

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

G. ROYER

Distance de Fortet-Mourier et fonctions log-concaves

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 78, série *Probabilités et applications*, n° 2 (1984), p. 133-155

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1984__78_2_133_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISTANCE DE FORTET-MOURIER ET FONCTIONS LOG-CONCAVES

G. ROYER

SUMMARY : In some sense, the cost paid to transform a Gaussian law into another, differing only by its mean is equal to the Euclidean length of the needed translation ; this equality is proved to subsist as an over-estimate after modification by a sufficiently log-concave function. Main application and motivation are taken from a problem of convex interaction in statistical mechanics or field theory.

Dans un travail antérieur sur les champs discrétisés [19], j'avais employé une majoration de distance entre mesures ; ici on se propose : d'explicitier cette majoration sous une forme attrayante, de l'étendre à la dimension quelconque, et de la généraliser un peu ; cela nous permet de retrouver le résultat sur les champs discrets de manière plus directe et d'avoir le résultat correspondant pour la théorie $(P\varphi)_1$. Le résultat le plus lisible en dehors de ces considérations de physique mathématique est 3.3.

Je remercie G. Fourt et L. Mailhot pour des informations sur les fonctions log-concaves à propos d'un travail connexe [14] ; A. Ehrhard et S. Chevet pour d'utiles conversations.

1 - RAPPELS SUR LA DISTANCE DE FORTET-MOURIER

Soit (X, D) un espace métrique séparable que l'on supposera aussi complet et soit \underline{M}_1 le convexe des mesures de probabilité μ sur X telles que, pour un x_0 (ou pour tout x_0 , c'est égal), $\int D(x_0, x) \mu(dx) < \infty$. On définit la distance D sur \underline{M}_1 (la même notation est bienvenue puisque $D(\delta_x, \delta_y) = D(x, y)$) par :

$$D(\mu, \nu) = \inf \{ \int D(x, y) \alpha(dx, dy) ; \alpha \in R(\mu, \nu) \} ,$$

où $R(\mu, \nu)$ est l'ensemble des probabilités sur $X \times X$ se projetant suivant μ et ν sur les deux facteurs. D'après le critère de Prokhorov, $R(\mu, \nu)$ est compact pour la topologie étroite ; donc l'infimum est atteint, l'application $\alpha \longrightarrow \int D(x, y) \alpha(dx, dy)$ étant s.c.i. pour cette topologie. On peut se représenter μ et ν comme des tas de charbon et α comme méthode pour transformer μ en ν par transport, D étant alors le coût minimum de transport.

Cette définition est souvent attribuée à Wasserstein quoique elle soit plus ancienne [11] ; en fait cette distance fut d'abord introduite sous une autre forme par Fortet-Mourier [10] :

$$D(\mu, \nu) = \sup_{\|f\|_L \leq 1} | \int f d\mu - \int f d\nu | ,$$

où : $\|\cdot\|_L$ désigne le pseudo-norme de Lipschitz

$$\|f\|_L = \sup_{x \neq y} (|f(x) - f(y)| / D(x, y)) .$$

La preuve de l'égalité des deux définitions est, d'après Dudley [8], due à Kantorovitch-Rubinstein. Dans le cas où X est fini, auquel on se ramène assez facilement, c'est typiquement un résultat de dualité en programmation linéaire ([20], [9]) mais il vaut mieux employer le théorème de Hahn-Banach directement en dimension infinie ([8], [15]). L'espace \underline{M}_1 muni de D est complet ([24]) la topologie correspondante est proche de la convergence étroite (elle coïncide si D est bornée). Cette distance s'est révélée utile dans des situations diverses ; en plus des travaux déjà cités, voir entre autres [12], [6], [22] (Y. Guivarc'h m'a signalé l'aspect lipschitzien de ces derniers travaux dont un précurseur est d'ailleurs [7]). Sur \mathbb{R} muni de la distance $|x-y|$, on a $D(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - G(x)| dx$, où F et G sont les fonctions de répartition de μ et ν ; voir [10].

2 - FONCTIONS LOG-CONCAVES ET INEGALITE DE BASE

2.1 - On dit qu'une fonction positive φ (éventuellement $+\infty$) sur un espace vectoriel E, est log-concave si : $\varphi(ax + by) \geq (\varphi(x))^a (\varphi(y))^b$, pour tous $x, y \in E$, si $a \geq 0, b \geq 0, a+b = 1$, en convenant de $0 \cdot \infty = 0$; si φ est log-concave, l'ensemble des points où φ est non nulle est convexe (ainsi que l'ensemble où φ est $+\infty$). Des exemples typiques sont $\mathbf{1}_A$ si A est convexe, $\exp(-x^2), \exp(-x^4)$ ou $(\sup(x, 0))^2$.

Le théorème de base concernant les fonctions log-concave est le théorème de Prékopa ([23], [25]) : $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ est une fonction log-concave sur \mathbb{R}^p si $f(x, y)$ est log-concave sur \mathbb{R}^{n+p} ; en particulier, la convoluée de deux fonctions log-concave est log-concave.

Soit μ une mesure sur E et φ une fonction positive sur E ; on notera $[\varphi\mu]$ la probabilité $(\int \varphi d\mu)^{-1} \varphi \cdot \mu$, quand elle existe ; on simplifiera cette notation en $[\varphi]$ quand μ est la mesure de Lebesgue.

Plaçons nous tout d'abord sur \mathbb{R}^n ; $|\cdot|, (\cdot, \cdot)$ désignent les normes et produit scalaire euclidiens canoniques de cet espace : $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Soit D une autre distance euclidienne sur \mathbb{R}^n ; elle provient d'une norme $\|\cdot\|_D$, elle-même associée à une matrice symétrique de type positif non dégénérée, que l'on notera aussi D, par la formule $\|x\|_D = (Dx, Dx)^{1/2}$.

Il nous est utile de considérer des matrices de type positif qui ne soient pas symétriques : $B \geq 0$ signifie $(x, Bx) \geq 0$ pour tout x. Un produit de matrices positives n'est pas positif en général ; cependant :

2.2 - Lemme

Soit W une fonction \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n , dont la matrice dérivée seconde en tout point t, $W''(t)$, vérifie $CW'' \geq I$, où C est une matrice symétrique positive non-dégénérée fixée ; alors $W' \geq c^{-1} I$ où c est la valeur propre maximale de C (et donc W est convexe) ; $\exp(-(W+g))$ est intégrable pour toute fonction g lipschitzienne.

Démonstration : La matrice W'' est symétrique ; soit α la valeur propre minimale de W'' (en un point fixé $t \in \mathbb{R}^n$), x un vecteur propre normalisé associé. On a $1 \leq (x, CW''x) = \alpha(x, Cx) \leq \alpha c$; la propriété d'intégrabilité est une conséquence de la stricte convexité ■

On a aussi l'inégalité $\det(W'') \geq (\det(C))^{-1}$; en effet :

$$CW'' = \frac{1}{2} (CW'' + W''C) + T$$

où T est antisymétrique ; comme $CW'' + W''C$ est symétrique de type positif, d'après une inégalité d'Ostrowski et Taussky $\det(CW'' \geq \det(\frac{1}{2}(CW'' + W''C)) \geq 1$, puisque $\frac{1}{2}(CW'' + W''C) \geq I$; voir [2] .

L'énoncé suivant est un peu compliqué pour pouvoir englober des situations voisines mais distinctes. On y désigne par A une matrice symétrique positive non dégénérée fixée, par V une fonction de classe \mathcal{C}^2 , par g une fonction Lipschitzienne ; $|\nabla g|_\infty = \text{ess. sup}_{t \in \mathbb{R}^n} (|\nabla g(t)|)$ est défini puisque le gradient ∇g existe presque partout.

2.3 - Théorème

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si l'on a } D^2 A^2 V'' \geq \rho D^2 \text{ avec } \rho > 0, \text{ alors :} \\ D(\left[\exp(-V) \right], \left[\exp(-V-g) \right]) \leq \rho^{-1} |D A^2 \nabla g|_\infty . \end{array} \right.$$

Remarquons tout de suite que le cas général de cette proposition se déduit facilement du cas $D = I$; en effet la matrice D est une isométrie de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_D)$ sur $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ qui transforme $\left[\exp(-V) \right]$ en $\left[\exp(-W) \right]$ avec $W = V \circ D^{-1}$; comme $V'' = DW''D$ l'hypothèse du théorème $D^2 A^2 D W''D \geq \rho D^2$ revient à $B^2 W'' \geq \rho I$ avec $B = (D A^2 D)^{1/2}$; on obtient donc une majoration de la distance par $\rho^{-1} |B^2 \nabla(g \circ D^{-1})|_\infty$ qui revient à celle annoncée.

Pour établir la proposition dans le cas $D = I$, on s'appuie sur la méthode bien connue du mouvement brownien avec dérive, qui subsiste d'ailleurs sous des hypothèses plus faibles que celle envisagée ci-dessous.

2.4 - Lemme

Soit U une fonction \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n telle que, d'une part $(\nabla U(x), x)$ est borné inférieurement pour $x \in \mathbb{R}^n$, d'autre part $\exp(-U)$ est intégrable. Le processus de diffusion X_t^x défini par l'équation :

$$X_t^x = x + B_t - (1/2) \int_0^t \nabla U(X_s^x) ds, \text{ où } (B_t, \Omega, \mathbb{P})$$

est un mouvement brownien standard, existe pour tout $t > 0$ et l'on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}(f(X_s^x)) ds = \int f(y) \left[\exp(-U(y)) \right] dy, \quad ,$$

pour toute fonction f borélienne bornée et tout x.

Démonstration : Soit $m := \sup_x (- (\nabla U(x), x))$. Pour chaque épreuve ω , la solution $X_t^x(\omega)$ existe, comme le montre la méthode de Picard, sur un intervalle $[0, T(\omega)[$; montrons que $T = \infty$ presque sûrement; si T_k est le temps de sortie de la boule de rayon k , la formule de Itô montre que :

$$\mathbb{E} (|X_{t \wedge T_k}^x|^2) + \mathbb{E} (\int_0^{t \wedge T_k} (\nabla U(X_s), X_s) ds) = |x|^2 + \mathbb{E}(t \wedge T_k) ;$$

c'est l'égalité de l'énergie de [3]; d'après l'hypothèse sur U , on obtient :

$$\mathbb{E} (|X_{t \wedge T_k}^x|^2) \leq |x|^2 + (m+1) \mathbb{E}(t \wedge T_k) \leq |x|^2 + (m+1)t,$$

et, en faisant tendre k vers l'infini, on voit que $T > t$ p.s puisque

$$|X_{S_k}^x|^2 = k^2 \text{ sur } \{T \geq t\} .$$

D'autre part, le générateur infinitésimal du processus ainsi défini étant $(\Delta f - (\nabla U, \nabla f))/2$, il est immédiat que la probabilité $[\exp(-U)]$ est invariante; le théorème ergodique appliqué au processus stationnaire associé montre que pour presque tout x , la limite annoncée est juste. Mais d'après la propriété de Markov on a :

$$\mathbb{E}(f(X_t^x)) = \int \mathbb{E}(f(X_{t-1}^y)) m(dy),$$

où m est la loi de X_1^x ; m est équivalente à la mesure de Lebesgue, car la formule de Cameron-Martin montre que la loi de X_t^x , $0 \leq t \leq s$ est équivalente à la loi de B_t , $0 \leq t \leq 1$. On conclut par application du théorème de Lebesgue ■

Le calcul qui va suivre est inspiré par celui utilisé pour étudier les équations stochastiques monotones ([3], [21], et spécialement [24]).

2.5 - Démonstration du théorème 2.3 pour $D = I$

Considérons les deux processus de diffusion :

$$X_t = AB_t - \frac{1}{2} A^2 \int_0^t \nabla V(X_s) ds$$

et
$$Y_t = AB_t - \frac{1}{2} A^2 \int_0^t (\nabla V(Y_s) + \nabla g(Y_s)) ds.$$

Le processus de diffusion $\tilde{X}_t = A^{-1} X_t$ satisfait à une équation du type du lemme 2.4, avec $U = V \circ A$. Puisque $U'' = A(V'' \circ A)A$, le lemme 2.2 donne une inégalité du type $U'' \geq kI$, ($k > 0$), qui montre aussitôt que l'hypothèse du lemme 2.4 est vérifiée. Cela reste vrai pour le processus $A^{-1} Y_t$, en supposant que g est \mathcal{C}^1 . Par transport par A le lemme 2.4 donne donc :

$$\lim (1/t) \mathbb{E} (f(Y_t)) = \int f(y) [\exp(-V(y) - g(y)) dy]$$

pour f borélien bornée. Si de plus $\|f\|_L \leq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left| \int f(y) \left[\exp - (V(y) - g(y)) \right] dy - \int f(y) \left[\exp(-V(y)) \right] dy \right| \\
 & = \lim (1/t) \left| \mathbb{E}((f(Y_t) - f(X_t))) \right| \\
 & \leq \underline{\lim} (1/t) \mathbb{E}(|Y_t - X_t|) \\
 & \leq \underline{\lim} (1/t) \text{ess. sup } |X_t(\omega) - Y_t(\omega)| .
 \end{aligned}$$

Soit $\varphi(t) = |X_t - Y_t| = \left(\sum_{i=1}^n (X_t - Y_t)_i^2 \right)^{1/2}$; on a $\frac{d}{dt}(\varphi(t)) = -Q_1 - Q_2$

avec :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sum_{i=1}^n (X_t - Y_t)_i (A^2 (\nabla V(X_t) - \nabla V(Y_t)))_i \\
 Q_2 &= \sum_{i=1}^n (X_t - Y_t)_i (A^2 \nabla g(Y_t))_i ;
 \end{aligned}$$

Q_2 est majoré par $\varphi(t) |A^2 \nabla g|_\infty$ d'après l'inégalité de Schwarz. D'après la formule des accroissements finis, Q_1 s'écrit pour un certain ξ ,

$$\sum_{i,j,k} (X_t - Y_t)_i (A^2)_{ik} U''_{kj}(\xi) (X_t - Y_t)_j \geq \rho \varphi^2(t), \text{ puisque } A^2 U'' \geq \rho I.$$

Donc $(\varphi^2(t))' \leq -\rho \varphi^2(t) + |A^2 \nabla g|_\infty \varphi(t)$ avec $\varphi(0) = 0$; l'étude facile de cette inéquation ([20] appendice A) donne $\varphi(t) \leq |A^2 \nabla g|_\infty / \rho$. Cette inégalité montre, en prenant la borne supérieure en f dans (1) que :

$$D\left(\left[\exp(-V-g)\right], \left[\exp(-V)\right]\right) \leq |A^2 \nabla g|_\infty / \rho$$

On avait supposé g dérivable, mais cette restriction se lève immédiatement par régularisation (si f est contractante, il en est de même de $\mu * f$) pour toute probabilité μ de \underline{M}_1) ■

3 - APPLICATIONS

A) Une inégalité de corrélation

Désignons par $\text{cov}_V(f,g)$ la covariance calculée par rapport à la mesure $\left[\exp(-V)\right]$:

$$\text{cov}_V(f,g) = \frac{1}{Z} \int (f(x)-m)(g(x)-n) \exp(-V(x)) dx$$

où $m = \frac{1}{Z} \int f(x) \exp(-V(x)) dx$ (resp : n,g), Z constante de normalisation.

3.1 - Théorème

Soit D matrice symétrique positive, non dégénérée, f et g lipschitziennes ; on suppose $D^2 V'' \geq \rho D^2$; alors :

$$|\text{cov}_V(f, g)| \leq \rho^{-1} \|D^{-1} \nabla f\|_\infty \|D \nabla g\|_\infty.$$

Démonstration : On vérifie facilement que $\text{cov}_V(f, g) = q'(0)$ en posant :

$$q(\tau) = \int f(x) \left[\exp(-V(x) - \tau g(x)) dx \right] ;$$

d'après le théorème 2.3, appliqué pour $A=I$, on a :

$$|q(\tau) - q(0)| \leq (\tau/\rho) \|f\|_{L,D} \|D \nabla g\|_\infty ;$$

il suffit de remarquer que $\|f\|_{L,D}$ (norme de Lipschitz pour la distance D) vaut $\|D^{-1} \nabla f\|_\infty$ ■

Dans le cas $D=I$, on a une inégalité bien plus forte de Brascamp et Lieb [13].

$$\text{var}_V(f) \leq \int (\nabla f(x), (V''(x))^{-1} \nabla f(x)) \left[\exp(-V(x)) dx \right]$$

pour V'' positive. Nous ne voyons pas comment ramener le cas général du théorème 3.1 au cas $D=I$. Notons que $D^2 V'' \geq \rho D^2$ implique $V'' \geq \rho I$ (comme au lemme 2.2).

B) Translation de mesures gaussiennes avec modification par une fonction log-concave

Soit μ une mesure de probabilité quelconque sur \mathbb{R}^n , $\mu + a$ la mesure translatée de μ par le vecteur a ; la formule $D(\mu, \mu+a) = \|a\|_D$ est évidente et est valable aussi pour une norme non hilbertienne. Quelque chose en subsiste après modification par une fonction log-concave, dans certains cas où μ est gaussienne et D hilbertienne.

Etant donné une matrice symétrique positive non dégénérée C , disons qu'une fonction de classe \mathcal{C}^2, V , est C -convexe si $CV'' \geq 0$ et, plus généralement, qu'une distribution V'' est C -convexe si la régularisée par convolution $V * u$ est C -convexe pour toute fonction u positive de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En réalité, toute distribution C -convexe est une fonction convexe (utiliser le lemme 2.2).

3.2 - Proposition

Soit μ une mesure gaussienne non dégénérée de variance σ^2 , sur \mathbb{R}^n muni d'une distance hilbertienne D , et $\varphi = \exp(-U)$; si la fonction U est $D^2\sigma^2$ -convexe on a :

$$D([\varphi \cdot \mu], [\varphi \cdot (\mu+a)]) \leq \|a\|_D = D(0, a).$$

Démonstration : La mesure $[\varphi \cdot (\mu+a)]$ n'est autre que $[\exp(-V(x)-g(x))dx]$ avec $V(x) = U(x) + \frac{1}{2}(x, \sigma^{-2}x)$, $g(x) = -(a, \sigma^{-2}x)$; comme $V'' = U'' + \sigma^{-2}$ et $\nabla g = -\sigma^{-2}a$, le résultat se déduit du théorème 2.3 où l'on choisit $A = \sigma$, du moins dans le cas où U est \mathcal{C}^2 .

Si U n'est pas \mathcal{C}^2 , on applique le résultat précédent à $U_n = U * u_n$, où u_n est une suite de fonctions positives lisses dont les supports forment une base de voisinages de 0 ; U étant continue, U_n converge vers U ; comme U est minorée par une forme affine, on peut passer à la limite dans l'inégalité.

$$|[\varphi_n \cdot \mu](f) - [\varphi_n \cdot (\mu+a)](f)| \leq \|a\|_D \|f\|_{L,D},$$

simplement par convergence dominée ■

Les cas le plus simple de cette inégalité est le cas où $D = \sigma^{-1}$; on peut alors apporter à l'inégalité deux améliorations : passer à des fonctions log-concaves pouvant s'annuler et généraliser en dimension infinie, améliorations qui devraient aussi pouvoir être apportées dans le cas général.

3.3 - Théorème :

Soit μ une mesure gaussienne sur un espace de Banach séparable E dont $(H, \|\cdot\|_H)$ est l'espace autoreproduisant ; soit φ une fonction log-concave finie sur E . On suppose que l'ensemble des points de discontinuité de φ est négligeable pour μ et que φ est d'intégrale non nulle. Alors il existe une mesure α sur $E \times E$ de marginales $[\varphi \cdot \mu]$ et $[\varphi(\mu+a)]$ telle que :

$$\int \|x-y\|_H \alpha(dx, dy) \leq \|a\|_H \text{ en convenant de } \|u\| = +\infty \text{ pour } u \notin H.$$

Bien entendu $\|x-y\|_H$ est une distance sur E en un sens généralisée et on a ainsi une majoration d'une "distance" de Fortet-Mourier.

Démonstration : Notons d'abord que l'on a une majoration $\varphi(x) \leq r \exp(\ell(x))$ où ℓ est une forme linéaire continue sur E : soit x_0 un point où φ est continue ; pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ convenablement choisis les parties suivantes de $X \times \mathbb{R}$

$$C_1 = \{(x,y) ; \exp(y) \leq \varphi(x)\}$$

et $C_2 = \{(x,y) ; |x-x_0|_E < \varepsilon, \exp(y) > \varphi(x_0) + \eta\}$

sont convexes et disjointes ; C_2 est ouverte ; on peut donc trouver une forme linéaire continue $\tilde{\ell}$ sur $E \times \mathbb{R}$ que $\tilde{\ell} > 1$ sur C_2 et $\tilde{\ell} \leq 1$ sur C_1 ; est continue puisque C_1 est ouvert ; écrivons $\tilde{\ell}(x,y) = k(y-\ell(x))$; la forme linéaire ℓ sur E convient. La majoration obtenue justifie l'existence de $[\varphi(\mu+a)]$ ainsi que, plus bas, les applications de théorème de Lebesgue.

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où E est de dimension finie et μ non dégénérée : $H = E = \mathbb{R}^n$; soit σ^2 la variance de la mesure μ ; la norme de l'espace autoreproduisant n'est autre que $(\sigma^{-1} x, \sigma^{-1} x)^{1/2}$; si φ est strictement positive, le théorème résulte de 3.2 en prenant $U = -\log(\varphi)$ et $D = \sigma^{-1}$. Si φ est quelconque, on pose :

$$\varphi_n = \varphi * \exp(-|x|^2/n^2)/n$$

qui est log-concave et non nulle ; par continuité φ_n converge vers $(2\pi)^{n/2} \varphi$ et on passe à la limite comme à la fin de la démonstration de 3.2.

Dans le cas général soit $e_i, i \in \mathbb{N}$ une base hilbertienne de H et soient ξ_i les variables aléatoires de $L^2(\mu)$ associées ; on sait (voir [4]) que la série aléatoire $\sum \xi_i e_i$ converge presque sûrement dans E et que la loi de sa somme est μ ; soit a un élément de H, on peut toujours supposer a colinéaire à e_0 ; de même, soit ℓ une forme linéaire continue sur E telle que $\varphi \leq \exp(\ell)$; ℓ définit par restriction à H un élément b de $H = H'$ que l'on peut supposer être dans le plan (e_0, e_1) ; soit μ_n la loi de $\sum_{i=1}^n \xi_i e_i$;

montrons que $[\varphi\mu_n]$ converge étroitement vers $[\varphi\mu]$: si f est continue et bornée sur E :

$$\int f \cdot \varphi d\mu_n = \mathbb{E}_\mu \left(f \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \right) ;$$

le théorème de Lebesgue s'applique puisqu'on a une majoration de l'intégrale par $C \exp(\xi_1 < e_1, b > + \xi_2 < e_2, b >)$. La même méthode s'applique pour montrer que $[\varphi(\mu_n + a)]$ converge vers $[\varphi(\mu + a)]$ (on remplace ξ_1 par $\xi_1 + a$ dans les calculs précédents). D'après l'étude en dimension finie, existe une mesure α_n sur $E \times E$ se projetant suivant $\nu_n = [\varphi\mu_n]$ et $\nu'_n = [\varphi(\mu_n + a)]$ respectivement telle que

$$\int ||x-y||_H \alpha_n(dx, dy) \leq ||a||_H ;$$

puisque ν_n converge étroitement vers ν sur l'espace polonais E , existe un compact K portant à $\varepsilon > 0$ près toutes les mesures ν_n ; de même K' les mesures ν'_n ; les α'_n sont portées à 2ε près par $K \times K'$; ceci prouve que l'ensemble des α'_n reste relativement compact, ε pouvant être arbitraire ; on peut extraire une sous-suite α_{n_k} convergeant vers α et on a alors le résultat annoncé, vu que, l'injection $H \longrightarrow E$ étant compacte, la fonction $||\cdot||_H$ est s.c.i. sur E et donc aussi la fonction $||x-y||_H$ sur $E \times E$ ■

3.4 - Exemple

Soit une partie convexe borélienne d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n ; soit μ_a la mesure gaussienne de variance I et de moyenne a , $\mu_a(\circ | C)$ la mesure conditionnée par C , et m_a son barycentre ; on a $|m_a - m_b| \leq |a - b|$; ceci résulte de l'estimation de la distance entre $\mu_a(\circ | C)$ et $\mu_b(\circ | C)$, en remarquant que la fonction $x \longrightarrow D(x, H)$, où H est l'hyperplan passant par a et orthogonal à $a - b$, est lipschitzienne de norme 1.

Cet exemple est inspiré par [14] , de même que le résultat suivant : on peut montrer qu'en dimension 1, l'inégalité

$$D([\varphi \cdot \mu], [\varphi(\mu + a)]) \leq |a|$$

est valable avec φ log-concave et μ à densité log-concave.

C - Unicité du champ euclidien sur un réseau en interaction strictement convexe

On se propose de retrouver un résultat de [19] par une méthode directe, de passage à la limite thermodynamique, sans employer la méthode plus subtile de Dobrushin. Soit P un polynôme borné inférieurement non constant ; on appelle P-mesure de Gibbs toute probabilité μ sur $\mathbb{R}^{\mathcal{Z}^\nu}$ (ν étant fixé) qui vérifie, pour toute partie finie L de \mathcal{Z}^ν , l'équation :

$$(D) \quad \mu(dx_L | x_{L^c}) = n_L(dx_L | x_{L^c}) ,$$

où le premier membre désigne la mesure conditionnelle sur \mathbb{R}^L quand la composante x_{L^c} de $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{Z}^\nu}$ sur $L^c = \mathcal{Z}^\nu - L$ est fixée, et le deuxième est donné à priori par la formule :

$$n_L(dx_L | x_{L^c}) = \left[\exp(- \sum_{u \in L} P(x_u) - \sum_{\substack{u \text{ ou } v \in L \\ v \sim u}} (x_u - x_v)^2 / 4) \right]$$

$v \sim u$ signifiant que v est un des 2^ν voisins de u dans le réseau \mathcal{Z}^ν .

Naturellement l'égalité (D) n'est à lire que pour μ -presque tout x_{L^c} .

Soit $\mathcal{P}'(\mathcal{Z}^\nu)$ l'espace des fonctions sur \mathcal{Z}^ν à croissance au plus polynomiale.

3.5 - Théorème :

Supposons que $\inf(P'') > 0$; il existe alors au plus une P-mesure de Gibbs qui soit portée par $\mathcal{P}'(\mathcal{Z}^\nu)$.

Démonstration : Décomposons P sous la forme $\frac{m^2}{2} x^2 + Q$ où $m > 0$ et Q est convexe. Soit Δ le laplacien discrétisé sur \mathcal{Z}^ν : $\Delta x(u) = \sum_{v \sim u} (x(v) - x(u))$ et Δ_L le laplacien sur L calculé en prolongeant x par 0 en dehors de L. Soit γ la mesure gaussienne sur \mathbb{R}^L de variance $\sigma^2 = (-\Delta_L + m^2)^{-1}$; on vérifie facilement que la mesure $n_L(dx|0)$ n'est autre que $[\varphi_\gamma]$ avec $\varphi = \exp(- \sum_{u \in L} Q(x_u))$.

On va calculer la distance de $n_L(dx|0)$ et de $n_L(dx|z)$, z étant donné : $L^c \rightarrow \mathbb{R}$, pour une distance convenable ; posons :

$$D^2 = \rho(-\Delta_L + m^2) ,$$

où ρ est l'opérateur diagonal $(x(u), u \in L) \longrightarrow (\rho(u) x(u), u \in L)$ les coefficients $\rho(u)$ étant des nombres strictement positifs choisis plus bas, indépendamment de L . Etudions déjà à quelle condition D^2 est positive et non dégénérée sur \mathbb{R}^L :

$$\begin{aligned} 2(x, -\rho \Delta_L(x)) &= 2 \sum_{u \in L} x(u) \rho(u) \sum_{v \sim u} (x(u) - x(v)) \cdot \\ &= \sum_{u \in L} \rho(u) \sum_{v \sim u} (x(u) - x(v))^2 + \sum_{u \in L} \rho(u) \sum_{v \sim u} x^2(u) - x^2(v) ; \end{aligned}$$

le premier terme est positif, le second se transforme aisément en

$$\sum x^2(u) (-\Delta_L \rho(u)) \text{ (dans les calculs on convient de } x(v) = 0 \text{ pour } v \notin L).$$

Pour que $D^2 \geq 0$, il suffit donc que l'on ait la condition de surharmonicité :

$$(-\Delta_L + 2 m^2)\rho \geq 0, \text{ qui est impliquée par :}$$

$$(S) \quad (-\Delta + 2 m^2)\rho \geq 0 ;$$

la non dégénérescence de D^2 est alors assurée, en supposant L "connexe", par le premier terme.

D'autre part, $n_L(dx|z)$ s'identifie à $[\varphi(\gamma+h)]$ où h est la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} h_v = z_v \text{ pour } v \notin L \\ [(-\Delta + m^2)h](u) = 0 \text{ pour } u \in L ; \end{array} \right.$$

comme $D^2 \sigma^2$ est la matrice diagonale ρ , la condition de la proposition 3.2 est vérifiée (U' est diagonale et positive) et on a donc :

$$D(n_L(\cdot|0), n_L(\cdot|0)) \leq \|h\|_D$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \|h\|_D^2 &= \sum_{u \in L} \rho(u) h(u) [(-\Delta_L + m^2) h](u) = \\ &= \sum_{u \in L} \rho(u) h(u) [(-\Delta + m^2) h](u) + \sum_{\substack{v \in \partial L \\ u \in L, u \sim v}} \rho(u) h(u) z(v) \\ &= \sum_{\text{idem}} \rho(u) h(u) z(v) \end{aligned}$$

∂L désigne l'ensemble des points de L^c voisin d'un point de L .

Choisissons maintenant pour ρ une fonction vérifiant (S), strictement positive et à décroissance exponentielle sur \mathbb{Z}^v ; un calcul facile montre que c'est possible (voir [20] appendice B), il suffit de prendre

$$\rho(u) = \exp(-\lambda \sum_{i=1}^v |u_i|) \text{ avec } \text{ch}(\lambda) \leq \frac{m^2}{v} + 1.$$

Soit μ une P-mesure de Gibbs, f une fonction sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^v}$ provenant d'une fonction \mathcal{C}^1 à support compact sur \mathbb{R}^M où M est une partie finie de \mathbb{Z}^v , et L_n le "cube" $\{u; \forall i |u_i| \leq n\}$. D'après l'équation (D), on a

$\int f d\mu = \int \Psi_n(f) d\mu$, où $\Psi_n(f)$ est la fonction, ne dépendant que des coordonnées hors de L_n , définie par :

$$\Psi_n(f, z) = \int_{\mathbb{R}^L} f(x) n_{L_n} (dx | z_{L_n^c}),$$

dès que $L_n \supset M$. D'après le théorème des martingales rétrogrades, $\Psi_n(f)$ converge μ -presque sûrement vers une fonction $\Psi_\infty(f)$; pour terminer il nous suffit de montrer que $\Psi_\infty(f)$ est presque sûrement égale à une constante $m(f)$ indépendante de μ puisque $\int f d\mu = \int \Psi_\infty(f) d\mu = m(f)$, équation qui détermine μ , les fonctions f admissibles formant une algèbre qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^v}$. Notons, de manière plus précise, D_{L_n} la distance sur \mathbb{R}^{L_n} ; f s'identifie à une fonction sur \mathbb{R}^{L_n} avec une constante de Lipschitz k , indépendante de n , dès que $L_n \supset M$: en effet sur \mathbb{R}^M la distance D_M s'identifie à D_{L_n} en prolongeant $x \in \mathbb{R}^M$ par 0 en dehors de M .

On obtient donc :

$$|\Psi_n(f|z) - \Psi_n(f|0)| \leq k \left(\sum_{\substack{v \in \partial L_n \\ u \in L_n}} \rho(u) h(u) |z(v)|^{1/2} \right);$$

mais, par le principe du maximum, on a :

$$\sup_{u \in L_n} |h(u)| \leq \sup_{v \in \partial L} |z(v)|,$$

on peut donc majorer par :

$$k(\exp(-\lambda(n+1))) 2v n^{v-1} \sup_{\partial L_n} |z(v)|^{1/2}$$

mais, μ -presque sûrement, z est à croissance au plus polynomiale, donc :

$$|\Psi_n(f|z) - \Psi_n(f|0)| \longrightarrow 0, \quad \mu\text{-p.s.} \blacksquare$$

La méthode de [19] s'étendait à des polynômes proches d'un polynôme convexe ; le résultat démontré correspond à des intuitions physiques ; sous une forme moins élaborée, voir Dunlop, cité dans [1] .

D - Unicité du champ $P \varphi_1$.

Pour $\nu = 1$, la notion de P-mesure de Gibbs admet facilement un analogue non discret, en considérant des espaces de trajectoires continus ; on se propose d'établir le résultat d'unicité analogue à 3.5. Ceci donne quand P est strictement convexe la solution d'une conjecture de Courrège et Renouard , proposée dans [5] comme un joli problème d'unicité de mesure quasi-invariante (l'équivalence de la propriété de quasi-invariance citée avec la propriété de Gibbs est montrée dans [17]) ; ce résultat est d'autre part assez mal venu, étant donné qu'en dimension 1 toute hypothèse de convexité devait pouvoir être éliminée.

On désigne par $\mathcal{W}_{a,b}^{u,v}$ la mesure sur $\mathcal{C}([a,b])$ définie par le pont brownien assujetti aux contraintes $y(a) = u, y(b) = v$; P étant un polynôme borné inférieurement non constant, on considère la mesure sur $\mathcal{C}([a,b])$ suivante :

$$\mathcal{N}_{a,b}^{u,v} (dy) = \left[\exp\left(-\int_a^b P(y(t)) dt\right) \mathcal{W}_{a,b}^{u,v} dy \right] ;$$

une P-mesure de Gibbs est une mesure sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, telle que pour tous $a \leq b$, presque sûrement,

$$\mu(dy |_{[a,b]} | y |_{\mathbb{R}-[a,b]}) = \mathcal{N}_{a,b}^{y(a), y(b)} (dy |_{[a,b]}) .$$

3.6 - Théorème

Si $\inf(P'') > 0$, il existe au plus une P-mesure de Gibbs qui soit portée par $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} .

Considérons les objets suivants : un nombre strictement positif m et le potentiel de Green $\rho_{a,b}$ solution des équations

$$- \rho'' + m^2 \rho = \delta_{a+b/2} , \rho(a) = \rho(b) = 0 ;$$

si $a = -b$, ρ est donnée par $k \operatorname{sh}(m(x+b))$ pour $-b \leq x \leq 0$ et $k \operatorname{sh}(m(b-x))$ pour $0 \leq x \leq b$, avec $k = (2 m \operatorname{ch}(mb))^{-1}$; une 'norme généralisée' sur $\mathcal{C}([a,b])$, notée $\|\cdot\|_{a,b}$ définie par :

$$\|f\|^2 = \int_a^b (f'(t))^2 dt + \frac{1}{4} (f((a+b)/2))^2,$$

si f est intégrale indéfinie d'une fonction L^2 , et $\|f\| = +\infty$ sinon.

3.7 - Proposition

Soit P tel que $\inf(P'') > m$; il existe une constante r telle que pour tout, a,b,u,v avec $a \leq b$, existe une mesure α sur

$(\mathcal{C}([a,b]))^2$ vérifiant :

1° α admet les marginales $\mathcal{N}_{a,b}^{u,v}$ et $\mathcal{N}_{a,b}^{0,0}$

2° $\int \|y-z\|_{a,b} \alpha(dy,dz) \leq r \exp(\frac{m}{2}(a-b)) \sup(|u|,|v|)$.

On va se ramener aux mêmes méthodes que dans la démonstration du théorème 3.5, par un procédé de discrétisation; nous ferons quelques majorations assez grossières qui nous empêcherons de bien contrôler la constante r ; on supposera que $a = -b$; soit n pair et $x_0 = a, x_1, x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ en n intervalles égaux (de longueur $2b/n$); y étant donné dans $\mathcal{C}([a,b])$, soit \tilde{y} la fonction affine par morceaux et continue qui prend les mêmes valeurs que y aux points $x_i, 1 \leq i \leq n-1$, valeurs notées y_i , et qui est constante sur les intervalles $[a, x_1], [x_{n-1}, b]$; l'espace de ces fonctions \tilde{y} est isomorphe à \mathbb{R}^{n-1} .

Désignons par w_n , la mesure sur \mathbb{R}^{n-1} :

$$\left[\exp \left(-\frac{n}{4b} ((y_1-u)^2 + (y_{n-1}-v)^2) + \sum_{i=2}^{n-1} (y_n - y_{n-1})^2 \right) \right],$$

par w_n^0 la mesure analogue obtenue quand $u=v=0$, par μ_n et μ_n^0 les mesures définies par :

$$\mu_n = \left[\exp \left(-\sum_{i=2}^{n-1} P(y_i)/n \right) w_n(dy) \right] \quad (\text{resp : } w_n^0, \mu_n^0);$$

on désignera par les mêmes lettres les mesures sur $\mathcal{C}([a,b])$, obtenues en identifiant y_i , $2 \leq i \leq n-1$ à une fonction "ligne brisée" y ; notons qu'on n'a pas $\tilde{y}(0) = u$, presque sûrement par rapport à μ_n .

3.8 - Lemme

La mesure μ_n converge vers $\mathcal{N}_{a,b}^{u,v}$ pour la convergence étroite associée à la topologie de $\mathcal{C}([a,b])$.

Démonstration : Soit p_n l'application de \mathcal{C} dans lui-même qui à y associe la ligne brisée en n morceaux y ; on note que $w_n = p_n \mathcal{W}^{u,v}$; d'autre part, pour tout y , $p_n(y)$ converge vers y quand $n \rightarrow \infty$ pour la topologie de \mathcal{C} (convergence uniforme) ; ces deux propriétés impliquent par un calcul immédiat la convergence étroite de w_n vers $\mathcal{W}^{u,v}$. Soit $U_n(y) = \sum_{i=2}^n P(y_i)/n$ et sa limite $U_\infty(y) = \int_a^b P(y(t))dt$. Comme ci-dessus, on voit facilement que $[\exp(-U_\infty) w_n]$ converge vers $[\exp(-U_\infty) \mathcal{W}] = \mathcal{N}$, puisque U_∞ est continue sur \mathcal{C} .

Soit K une partie de \mathcal{C} composée de fonctions uniformément bornées et uniformément höldériennes d'exposant $1/4$, c'est à dire :

$$\exists r \forall y \in K \forall s,t \quad |y(t)-y(s)| \leq r |t-s|^{1/4} .$$

Un calcul simple montre que $U_n(p_n(y))$ converge uniformément vers $U_\infty(y)$ pour $y \in K$. D'autre part, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, existe une telle partie K portant à ε près \mathcal{W} ; on écrit pour f continue et bornée :

$$\int f \exp(-U_n) dw_n = \int f \exp(-U_n \circ p_n) d\mathcal{W} = \int_K + \int_{\mathcal{C}-K}$$

et des estimations immédiates donnent la limite $\int f \exp(-U_\infty) d\mathcal{W}$.

Démonstration de 3.7 : On va estimer la distance de Fortet-Mourier pour la norme $\|\cdot\|$ entre μ_n et μ_n^0 en essayant d'obtenir une majoration indépendante de n .

Sur l'espace des fonctions affines par morceaux envisagées, la norme prend la forme :

$$(1) \quad y_i^2 (n/2)/4 + \sum_{i=2}^{n-1} (n/2b)^2 (y_i - y_{i-1})^2, \text{ où : } q_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(t) dt ;$$

un calcul facile donne :

$$q_i = K_n \operatorname{sh}(m((x_i + x_{i-1})/2) + b), \text{ pour } 1 \leq i \leq n/2,$$

$$q_i = - K_n \operatorname{sh}(m((x_i + x_{i-1})/2) - b), \text{ pour } 1 + n/2 \leq i \leq n ,$$

avec :
$$K_n = (2k/n) \operatorname{sh}(mb/n) ;$$

soit Δ l'opérateur laplacien discret sur $\{2, \dots, n-1\}$ avec condition extérieure nulle :

$$(\Delta y)_i = \frac{n^2}{4b^2} (y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) \text{ où } y_1 = y_n = 0 ;$$

on vérifie en général la condition d'harmonicité avec une constante m_n

tendant vers m : $(\Delta q_i) = m_n q_i$ en posant :

$$(2) \quad m_n = \frac{n^2}{4b^2} (\operatorname{ch}(\frac{2mb}{n}) - 1), \text{ sauf}$$

pour $i=2, n-1, n/2$ et $n/2 + 1$; dans ces cas :

$$(3) \quad \Delta q_2 \leq m_n q_2 \text{ et idem pour } q_{n-1} ;$$

l'égalité eût été valable si nous n'avions pas remplacé q_1 et q_n par 0 ;

$$(4) \quad -\Delta q(n/2) = -\Delta q(1+n/2) = (n/mb)^2 \operatorname{sh}^2(mb/n) \operatorname{ch}(mb(1-2/n))/2\operatorname{ch}(mb).$$

$\geq 1/4$ pour n assez grand.

Si (\circ, \circ) est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^{n-1} , on a :

$$2(y, q (-\Delta + m_n^2)y) = \sum_{i=2}^{n-1} y_i^2 \left[(-\Delta + m_n^2)q \right]_i + \sum_{i=2}^{n-1} (n/2b)^2 ((x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i+1})^2) \geq \|y\|^2 ,$$

compte tenu des formules (1), (2), (3), (4) (avec des majorations grossières).

Ainsi on a trouvé une norme majorant $\|\cdot\|$; mais pour cette dernière, on connaît une majoration de la distance de μ_n et μ_n^0 ; en effet si γ_n est la gaussienne :

$$\left[\exp(- \sum (m_n^2/2) y_i^2) w_n^0 \right],$$

pour n assez grand $\mu_n^0 = [\varphi \cdot \gamma_n]$ et $\mu_n = [\varphi(\gamma_n + h_{u,v})]$ avec φ log-concave (dès que $m_n < \inf(P'')$) et h solution de $(-\Delta + m_n^2) h = 0$ avec valeurs au bord $h_1 = u, h_n = v$. On peut appliquer le théorème 3.3 comme en 3.5 et on obtient une mesure α_n de marginales μ_n et μ_n^0 vérifiant :

$$A_n = \int ||y-z|| \alpha_n(dy, dz) \leq (2(h, q(-\Delta + m_n^2)h))^{1/2} \\ = (\frac{n}{2b}) (2(q_2 h_1 u + q_{n-1} h_{n-1} v))^{1/2} ;$$

$q_2 = q_{n-1}$ et, par le principe du maximum, $|h_1|$ et $|h_2| \leq \sup(|u|, |v|)$; donc $A_n \leq (n/b) \sqrt{q_2} \sup(|u|, |v|)$; $q_2 = K_n \operatorname{sh}(m \frac{3b}{n})$, ce qui donne en utilisant l'inégalité $\operatorname{sh}(\varepsilon) \leq 2\varepsilon$ pour ε petit :

$$q_2 \leq 12 b^2 / n^2 \operatorname{ch}(mb)$$

pour n grand, et $A_n \leq C$ où :

$$C = 4 (\operatorname{ch}(mb))^{-1/2} \sup(|u|, |v|) ;$$

l'ensemble $||y|| \leq M$ est fermé (et même compact) dans $\mathcal{C}([a, b])$, donc par le même raisonnement qu'au théorème 3.3, les mesures α_n convergent vers une mesure α pour laquelle l'intégrale de la distance $||y-z||$ est majorée par C ■
Fin de la démonstration du théorème.

Etant donnée une trajectoire z de $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ il n'est pas sûr qu'elle soit à croissance (moins que) polynomiale à l'infini ; ceci nous empêche de terminer la démonstration de manière aussi directe que dans le cas discret ; soit une fonction positive, lisse, à support inclus dans $[0, 1]$, d'intégrale 1 ; $z * \varphi$ est à croissance polynômiale :

$$(1) \quad \left| \int_n^{n+1} \varphi(n-t) z(t) dt \right| \leq C_1 n^d + C_2 ;$$

il existe donc un point $b_n \in [n, n+1]$ avec $|z(b_n)| \leq C_1 n^d + C_2$ (si z admet un zéro dans l'intervalle, c'est évident sinon on utilise (1)). Posons

$a_n = b_{-n}$; pour $n > 0$, on a :

$$(2) \quad 0 \leq a_n + b_n/2 \leq 2 .$$

On sait d'après [18], ou d'après une théorie générale [16], que toute P-mesure de Gibbs s'obtient comme combinaison d'extrémales. Il suffit donc d'examiner l'unicité de ces mesures de Gibbs extrémales ; une telle mesure est triviale, comme on le vérifie sans peine, sur la tribu

$\bigcap_{a \leq b} \mathcal{F}_{\mathbb{R} - [a,b]}$, où \mathcal{F}_I désigne la tribu des parties de \mathbb{R} engendrée par les fonctions $y \rightarrow y(t)$, $t \in I$; si f est une fonction sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ provenant d'une fonction \tilde{f} de $\mathcal{C}([-M, M])$ et μ extrémale portée par $\mathcal{P}'(\mathbb{R})$ il existe par le théorème des martingales un $z \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ tel que :

$$(3) \quad \int f d\mu = \lim_n \int \tilde{f} d\mathcal{N}^{z(a_n), z(b_n)}_{a_n, b_n}$$

(puisque l'égalité est valable p.s.). Choisissons f de la forme :

$$f(y) = \tilde{f}(y(t_1), \dots, y(t_k))$$

où \tilde{f} est une fonction \mathcal{C}^1 à support compact donnée sur \mathbb{R}^k et les t_i sont fixés.

Dans ce cas, pour n grand, f s'identifie à une fonction "lipschitzienne" pour $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{C}([a_n, b_n])$:

$$|f(y) - f(z)| \leq C_3 \|y - z\|_{a_n, b_n}$$

avec une constante C_3 indépendante de n ; en effet, par exemple :

$$y(t_1) = y((a_n + b_n)/2) + \int_{(a_n + b_n)/2}^{t_1} y'(s) ds$$

$$(4) \quad |y(t_1)| \leq |y(\cdot)| + C_4 \left(\int (y'(s))^2 ds \right)^{1/2} ; \text{ d'après (1), on}$$

peut toujours supposer que $(a_n + b_n)/2$ converge vers α ; alors ρ_{a_n, b_n} converge vers la solution ρ de $-\rho'' + m^2\rho = \delta$, avec $\rho(\infty) = \rho(-\infty) = 0$, uniformément sur tout intervalle compact (utiliser la formule :

$$G(x, t) = \text{sh}(m(x-a)) \text{sh}(m(b-t)) / m \text{sh}(b-a), \quad x \leq t$$

du noyau de Green sur $[a, b]$; comme ρ est continue et strictement positive la formule (4) donne :

$$|y(t_1)| \leq C_5 \|y\|_{a_n, b_n} .$$

La proposition 3.7 donne :

$$\left| \int f d \mathcal{N}_{a_n, b_n}^{z(a_n), z(b_n)} - \int f d \mathcal{N}_{a_n, b_n}^{0,0} \right| \\ \leq C_3 r \exp\left(\frac{m}{2}(a_n - b_n)\right) (C_1 n^d + C_2),$$

comme $a_n - b_n \leq -2n+1$, on a nécessairement d'après (3) :

$$\int f d \mu = \lim_n \left(\int f d \mathcal{N}_{a_n, b_n}^{0,0} \right) ;$$

comme l'ensemble des fonctions f admissible est assez riche, l'équation précédente détermine μ de manière unique ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Van Beijeren, G.S. Sylvester : Phase transitions for continuous spin Ising ferromagnets. J. Funct. Anal. 28², p. 145-167 (1978).
- [2] R. Bellmann , A. Hoffman : On a theorem of Ostrowski and Tausky. . Arch. der. Math. 5. p 123-127 (1954).
- [3] A. Bensoussan, R. Temam : Equations aux dérivées partielles non linéaires. Israel J. Math. 11 p. 95 (1972).
- [4] S. Chevet : Notes de séminaire (1981).
- [5] P. Courrège, P. Renouard : Oscillateur anharmonique, mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et théorie quantique des champs en dimension d=1. Astérisque 22 (1975).
- [6] R.L. Dobrushin : Prescribing a system of random variables by conditional distributions. Theor. Prob. Appl. 15³ p. 458 (1970).
- [7] W. Doeblin, R. Fortet : Sur les chaînes à liaisons complètes. Bull. S.M.F. 65, p. 132-148, (1937).
- [8] R.M. Dudley : Probabilities and metrics. Lectures notes Séries 45, Aarhus universitet.
- [9] X. Fernique : Sur le théorème de Kantorovitch Rubinstein dans les espaces polonais. Sem. Proba. Strasbourg 15. Lectures notes in math. 850.
- [10] R. Fortet, E. Mourier : Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Ser 3.70 p. 266-285 (1953).
- [11] L. Kantorovitch - G. Rubinstein : On a space of completely additive functions ; en russe Vestnik Leningrad Univ. 13⁷ p. 52-59 (1958).
- [12] E. Lepage : Théorème des grands écarts et théorème de la limite centrale pour certains produits de matrices aléatoires. C.R. Acad. Sc. Paris 290 (1980) p. 559-562.

- [13] H.J. Brascamp, E.H. Lieb : On extensions of the Brunn-Minkowski and Prekopa - Leindler Theorems, including inequalities for log-concave functions and with an application to diffusion equation. J. Funct. Anal. 22 p. 366-389 (1979).
- [14] L. Mailhot : en préparation.
- [15] J. Moulin-Ollagnier, D. Pinchon : Un problème de minimum pour le couplage de deux probabilités. C.R. Acad. Sc. Paris (1978).
- [16] C. Preston : Random fields. Lect. notes. Math. 534 (1976).
- [17] G. Royer : Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série 8. p. 319-388 (1975).
- [18] G. Royer, M. Yor : Représentation intégrale de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$; mesures extrémales et propriétés de Markov. Ann. Inst. Fourier 26² (1976).
- [19] G. Royer : Etude des champs euclidiens sur un réseau \mathbb{Z}^V . J. Math. pures. appl. 56 p. 455-478 (1977).
- [20] G. Royer : Processus de diffusion associé à certains modèles d'Ising à spins continus. Z.F. Wahr. 46 p. 107-124 (1978).
- [21] E. Pardoux : Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. Thèse. Univ. Paris Sud (1975).
- [22] D. Ruelle : Thermodynamic formalism. Encyclopedia of mathematics 5. Addison-Wesley (1978).
- [23] B. Simon : Functional integration and quantum physics. Academic Press (1979).
- [24] C. Sunyach : Une classe de chaînes de Markov récurrentes sur un espace métrique complet. Ann. Inst. Poincaré 11⁴ p. 325-343 (1975).
- [25] A. Prekopa : On logarithmic concave measures and functions. Act. Scien. Math. 34 p. 335-345 (1973).

G. ROYER
Université de Clermont II
Complexe Scientifique des Cèzeaux
Département de Mathématiques Appliquées
B.P. n° 45