ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

J. R. RUIZ

Calcul probabiliste du noyau de Poisson de la sphère

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 19-24

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_19_0>

CALCUL PROBABILISTE DU NOYAU DE POISSON DE LA SPHERE

J.R. RUIZ

1. Introduction.

Soit S_{d-1} la sphère-unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire $<.,.>$. Soit $(B_t, \mathcal{F}_t, P_x, x\in R^d, t\geq 0)$ le mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^d$. Soit f une fonction continue de S_{d-1} dans $\mathbb{R}$. La théorie probabiliste du potentiel résout le problème de Dirichlet pour (S_{d-1},f) de la façon suivante : si $T = \inf\{t>0, B_t \in S_{d-1}\}$, alors la fonction F définie dans $C_d : \{ x\in \mathbb{R}^d , |x| \leq 1\}$ $(|\cdot|^2 = <\cdot,\cdot>)$ par : $F(x) = \mathbb{E}_x[f(B_T)]$ est une fonction harmonique dans l'intérieur de C_d, continue sur C_d et valant f sur S_{d-1}. Donc si $\nu_x(d\theta)$ est la loi de B_T pour $|x| < 1$, la formule précédente devient

$$F(x) = \int_{S_{d-1}} f(\theta)\ \nu_x(d\theta) \tag{1}$$

Il est connu que l'on a

$$\nu_x(d\theta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\theta|^d}\,\sigma(d\theta) \tag{2}$$

où $\sigma(d\theta)$ est la probabilité uniforme sur S_{d-1}. (2) est appelée mesure de Poisson.

Dans [1], J. Vauthier propose une élégante démonstration probabiliste de (2) pour d = 2 et 3, utilisant de façon naturelle la décomposition en parties radiale et angulaire du mouvement brownien. Le but de cette note est d'une part de donner une démonstration probabiliste élémentaire de (2), et d'autre part d'étendre à d quelconque la démonstration de J. Vauthier, mais en travaillant de façon intrinsèque, c'est-à-dire sans coordonnées, avec le mouvement brownien sur la sphère, ce qui évite le recours aux martingales de Mc Kean.

2. Le Laplacien sur la sphère et ses fonctions propres.

Soit φ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ sur $]0,\infty[\times S_{d-1}$ défini par :

$\varphi(x) = (|x|, \frac{x}{|x|})$. Rappelons que le laplacien $\Delta_{S_{d-1}}$ sur S_{d-1} est lié au laplacien Δ sur R^d par :

$$\Delta(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\rho,\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) + \frac{d-1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\Delta_{S_{d-1}} g(\rho,\theta) \ , \quad \text{où}$$

$g \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[\times S_{d-1})$.

Proposition 2.1.

Soit E_n l'espace des fonctions e_n de classe C^2 sur S_{d-1} vérifiant $\Delta_{S_{d-1}} e_n = -n(n+d-2)e_n$. Alors

a) *E_n est un espace de dimension* $m(n) = \frac{(2n+d-2)(n+d-3)!}{n!(d-2)!}$

b) $L^2(\sigma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E_n$, *somme hilbertienne des E_n*

c) *Si $(e_n^k,\ 1 \leq k \leq m(n))$ et $(f_n^k,\ 1 \leq k \leq m(n))$ sont deux bases orthonormales de E_n, on a :*

$$\sum_{k=1}^{m(n)} e_n^k(\alpha) e_n^k(\theta) = \sum_{k=1}^{m(n)} f_n^k(\alpha)\, f_n^k(\theta) \quad ; \quad \alpha,\ \theta \in S_{d-1}$$

et cette quantité ne dépend que de $<\alpha,\theta>$, soit $P_n(<\alpha,\theta>)$.

P_n est proportionnel au polynôme de Gegenbauer $C_n^{(d/2)-1}$ donné par :

$$(1-2ru+r^2)^{-(\frac{d}{2}-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, C_n^{(d/2)-1}(u) \ . \quad u \in [-1,1] \ , \quad r \in]-1,1[\ .$$

Pour la démonstration on pourra par exemple consulter [2]. □

Corollaire 2.2. *Avec les notations de 2-1 on a :*

$$\sum_{k=1}^{m(n)} e_n^k(\alpha)\ e_n^k(\theta) = \frac{2n+d-2}{d-2}\, C_n^{(d/2)-1}(<\theta,\alpha>) \ .$$

Démonstration. On a $P_n(1) = \int_{S_{d-1}} \sum_{k=1}^{m(n)} |e_n^k(\theta)|^2\, \sigma(d\theta) = m(n)$.

D'où, par 2.1. c) :

$$P_n(u) = \frac{m(n)}{C_n^{(d/2)-1}(1)}\, C_n^{(d/2)-1}(u). \qquad (u \in [-1,1])$$

Comme $C_n^{(d/2)-1}(1) = \frac{(n+d-3)!}{n!(d-3)!}$ par 2.1.c), on a le résultat. □

3. La formule de Poisson.

Proposition 3.1. *Avec les notations des §1 et 2, si* $x \in R^d \setminus \{0\}$ *et si* $e_n \in E_n$, *on a :*

$$\mathbb{E}_x [\ e_n(B_T)\ ] = |x|^n \quad e_n(\frac{x}{|x|}) \ .$$

1ère Démonstration

La fonction H_n de C_d dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H_n(0) = 0$$

$$H_n(x) = |x|^n \quad e_n(\frac{x}{|x|}) \qquad \text{si} \quad x \neq 0$$

est harmonique à l'intérieur de C_d, continue sur C_d et égale à e_n sur S_{d-1}. □

2ème Démonstration

Celle-ci étend les méthodes de [1] à d quelconque.
On peut écrire (voir [4] p. 269-270).

$$(B_t,\ t>0) = (R_t,\ \tilde{B}_{\psi(t)}\ ,\ t\geq 0),$$

où $(\mathbb{R}_t,\ t\geq 0)$ est un processus de Bessel sur R_+, c'est-à-dire une diffusion sur $\mathbb{R}_+$, gouvernée par l'opérateur infinitésimal $\frac{1}{2}(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\ \frac{d}{dr})$, et $(\tilde{B}_s,\ s\geq 0)$ le mouvement brownien tandard sur la sphère S_{d-1}, c'est-à-dire une diffusion sur S_{d-1}, gouvernée par l'opérateur infinitésimal $\frac{1}{2}\ \Delta_{S_{d-1}}$. $(R_t,\ t\geq 0)$ et $(\tilde{B}_s,\ s\geq 0)$ sont indépendants ; quant à $\psi(t)$, c'est le changement de temps :

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{ds}{R_s^2} \ .$$

Proposition 3.2. *Soit* $e_n \in E_n$ *et* $\alpha \in S_{d-1}$. *On a :*

$$\mathbb{E}_\alpha[e_n(\tilde{B}_t)] = exp\ [-\ \frac{n}{2}\ (n+d-2)t] \ .\ e_n(\alpha) \ .$$

Démonstration : Soit $(P_t,\ t\geq 0)$ le semigroupe associé à $(\tilde{B}_t,\ t\geq 0)$:

$$(P_t\ h)(\alpha) = \mathbb{E}_\alpha[\ h(\tilde{B}_t)] = \int_{S_{d-1}} P_\alpha[\tilde{B}_t \in d\theta]\ h(\theta) \ .$$

Nous avons $P_t = \exp\ [\frac{t}{2}\ \Delta_{S_{d-1}}\ ]$, donc

$$P_t\ e_n = \exp\ [-\ \frac{t}{2}\ .\ n(n+d-2)]\ .\ e_n \ , \text{ d'après la Prop. 2.1.} \qquad \square$$

Corollaire 3.3. *Si $e_n \in E_n$,*

$$\mathbb{E}_\alpha \,[e_n(B_T)] = e_n(\alpha).\exp\left[-\frac{n}{2}(n+d-2)\int_0^T \frac{ds}{R_s^2}\right].$$

Démonstration : Comme $(R_t,\ t\geq 0)$ et T sont indépendants de $(\tilde{B}_s,\ s\geq 0)$ on peut remplacer t par $\psi(T)$ dans la Proposition 3.2. □

Maintenant pour calculer $\mathbb{E}_x\,[e_n(B_T)]$, nous décomposons x en coordonnées polaires : $x = (r,\alpha)$. On a $\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_r\,\mathbb{E}_\alpha$; il nous reste donc d'après le Cor. 3.3 à calculer la quantité A(r) définie par

$$A(r) = \mathbb{E}_r\left[\exp\left(-\frac{n}{2}(n+d-2)\int_0^T \frac{ds}{R_s^2}\right)\right].$$

De la même façon que dans [1], nous savons que A est solution de l'équation de Schrödinger suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{dA}{dr}\right) - \frac{1}{2r^2}\,n(n+d-2)A = 0 \qquad (*)$$

avec les conditions :

$$A(0) = 0 \qquad\qquad A(1) = 1\ ;$$

En effet, c'est la formule de Feymann-Kac appliquée à la diffusion $(R_t,\ t\geq 0)$ et à $T = \inf\{t>0,\ R_t = 1\}$; voir [3] p.158-159 par exemple. La condition A(1)=1 découle de T = 0 si r = 1 (voir [4], p.257) ; quand à la deuxième, il est connu que (voir [4], p.61) :

$$P_0\left[\overline{\lim_{s\searrow 0}}\ \frac{R_s}{\sqrt{2s\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(1/s)}} = 1\right] = 1$$

donc, pour tout $\varepsilon>0$ on a :

$$P_0\left[\int_0^\varepsilon \frac{ds}{R_s^2} = +\infty\right] = 1\ ,$$

d'où A(0) = 0. L'équation d'Euler (*) s'intégrant facilement, on en déduit que $A(r) = r^n$, ce qui achève cette 2ème démonstration de la Prop. 3.1. □

Voici alors le résultat principal :

Théorème 3.4. *La mesure de Poisson est donnée par la formule (2) de l'introduction.*

Démonstration : Choisissons pour tout $n\geq 0$ une base $(e_n^k,\ k=1,\dots,m(n))$ orthonormale de E_n ; écrivant $|x| = r$ et $\frac{x}{|x|} = \alpha$ on a par la Proposition 3.1 :

$$\int_{S_{d-1}} e_n^k(\theta)\ \nu_x(d\theta) = |x|^n\ e_n^k\left(\frac{x}{|x|}\right) = r^n\ e_n^k(\alpha) \tag{3}$$

Pour $0<r<1$, soit ϕ_r la fonction de $S_{d-1} \times S_{d-1}$ dans R définie par :

$$\phi_r(\theta,\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} r^n \sum_{k=1}^{m(n)} e_n^k(\theta)\ e_n^k(\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} r^n\ P_n(<\theta,\alpha>)$$

ϕ est bien définie ; en effet, on a,en notant $u = <\theta,\alpha>$, d'après la Prop.2.2 :

$$\phi_r(\theta,\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} r^n\ C_n^{(d/2)-1}\ (u) + \frac{2}{d-2} \sum_{n=o}^{\infty} n\ r^n\ C_n^{d/2-1}(u)$$

La première somme est égale à $(1-2r\ u + r^2)^{-((d/2)-1)}$; la deuxième s'obtient en dérivant la première par rapport à r et en multipliant par r :

$$\frac{2}{d-2} \sum_{n=o}^{\infty} n\ r^n\ C_n^{(d/2)-1}(u) = 2(ru - r^2)(1 - 2r\ u + r^2)^{-d/2}$$

D'où $\qquad \phi_r(\ \theta,\alpha\ ) = (1-r^2)(1 - 2r<\theta\ \alpha>+ r^2)^{-d/2}$.

Nous avons, pour tout e_n^k, d'après (3) :

$$\int_{S_{d-1}} e_n^k(\theta)\ [\nu_{(r,\alpha)}(d\theta) - \phi_r(\ \theta,\alpha\ )]\sigma(d\theta) = 0$$

Les e_n^k formant un système total dans les fonctions continues sur S_{d-1}, nous avons :

$$\nu_{(r,\alpha)}(d\theta) = \phi_r(\ \theta,\alpha\ )\ \sigma(d\theta)$$

ce qui est (2) pour $x = (r,\alpha)$. $\square$

Bibliographie

[1] J. Vauthier "An elementary probabilistic Computation of the Poisson Kernel for the n=2 and n=3 Euclidean Ball". Canad. Math. Bull. Vol.27(2), 1984, 241-246.

[2] R.T. Seeley "Spherical Harmonics" Am. Math. Monthly (Slaught memorial paper n°11) Vol.73, (1966) 115-121.

[3] D. Williams "Diffusions, Markov Processes and Martingales". Vol.1. Wiley(1979).

[4] K. Itô and H.P. Mc Kean, Jr. "Diffusion Processes and their Sample Paths". Springer Verlag (1965).

J.R. RUIZ

Université Paul Sabatier
Laboratoire de Statistique
et Probabilités
U.A. - C.N.R.S. 745
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cédex

Reçu en Octobre 1985