

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

C. SUNYACH

**Condition pour qu'une transformation d'un espace uniforme
soit une contraction stricte, et applications**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 76, série *Probabilités et applications*, n° 1 (1983), p. 81-92

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1983__76_1_81_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONDITION POUR QU'UNE TRANSFORMATION D'UN ESPACE UNIFORME
SOIT UNE CONTRACTION STRICTE, ET APPLICATIONS.

C. SUNYACH

Université Paris VI

Etant donné un espace métrique (E, d) et une contraction stricte bijective T de E , il est clair que la suite $d(T^n x, T^n y)$ converge vers 0, uniformément sur tout ensemble $\{(x, y) : d(x, y) \leq t\}$. Le résultat principal de cet article en est une réciproque partielle : si une telle propriété de convergence a lieu pour la distance d , c'est que T est une contraction stricte pour une distance induisant une structure uniforme plus fine que celle de d (équivalente si T^{-1} est uniformément continue).

Si a désigne le point fixe de T et $(A_n, B_n) \in E \times Z$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, ceci permet de donner des conditions explicites pour que la suite $T^{\sum_{i=1}^n B_i} (A_{n+1})$ converge vers a presque sûrement. Il s'agit donc d'un résultat d'approximation aléatoire de point fixe, l'indice de l'itération étant lui-même aléatoire. Il serait sans doute intéressant de rechercher d'autres types de conditions sous lesquelles cette propriété est réalisée, et des applications numériques du type "Monte-Carlo".

Lorsque T est un automorphisme d'un groupe ceci permet d'étudier la convergence de la suite

$$\prod_{n=1}^N T^{\sum_{i=1}^n B_i} (A_{n+1}),$$

(la loi du groupe étant notée multiplicativement), laquelle intervient dans l'étude des marches aléatoires sur le produit semi-direct de E par Z relativement à T (voir [4], [7] et [8]).

Notons que la condition ci-dessus est suffisante pour assurer l'existence (et l'unicité) d'un point fixe. Il m'a paru intéressant d'en donner une démonstration directe, en fait sous une hypothèse plus faible : il suffit que $d(T^n x, T^n y)$ converge quasi-uniformément vers 0 sur tout ensemble $\{(x, y) : d(x, y) \leq t\}$. Cette hypothèse

est naturelle dans ce contexte : en effet si E est compact, T continue et si T^n converge simplement vers une fonction constante, cette suite converge quasi-uniformément. Il est facile de trouver des transformations ayant cette propriété mais telles que T^n ne converge pas uniformément ; il s'ensuit qu'elles ne pourront être des contractions strictes par rapport à une distance définissant la topologie de E .

I. Le résultat principal.

La démonstration s'inspire de la construction d'une famille d'écartés sur un espace uniforme (voir [2] § 1.4). Dans la suite, $(E, \mathcal{U})$ désignera un espace uniforme.

Lemme 1. Soient X une partie de $E \times E$ telle que $X \circ X \subset X$, $K \in [0, 2]$ et g une fonction réelle positive définie sur X , tels que

$$g(x, t) \leq K \sup [g(x, y), g(y, z), g(z, t)]$$

pour tous $(x, y) \in X$, $(y, z) \in X$ et $(z, t) \in X$.

Alors g satisfait l'inégalité

$$g(x, y) \leq K \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i, x_{i+1})$$

pour tous $(x_i, x_{i+1}) \in X$ tels que $x_0 = x$ et $x_n = y$ et pour tous entiers n .

Preuve par récurrence (ibid. prop. 1.2).

Lemme 2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de parties symétriques de $E \times E$ contenant la diagonale et telles que $U_{n+1}^3 \subset U_n$ pour tout n , et soit $X = \bigcup_n U_n$.

Il existe une fonction réelle f sur X , vérifiant l'inégalité triangulaire et telle que

$$f^{-1} [0, \frac{1}{2^{n+1}}] \subset U_n \subset f^{-1} [0, \frac{1}{2^n}] , \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Soit F une application de X dans lui-même. S'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $F(U_n) \subset U_{n+p}$ (resp. $F^{-1}(U_n) \subset U_{n+p}$) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f \circ F \leq \frac{1}{2^{p-1}} f$ (resp $f \leq \frac{1}{2^{p-1}} f \circ F$), et $f \circ F \leq \frac{1}{2^p} f$ (resp. $f \leq \frac{1}{2^p} f \circ F$) si de plus F est surjective.

Preuve.

Posons $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^n} (1_{U_n} - 1_{U_{n+1}})$. Cette fonction vérifie

$$g(x,y) \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow (x,y) \in U_n,$$

or $U_{n+1}^3 \subset U_n$, donc l'hypothèse du lemme précédent est satisfaite avec $K=2$. Soit $f(x,y)$ la borne inférieure des sommes $\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i, x_{i+1})$ où n est un entier arbitraire, $x_0 = x$, $x_n = y$ et, pour tous i , (x_i, x_{i+1}) est arbitraire dans X .

Il est clair que $g/2 \leq f \leq g$, et les conclusions du lemme en découlent.

Théorème 1. Soit T une bijection de E dans lui-même telle que

1) Pour tous $(x,y) \in E \times E$ et pour tout entourage U , $(T^n x, T^n y)$ soit dans U pour n assez grand.

2) Il existe un entourage A sur lequel la propriété précédente est uniforme par rapport à $(x,y) \in A$.

Alors il existe un écart δ et un entier q tels que

$$\delta \circ T^q = \frac{1}{2} \delta \text{ et } \{\delta \leq \frac{1}{2^{n+1}}\} \subset T^{qh} A \subset \{\delta \leq \frac{1}{2^n}\}^*$$

pour tous $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, la structure uniforme définie par δ est plus fine que $\mathcal{U}$, et lui est identique lorsque $T^q \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Preuve.

Remarquons tout d'abord que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^{np} A = E \times E$ pour tout entier p . En effet pour tout couple (x,y) , $(T^{np} x, T^{np} y)$ est dans A pour n assez grand. Par ailleurs il existe un entier q tel que $(T^q A)^3 \subset A$. En effet il existe un entourage V tel que $V^3 \subset A$ et un entier q tel que $T^q(A) \subset V$. Posons $F = T^q$ et $U_n = F^n(A)$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; cette suite vérifie

$$F(U_n) = U_{n+1} \text{ et } U_{n+1}^3 \subset U_n.$$

La conclusion résulte alors du lemme 2.

Remarque.

L'écart $\delta' = \sum_{i=0}^{q-1} 2^{i/q} \delta \circ T^i$ vérifie $\delta' \circ T = 2^{-1/q} \delta'$. Les relations qui lient δ' et $T^n A$ sont moins simples que pour δ et $T^n A$.

* En posant $\tilde{T} = T \otimes T$

II. Cas d'un automorphisme d'un groupe.

Soit G un groupe localement compact et T un automorphisme de G tels que, pour tout $x \in G$, $T^n x$ converge vers le neutre. On sait que de tels automorphismes interviennent dans la théorie du renouvellement ([4], [7] et [8]) et le résultat ci-dessous, qui dit que T est une contraction stricte par rapport à une distance invariante, y joue un rôle important.

Dans ce cas on va bien entendu rechercher un écart invariant par le groupe.

Théorème 2. Soient G un groupe localement compact dénombrable à l'infini, T un automorphisme de G et K un sous-groupe compact de G tel que $TK=K$ et que, pour tous $x \in G$, la suite $(T^n x)_{n \geq 0}$ soit relativement compacte et ses valeurs d'adhérence soient dans K .

Il existe $c \in]0,1[$ et un écart invariant à droite f tel que $f(k.x, k'.y) = f(x, y)$ pour tous $k, k' \in K$ et $x, y \in G$, que $\{f(e, \cdot) \leq \varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ soit un système fondamental de voisinages de K (e désignant le neutre) et que $f \circ \tilde{T} = cf$.

Preuve.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus $(T^n)_{n \geq 0}$ est équicontinue. Il existe donc un voisinage compact symétrique V de K tel que $T(V) \subset V$; et un entier q tel que $T^q(V^3) \subset V$. En posant

$$A = \{(x, y) : x.y^{-1} \in K.V.K\},$$

le *théorème 1* montre l'existence d'un écart h ayant les propriétés d'invariance indiquées et d'un entier q tel que $h \circ \tilde{T}^q = \frac{1}{2} h$, donc $f = \sum_{i=0}^{q-1} 2^{i/q} h \circ \tilde{T}^i$ convient. Notons que le résultat se traduit de manière naturelle sur l'espace homogène des classes $K.x$ ($x \in G$).

Remarque.

Le résultat précédent possède un analogue continu évident, où la donnée est une représentation continue de R dans les automorphismes de G . La relation $f \circ \tilde{T} = cf$ sera remplacée par

$$f \circ \tilde{T}^1 = cf \quad \text{et} \quad f \circ \tilde{T}^t \leq f$$

pour tous $t \geq 0$.

Notons que si un tel automorphisme .

(resp. représentation) existe sur G , le groupe a une structure très particulière (ibid et [4]).

III. Itération aléatoire d'une transformation.

Lorsque $(E, \mathcal{U})$ est complet, une transformation T vérifiant les hypothèses du théorème 1 possède un unique point fixe, soit a , et on sait que pour tout $x \in E$, $(T^n x)_{n \geq 0}$ converge vers a . Dans le théorème suivant, je donne des conditions pour

que $T^{\sum_{i=1}^n B_i} (A_n)$ converge vers a presque sûrement, où (A_n, B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $E \times \mathbb{Z}$. Voir l'introduction et [8] pour le cas d'un automorphisme d'un groupe.

Théorème 3. Soient (E, d) un espace métrique complet, T une bijection de E tels que $d \circ T \leq \beta d$, où $0 < \beta < 1$, et a le point fixe de T . Soit de plus (A_n, B_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E \times \mathbb{Z}$, indépendantes et équidistribuées, B_1 ayant un moment d'ordre 1 et $EB_1 > 0$.

1) Soit φ une fonction positive sur E , nulle et continue en a , telle que $\alpha \varphi \leq \varphi \circ T$ ($\alpha \in]0, 1[$). Si $T^{\sum_{i=1}^n B_i} (A_{n+1})$ converge vers a presque sûrement alors $\int_{\{\varphi > 0\}} \text{Log}^+ \varphi \, d\lambda < +\infty$, où λ est la loi de A_1 .

2) S'il existe $x \in E$ tel que $E \log [1 + d(x, A_1)] < +\infty$, alors

$$\limsup_n [d(T^{\sum_{i=1}^n B_i} (A_{n+1}), a)]^{\frac{1}{n}} \leq \beta^{EB_1} < 1 \quad \text{p.s.}$$

Preuve.

2) On sait que l'hypothèse entraîne $\limsup_n [1 + d(x, A_n)]^{\frac{1}{n}} \leq 1$ p.s. (voir [8]).

Considérons une épreuve ω telle que $\sum_{i=1}^n B_i(\omega)/n$ converge vers EB_1 . Pour n assez

grand, $\sum_{i=1}^n B_i(\omega)$ est positif, d'où

$$d(T^{\sum_{i=1}^n B_i(\omega)} (A_{n+1}(\omega), a)) \leq \beta^{\sum_{i=1}^n B_i(\omega)} [d(A_{n+1}(\omega), x) + d(x, a)],$$

d'où le résultat annoncé.

1) D'après la loi des grands nombres il existe un entier k tel que presque sûrement $\sum_{i=1}^n B_i \leq kn$ pour n assez grand, donc $d(T^{kn}(A_{n+1}), a)$ converge vers 0 presque sûrement. D'après le lemme de Borel-Cantelli il en résulte que la série $\sum_n \lambda(\varphi \circ T^{kn} > t)$ est convergente pour tout $t > 0$.

Le nombre d'entiers n tels que $1 \leq \varphi \circ T^{kn}(x)$ est majoré par $(\text{Log } \varphi(x) / \text{Log } 1/\alpha^k)^+$ si $\varphi(x) > 0$, donc $1_{\varphi > 0} \text{Log}^+ \varphi$ est λ -intégrable.

Exemple.

Si $\alpha d \leq d \circ \tilde{T}$ où $\alpha > 0$, on déduit de 1 que $E[1 + \log d(x, A_1)] < +\infty$ pour tout $x \in E$.

IV. Remarques sur le théorème du point fixe de Banach.

Comme on l'a vu dans l'introduction il est naturel dans ce contexte d'introduire la convergence quasi-uniforme. Rappelons tout d'abord que si une suite de fonctions réelles continues f_n définies sur un espace compact X converge simplement vers une fonction continue, cette suite converge en fait quasi-uniformément ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble infini d'entiers R , il existe une partie finie R_0 de R telle que pour tout $x \in X$ on ait

$$\inf_{n \in R_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ces notions et résultats sont dus à C. Arzela. Voir [1] et [3].

Remarquons que si (X, d) est un espace métrique et T une transformation de X telle que T^n converge uniformément (resp. quasi-uniformément) vers une fonction constante, alors $d(T^n x, T^n y)$ converge vers 0 uniformément (resp. quasi-uniformément) par rapport à $(x, y) \in X \times X$. Le résultat principal de cette partie est une réciproque partielle à cette proposition.

Définition : On dit que x est asymptotiquement fixe si $T^n x$ converge vers x .

Si x est asymptotiquement fixe et si le graphe de T est fermé en x , alors x est fixe.

Si X est la réunion de 0 et de la suite $\frac{1}{n}$ ($n \geq 1$), et si $T \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$ et $T0=1$, il est clair que 0 est l'unique point asymptotiquement fixe de T et qu'il n'est pas fixe.

Théorème 4. Soient (E,d) un espace métrique complet, T une transformation de E et A un entourage de la diagonale de $E \times E$ (i.e. il existe $t > 0$ tel que $\{d \leq t\} \subset A$). Supposons que, quasi-uniformément sur A , la suite $d \circ \tilde{T}^n$ converge vers 0.

Soit $x \in E$. S'il existe un entier p tel que $(T^p x, T^{p+1} x) \in A$, la suite $(T^n x)$ converge vers un point asymptotiquement fixe ; notons le $a(x)$. Soit (x_n) une suite de E telle que, pour tout i , $\lim_n d(x_n, T^i x_n) = 0$; alors $a(x_n)$ existe pour n assez grand et $\lim_n d(x_n, a(x_n)) = 0$; en particulier si de plus $(x_n, x_m) \in A$ pour tous n et m assez grands, (x_n) converge vers un point asymptotiquement fixe.

Commentaires.

Soit $x \in E$ tel que $(x, Tx) \in A$ et X l'adhérence de la suite $(T^n x)$. Etant donné que cette suite converge, $d \circ \tilde{T}^n$ converge uniformément vers 0 sur $X \times X$. On voit donc que l'hypothèse de quasi-uniformité entraîne en fait l'uniformité sur certaines parties, mais il n'y aura pas en général uniformité sur tout un entourage de la diagonale (voir un exemple ci-dessous).

Lorsque T est uniformément continue, la dernière assertion dit qu'une suite de points fixes approchés ($\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$), de diamètre assez petit ($(x_n, x_m) \in A$), converge vers un point fixe.

Preuve.

Soit donc (x_n) une suite telle que, pour tout i , $\lim_n d(x_n, T^i x_n) = 0$. Commençons par montrer que pour tout $t > 0$ tel que $\{d \leq t\} \subset A$ il existe un entier N tel que $d(x_n, T^i x_n) \leq t$ pour tous $i \geq 0$ et $n \geq N$.

Sinon, il existerait des suites (n_p) et (i_p) telles que $d(x_{n_p}, T^{i_p} x_{n_p}) > t$ et $n_p \geq p$ pour tout p . La suite (i_p) converge vers $+\infty$ puisque $\lim_n d(x_n, T^i x_n) = 0$

pour tout i . Posons $y_p = x_{n_p}$ et soit $\varphi(p)$ le plus petit entier q non nul tel que $d(y_p, T^q y_p) > t$. Il est clair que $\varphi(p)$ converge vers $+\infty$ avec p .

Etant donné que $d(y_p, T^{\varphi(p)-1} y_p) \leq t$ pour tout p , il existe un ensemble fini d'entiers R_0 tel que

$$\inf_{q \in R_0} d(T^q y_p, T^{q+\varphi(p)-1} y_p) \leq t/3$$

puisque $d \circ \tilde{T}$ converge quasi-uniformément vers 0 sur A . De plus, pour tout $q \in R_0$, on a $d(y_p, T^q y_p) \leq t/3$ et $d(T^{q-1+\varphi(p)} y_p, T^{\varphi(p)} y_p) \leq t/3$ pour tout p assez grand.

D'où $d(y_p, T^{\varphi(p)} y_p) \leq t$ d'après l'inégalité triangulaire. Il y a donc contradiction.

Soit maintenant $x \in E$ pour lequel il existe p tel que $(T^p x, T^{p+1} x) \in A$ et posons

$z_n = T^{p+n} x$ ($n \geq 0$). Puisque $d \circ \tilde{T}^n$ converge simplement vers 0 sur A , $d(z_n, T z_n) = d(z_n, z_{n+1})$ converge vers 0, donc $d(z_n, T^i z_n)$ aussi, pour tout $i \geq 0$. La propriété

préliminaire montre que (z_n) est une suite de Cauchy. Soit $a(x)$ sa limite. Pour n

assez grand, $(z_n, a(x))$ est dans A , donc $\lim_q d(z_{q+n}, T^q a(x)) = 0$ et par suite

$\lim_q d(a(x), T^q a(x)) = 0$, ce qui montre que $a(x)$ est asymptotiquement fixe.

Il résulte alors aisément de la propriété préliminaire que $(x_n, T x_n) \in A$ pour n assez grand et que $\lim_n d(x_n, a(x_n)) = 0$. Si de plus $(x_n, x_m) \in A$ pour n et m assez grands la suite $a(x_n)$ sera constante pour n assez grand, car $\lim_i d(T^i x_n, T^i x_m) = 0$ si $(x_n, x_m) \in A$, donc (x_n) converge, dans ce cas, vers un point asymptotiquement fixe.

Remarques.

On étend facilement ce résultat à un espace uniforme séparé dans lequel les suites de Cauchy convergent.

Exemples.

1) $E = [0, +\infty[$, T croissante et continue, $T(0) = 0$ et $T(x) < x$ si $x \neq 0$.

2) (E, d) est un espace métrique complet, θ est une transformation de $[0, +\infty[$, croissante et continue à droite telle que $\theta(0) = 0$ et $\theta(t) < t$ si $t \neq 0$, et $d \circ \tilde{T} \leq \theta \circ d$.

Cet exemple a été traité par E. Rakotch [5], et par B.K. Ray [6].

Corollaire 1. Soient (E,d) un espace métrique compact et T une transformation continue de E . Si $d \circ T^n$ converge simplement vers 0, T possède un point fixe et un seul.

Considérons l'espace $E \subset \mathbb{R}$, constitué de 0 et de la suite $\frac{1}{n}$ ($n \geq 1$) muni de la topologie de $\mathbb{R}$, et la transformation T telle que $T1=0$, $T \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}$ si $n \geq 2$ et $T0=0$.

La transformation T est continue et T^n converge simplement vers 0, mais non uniformément puisque $T^{n-1} \frac{1}{n} = 1$ et $T^n \frac{1}{n} = 0$.

Corollaire 2. Soient (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite de E . S'il existe $t > 0$ tel que $\lim_n d(x_{n+p}, x_{n+q}) = 0$ uniformément sur l'ensemble des couples (p,q) tels que $d(x_p, x_q) \leq t$, (x_n) est une suite de Cauchy.

Il suffit d'adapter le début de la preuve du *théorème 4* en utilisant la pseudo-transformation $Tx_n = x_{n+1}$ sur l'espace $E_0 = (x_n)$.
On peut aussi appliquer la méthode précédente aux semi-groupes continus de transformations. En voici un exemple :

Théorème 5. Soit A un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{R}^n$.

Supposons qu'il existe une application continue η de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\eta(0) = 0$, $\eta(t) < 0$ si $t > 0$, $\int_0^1 \frac{du}{\eta(u)} = -\infty$ et que

$$(1) \quad \forall x, y \quad (Ax - Ay, x-y) \leq ||x-y|| \eta(||x-y||)$$

($|| \cdot ||$ désigne la norme euclidienne et $(,)$ le produit scalaire usuel). Alors le champ de vecteurs A s'annule en un point et un seul et toutes les courbes intégrales convergent vers ce point.

Preuve : On applique le *théorème 4* au semi-groupe engendré par A .

Application à un problème de surjectivité.

Voici une application, classique dans le cas des contractions strictes.

Proposition 6. Soient F un espace de Fréchet, d une distance invariante compatible et pour laquelle E est complet. Posons $|x| = d(x, 0)$ si $x \in F$, et soit E la boule fermée de rayon unité, centrée à l'origine.

Soit $z \in F$ et τ_z la translation qui transforme l'origine en z . Soit U une application de $E+z = \tau_z(E)$ dans E . Si, pour tout $t > 0$, $|(U \circ \tau_z)^n(x) - (U \circ \tau_z)^n(y)|$ converge vers 0, quasi-uniformément sur $\{|x-y| \leq t\}$, l'équation $x - U(x) = z$ possède une unique solution sur $E+z$. De plus si $(x_n) \subset E+z$ est telle que $\lim_n |x_n - U(x_n) - z| = 0$, la suite (x_n) converge vers cette solution.

Preuve.

Il suffit d'appliquer le *théorème 4* à $U \circ \tau_z$.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] ARZELA, C. Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue.
Rend. Accad. Sci. Bologna 79-84 (1883-1884).
- [2] BOURBAKI, N. Topologie générale Ch. 9.
- [3] DUNFORD, N and SCHWARTZ, J.T. linear operators Ch. IV §6.
- [4] ELIE, L. Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie.
Ann. Scie. Ecole Norm. Sup. XV 1982.
- [5] RAKOTCH, E. A note on contractive mappings Proc. A.M.S 13 (1962) 459-465.
- [6] RAY, B.K. On Ciric's fixed point theorem Fundamenta Mathematicae XCIV (1977).
- [7] SUNYACH, C. Théorème du renouvellement pour les marches aléatoires sur un groupe non-unimodulaire.
C.R.A.S. Paris 295, série I, 1982.
- [8] SUNYACH, C. Capacité et théorie du renouvellement **II** (à paraître).

English summary.

In this article we show that on a metric space (E,d) , if T is a one to one mapping such that T^{-1} is uniformly continuous and $d(T^n x, T^n y)$ converges uniformly to 0 on $\{(x,y) : d(x,y) \leq t\}$ for all $t > 0$, then T is a strict contraction with respect to another metric equivalent to d .

This result yields conditions for the convergence of random iterates of T . When T is an automorphism of a group this result is useful for some problems concerning random walks on some semi-direct products of groups (cf. [7] and [8]).

We conclude by a direct proof of the existence of a fixed point for such transformations (in fact a larger class), if the space is complete.

C. SUNYACH
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
75230 PARIS Cédex 05