T) \text{ et}$$

$$\sup_{v \in [0, T]} 4^{p/2} \left(\int_s^{s'} \int_0^v \int_0^v E [|(W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'})|^{2p}] (v - \tau \vee \tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right)^{1/4}$$

$$\leq C_6(p, T, S),$$

$$\text{ce qui donne } B_2 \leq K_2(p, S, T, A) |s - s'|^{p/4}$$

c) Finalement,

$$B_3 \leq |t - t'|^{p-1} \int_t^{t'} E \left[\int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^2} |L_1(x'; u, v)|^p d_1 M_{uv} \right] dx$$

$$\leq K_3(p, S, T, A) |t - t'|^p. \square$$

Théorème (3.2)

Le processus $L(x, s, t)$ est un temps local pour la martingale $(J_z)_{z \in \mathbb{R}_+^2}$ par rapport à sa variation quadratique.

Démonstration

Soit ϕ une fonction borelienne et bornée. Alors, étant donné que

$L_1(x, s, t)$ est un temps local du processus $(J_t)_s$ on peut écrire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} L(x, s, t) \phi(x) dx &= \int_0^t \frac{sv}{f(s, v)} \left(\int_0^s \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) dv \\ &- \int_0^t \int_0^s \frac{v}{f(u, v)} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) du dv \\ &+ \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) d_1 M_{uv} dv \\ &+ \int_0^t \int_0^s \frac{uv^3}{2f(u, v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) du dv \\ &- \int_0^t \int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^3} \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) d \langle M_v \rangle_u dv. \end{aligned}$$

Considérons la fonction F qui a été définie en (3.1). Appliquons F à la semimartingale $(f(u, v))_u \geq 0$ et au processus de variation bornée $(\int_0^u f(x, v) \phi(J_{xv}) dx)_u \geq 0$.

La formule d'Itô en $[0, s]$ montre alors que:

$$\begin{aligned} \frac{s}{\psi_{\varepsilon}(f(s, v))} \int_0^s f(u, v) \phi(J_{uv}) du &= \int_0^s \frac{1}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))} \left(\int_0^u f(x, v) \phi(J_{xv}) dx \right) du \\ &+ \int_0^s \frac{u}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))} f(u, v) \phi(J_{uv}) du \\ &- \int_0^s \frac{u}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))^2} \psi'_{\varepsilon}(f(u, v)) \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) d_1 f(u, v) \\ &+ \int_0^s \frac{u}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))^3} \psi'_{\varepsilon}(f(u, v))^2 \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) d \langle M_v \rangle_u \\ &- \frac{1}{2} \int_0^s \frac{2u}{\psi_{\varepsilon}(f(u, v))} \psi''_{\varepsilon}(f(u, v)) \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x, v) dx \right) d \langle M_v \rangle_u ; \end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ nous trouvons:

$$\int_{\mathbb{R}} L(x,s,t) \phi(x) dx = \int_0^t \int_0^s uv \phi(J_{uv}) du dv . \square$$

Références

- [1] M.T. Barlow, M. Yor, (Semi-)martingale inequalities and local times,
Z.Wahrsch. Verw. Gebiete 55 (1981), 237-254.
- [2] R. Cairoli, J. B. Walsh, Stochastic integrals in the plane, Acta
Math. 134 (1975) 111-183.
- [3] E. Merzbach, M. Zakai, Predictable and dual predictable projections
for two-parameter stochastic processus, Z. Wahrsch. Verw.
Gebiete 53 (1980) 263-269.
- [4] D. Nualart, On the quadratic variation of two-parameter continuous mar-
tingales, Ann. Prob. 12 (1984) 445-457.
- [5] D. Nualart, Une formule d'Itô pour les martingales continues à deux
indices et quelques applications, Ann. Inst. Henri Poincaré,
20,n° 3 (1984) 251-275.
- [6] J. B. Walsh "The local time of the Brownian Sheet, Astérisque 52-53
(1978) 47-61.
- [7] E. Wong, M. Zakai, Martingales and stochastic integrals for processes
with a multi-dimensional parameter , Z. Wahrsch. Verw. Ge-
biete, 29 (1974) 109-122.
- [8] M. Yor, Sur la transformée de Hilbert des temps locaux Browniens, et une

extension de la formule d'Itô, Lectures Notes, 920, (1980-81)
238-247.

O. Julià

Departament d'Estadística

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

Gran Via 585 08007 Barcelona

ESPAGNE