

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

GÉRARD LETAC

Mesures sur le cercle et convexes du plan

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 76, série *Probabilités et applications*, n° 1 (1983), p. 35-65

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1983__76_1_35_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES SUR LE CERCLE ET CONVEXES DU PLAN

Gérard LETAC

Université Paul Sabatier (Toulouse).

§ 1. Introduction

(voir (*) page 36)

La théorie de la mesure, telle qu'elle est enseignée dans la 3ème année des universités, paraît à quelques uns abstraite et repliée sur elle-même ; certains citeront les probabilités et la théorie ergodique comme une de ses applications ; on pense aussi, mais plus rarement, aux représentations intégrales variées de l'analyse parmi ses utilisations possibles. Le but de cet article est d'en donner une application à la géométrie élémentaire en mettant en bijection un ensemble de mesures positives sur le cercle $\Gamma = \{ e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R} \}$ avec la famille $\mathcal{C}$ des convexes fermés bornés (= compacts) non vides du plan, convenablement quotientée.

Plus précisément, on appellera $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des mesures positives $s(d\theta)$ sur le cercle Γ (identifié avec $[0, 2\pi[$) telles que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} s(d\theta) = 0$$

(ou encore $\int_0^{2\pi} \cos \theta s(d\theta) = \int_0^{2\pi} \sin \theta s(d\theta) = 0$)

Ceci peut être vu mécaniquement en imaginant s comme une répartition de masse sur Γ dont le barycentre est le centre, ou de façon probabiliste, en imaginant une variable aléatoire X à valeurs dans $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ dont la loi est $\frac{s(d\theta)}{s(\Gamma)}$. Alors l'espérance de X est $(0,0)$. Insistons sur le fait que Γ est compact et donc que les mesures sur Γ sont bornées.

Rappelons qu'une partie C de $\mathbb{R}^2$ est dite convexe si pour tous (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de C et tout λ de $[0,1]$, alors le segment $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$ est dans C . La famille $\mathcal{C}$ des convexes compacts non vides comprend par exemple :

Ex. 1.1. $C = \{(0,0)\}$

Ex. 1.2. $C =$ le segment d'extrémités $\pm (\frac{k}{2} \cos \alpha, \frac{k}{2} \sin \alpha)$, avec $k > 0$.

Ex. 1.3. $C =$ le disque $\{(x,y) ; x^2 + y^2 \leq k^2\}$ avec $k > 0$

Ex. 1.4. $C =$ le polygône convexe, défini comme l'intersection des demi-espaces

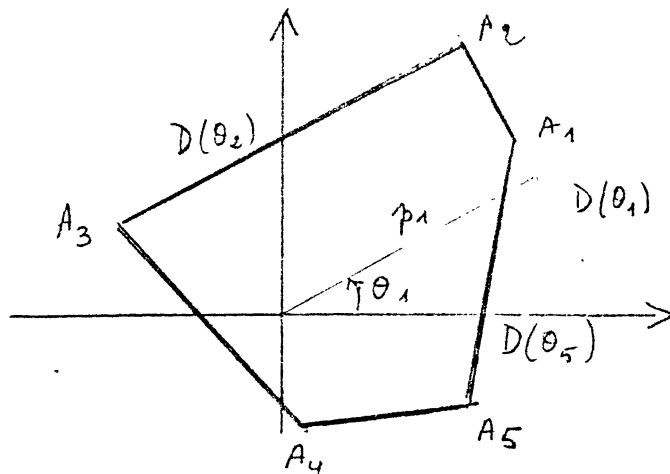
$$E(\theta_j) = \{ (x,y) ; x \cos \theta_j + y \sin \theta_j \leq p_j \} ,$$

où $p_j > 0$, $j=1, \dots, n$ et $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$.

où $n \geq 3$, où $p_j > 0$ pour $j=1, \dots, n$, où $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$ et où $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi$ si $j < n$ et où $\theta_n - \theta_1 > \pi$.

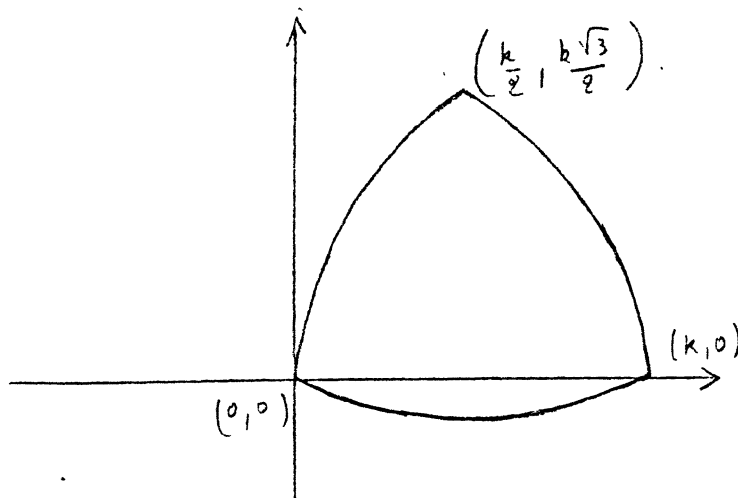
(*) Le présent travail est le texte d'une conférence faite en avril 1982 au "Séminaire d'Enseignement des Mathématiques après Baccalauréat" animé par l'I.R.E.M. de Toulouse. Je remercie les Annales de la Faculté des Sciences de Clermont d'accueillir un article expositif, destiné à des étudiants du 1er et 2ème cycle des universités, mais peut être capable d'intéresser des professionnels non-spécialistes. D'après mon enquête, cette dernière catégorie de mathématiciens semble extrêmement nombreuse; y appartenant, je dois dire que j'ai considéré ces questions pour avoir eu besoin d'un outil analytique pour décrire le convexe aléatoire qu'est l'enveloppe du mouvement brownien plan pendant un intervalle de temps donné.

(on notera l'abus de langage qui appelle "polygône convexe" ce qu'on appellerait "polygone convexe et son intérieur" habituellement.)



Ex. 1.5. C = le triangle de Reuleaux, défini comme l'intersection de trois disques fermés de rayon k et centrés sur les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté k , respectivement :

$$(0,0) , (k,0) \text{ et } \left(\frac{k}{2}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) .$$



Sur cette famille $\mathcal{C}$, on introduit une relation d'équivalence ainsi : si C_1 et C_2 sont dans $\mathcal{C}$ on dit que C_1 et C_2 sont équivalents ($C_1 \sim C_2$) si il existe (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que le translaté de C_1 par (a,b) est $C_2 = C_1 + (a,b)$. Par exemple deux cercles de même rayon sont équivalents, mais deux carrés de même côté ne le seront pas toujours. On note $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} / \sim$ l'ensemble quotient.

Le but de cet article est donc de construire pour tout C de $\mathcal{C}$ une mesure s_C de $\mathcal{M}_0$ telle que $s_{C_1} = s_{C_2}$ si et seulement si $C_1 \sim C_2$, autrement dit une bijection de $\mathcal{M}_0$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$. Cette bijection, pour être intéressante, aura naturellement des propriétés de continuité et de linéarité. Cela nous permettra de suivre une tradi-

tion cartésienne, puisque nous pourrions traduire analytiquement des propriétés géométriques des convexes .

Tout ceci est-il nouveau ? Non certes, mais c'est peu connu : les géomètres différentiels aiment le cas lisse, les géomètres "tout court" aiment le raisonnement géométrique, les analystes numériciens considèrent $\mathbb{R}^d$ autant que $\mathbb{R}^2$. Curieusement, cette mesure -longueur d'arc d'un convexe semble n'être connue que des experts en fonctions entières d'une variable complexe [7] qui ne poussent guère en direction des applications à la géométrie.

Notre travail se partagera en deux moitiés : la construction de la mesure s_C , qui n'est autre dans le cas "lisse" que la mesure "longueur d'arc", et les applications : courbes de largeur constante, inégalité isopérimétrique, inégalité de Brunn-Minkowski , ainsi que l'étude de la condition de convexité

$$1/\rho + (1/\rho)'' \geq 0$$

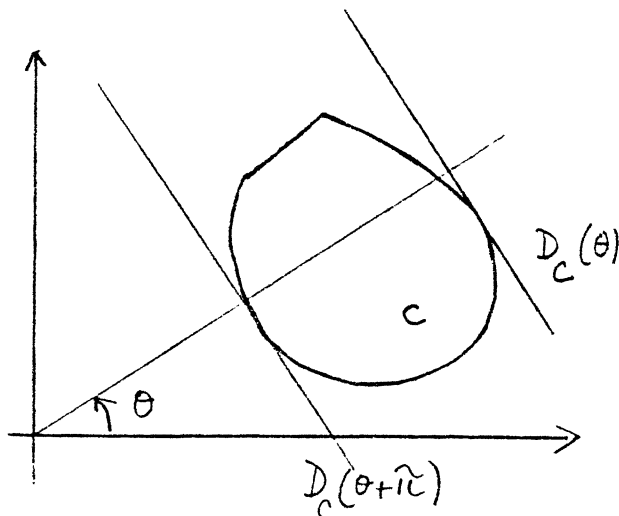
des coordonnées polaires.

§ 2. La fonction support $h_C(\theta)$:

Désormais nous orientons le plan $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels de sorte que $((1,0), (0,1))$ soit une base positive et $\mathbb{R}^2$ sera muni de sa structure euclidienne usuelle. Si C est dans $\mathcal{C}$, sa fonction support h_C est une fonction sur $\mathbb{R}$ de période 2π , définie par

$$h_C(\theta) = \sup_{(x,y) \in C} (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (2.1)$$

Puisque C est compact et que $(x,y) \mapsto x \cos \theta + y \sin \theta$ est continue sur C , l'existence d'au moins un (x_0, y_0) de C tel que $h_C(\theta) = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$ ne fait pas de doute. Notons aussi que $(0,0) \in C$ si et seulement si h_C est une fonction ≥ 0 .



Pour θ dans $\mathbb{R}$, on considère également la droite affine :

$$D_C(\theta) = \{ (x,y) ; x \cos \theta + y \sin \theta = h_C(\theta) \}$$

le demi espace fermé :

$$E_C(\theta) = \{ (x,y) ; x \cos \theta + y \sin \theta \leq h_C(\theta) \}$$

et la face de C :

$$F_C(\theta) = C \cap D_C(\theta)$$

qui n'est pas toujours réduite à un point : pensons au cas d'un polygône (Ex.1.4.). Quand le contexte sera clair, nous oterons l'indice C à h, D, E ou F . Avant d'étudier les exemples du § 1 faisons quelques remarques :

Proposition 2.1 : Si $C \in \mathcal{C}$, alors $C = \bigcap_{\theta} E_C(\theta)$; l'application $C \mapsto h_C$ est injective et :

$$h_{C+(a,b)}(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + h_C(\theta) \quad (2.2)$$

Démonstration : $C_1 = \bigcap_{\theta} E_C(\theta)$ est un convexe qui contient C . Si $(x_0, y_0) \in C_1 \setminus C$, alors on peut trouver θ tel que

$$x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta > h_C(\theta),$$

d'après le théorème de Hahn-Banach, ce qui est une contradiction.

Or la connaissance de h_C donne celle de tous les $E_C(\theta)$; on en conclut que $h_{C_1} = h_{C_2}$ implique $C_1 = C_2$. (2.2) est évident.

Passons les 5 exemples du §1 en revue :

$$1.1 : \quad h_C(\theta) = 0, \quad \forall \theta$$

$$1.2 : \quad h_C(\theta) = \frac{k}{2} \cos(\theta - \alpha) \quad \text{pour } |\theta - \alpha| \leq \pi/2 \\ = -\frac{k}{2} \cos(\theta - \alpha) \quad \text{pour } \frac{\pi}{2} < |\theta - \alpha| \leq \pi$$

et en complétant de sorte que h_C ait la période 2π .

$$1.3 : \quad h_C(\theta) = k \quad \forall \theta$$

1.4 : On fait ici l'hypothèse que tous les $E(\theta_j)$ sont "utiles", c'est-à-dire que

$$\left[\bigcap_{i \neq j} E(\theta_i) \right] \setminus E(\theta_j) = \emptyset \quad \text{pour tout } j=1, \dots, n.$$

Le calcul montre alors que

$$h_C(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)} [p_{j+1} \sin(\theta - \theta_j) + p_j \sin(\theta_{j+1} - \theta)]$$

si $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$ pour $j=1, \dots, n$, en convenant $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$.

$$\begin{aligned} 1.5 : h_C(\theta) &= 1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{3}] , & &= \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) \text{ sur } [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \\ &= 1 + \cos\theta \text{ sur } [\frac{2\pi}{3}, \pi] , & &= 0 \text{ sur } [\pi, \frac{4\pi}{3}] \\ &= 1 + \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) \text{ sur } [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}] , & &= \cos\theta \text{ sur } [\frac{5\pi}{3}, 2\pi] . \end{aligned}$$

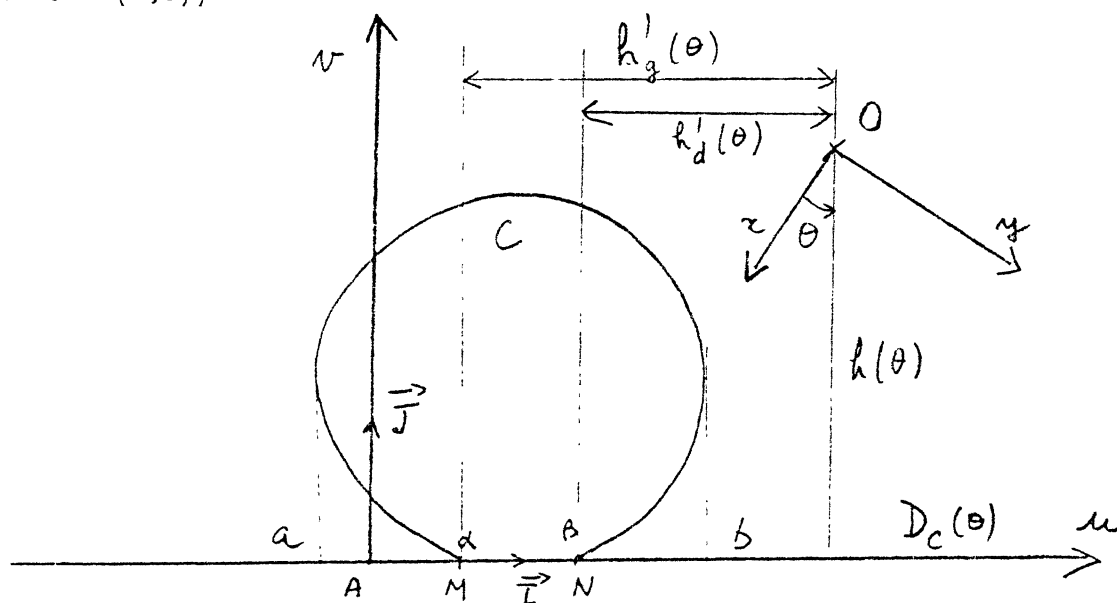
Le théorème suivant est essentiel :

Théorème 2.2. Si $C \in \mathcal{C}$, les dérivées à droite et à gauche h'_d et h'_g de h_C existent partout et sont continues respectivement à droite et à gauche. De plus, si une base positive affine orthogonale $(A, \vec{AI}, \vec{AJ})$ est choisie dans $\mathbb{R}^2$ telle que A et I appartiennent à $D_C(\theta)$, et J à $E_C(\theta)$, alors la face $F_C(\theta) = [MN]$ est définie par :

$$\vec{MO} = h'_g(\theta) \vec{AI} + h(\theta) \vec{AJ}$$

$$\vec{NO} = h'_d(\theta) \vec{AI} + h(\theta) \vec{AJ}$$

(Ici $O = (0,0)$).



Démonstration : Adoptons, pour le temps de la démonstration, la convention suivante : si u et v sont des réels, (u,v) est le point B tel que $AB = u \vec{AI} + v \vec{AJ}$. Considérons alors $[a,b] = \{u ; \exists v \text{ tel que } (u,v) \in C\}$.

Le cas $a=b$ est trivial et correspond au cas où C est un segment orthogonal à $D(\theta)$, cas qui peut facilement s'étudier séparément. Supposons désormais $a < b$.

Si $u \in [a, b]$, définissons les nombres $f(u)$ et $g(u)$ par $[f(u), g(u)] = \{v ; (u, v) \in C\}$. Il est facile de voir que f et g sont des fonctions respectivement convexes et concaves sur $[a, b]$. L'ensemble $\{u ; f(u) = 0\}$ est un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans $[a, b]$ qui est non vide. Dans le nouveau système d'axes, l'origine de $\mathbb{R}^2$ est maintenant $(\gamma, h(\theta))$. L'énoncé du théorème est équivalent à

$$h'_d(\theta) = \gamma - \beta \quad (2.3)$$

$$h'_g(\theta) = \gamma - \alpha \quad (2.4)$$

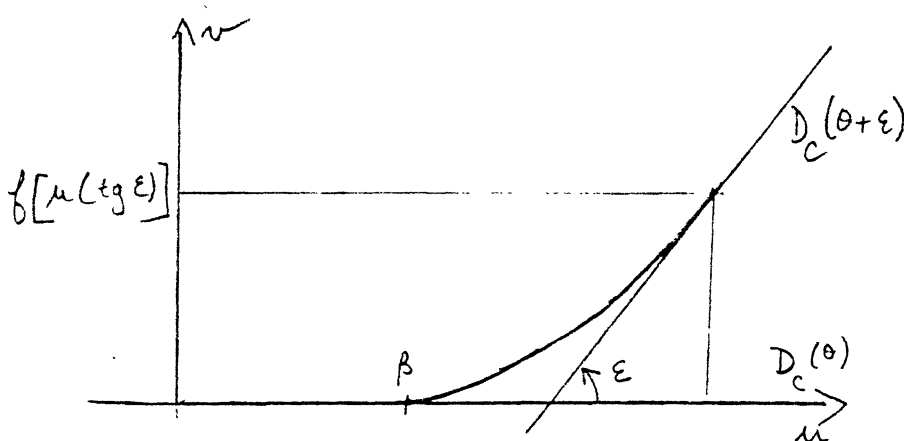
Contentons nous de montrer 2.3, puisque (2.4) est similaire.

En tant que fonction convexe sur $[a, b]$, f a une dérivée à droite f'_d sur $[a, b[$ et à gauche f'_g sur $]a, b]$, continues à droite et à gauche respectivement. De plus $f'_d = f'_g$ sur $]a, b[$ sauf au plus en un nombre dénombrable de points (voir [6] Tome 2 page 136). Prenons maintenant un nombre m dans l'intervalle ouvert

$$] \lim_{u \uparrow a} f'_g(u) , \lim_{u \uparrow b} f'_d(u) [,$$

alors il existe un intervalle $[u(m), u_1(m)]$ tel que

$$u(m) \leq u \leq u_1(m) \quad \text{implique} \quad f'_g(u) \leq m \leq f'_d(u) \quad (2.5)$$



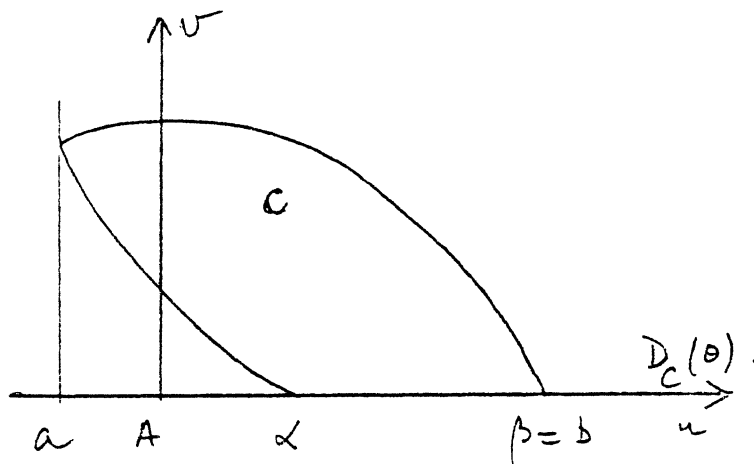
Démontrons maintenant (2.3) sous l'hypothèse $\beta < b$, laquelle implique $\lim_{u \uparrow b} f'_d(u) > 0$. Il existe donc $\epsilon > 0$, assez petit pour que $0 < tg \epsilon < \lim_{u \uparrow b} f'_d(u)$. Observons que le point $(u(tg \epsilon), f[u(tg \epsilon)])$ appartient à $D_c(\theta + \epsilon)$, où $u(tg \epsilon)$ est défini par (2.5). On peut alors écrire la relation entre $u(tg \epsilon)$ et $h(\theta + \epsilon)$ à partir de l'équation de $D_c(\theta + \epsilon)$:

$$[\gamma - u(\operatorname{tg} \varepsilon)] \sin \varepsilon + [h(\theta) - f(u(\operatorname{tg} \varepsilon))] \cos \varepsilon = h(\theta + \varepsilon) \quad (2.6)$$

Il est clair que $u(\operatorname{tg} \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \beta$ et $\frac{f(u(\operatorname{tg} \varepsilon))}{\operatorname{tg} \varepsilon} \leq u(\operatorname{tg} \varepsilon) - \beta$.

Donc $\frac{1}{\varepsilon} f(u(\operatorname{tg} \varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, et d'après (2.6) on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [h_C(\theta + \varepsilon) - h_C(\theta)] = \gamma - \beta, \text{ soit } (2.3).$$



Pour terminer la démonstration, il faut encore considérer le cas $\beta = b$, qui est facile : à partir de l'équation de $D_C(\theta + \varepsilon)$:

$$(\gamma - \beta) \sin \varepsilon + h(\theta) \cos \varepsilon = h(\theta + \varepsilon)$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et (2.3) s'ensuit. $\square$

Le prochain résultat est plus facile à établir, il concerne une sorte de continuité de h_C par rapport à C :

Proposition 2.3. Soient C et $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $\mathcal{C}$ tels que ou bien $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout n , et C est la fermeture de $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, ou bien $C_n \supset C_{n+1}$ pour tout n et $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Alors $(h_{C_n}(\theta))_{n=1}^{\infty}$ est une suite monotone pour tout θ et a pour limite $h_C(\theta)$.

De plus $h'_{C_n, g}(\theta)$ et $h'_{C_n, d}(\theta)$ ont $h'_C(\theta)$ pour limite, pour tout θ tel que $h'_{C, g}(\theta) = h'_{C, d}(\theta)$.

Démonstration : Supposons d'abord $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout n . Alors

$h_{C_n}(\theta) \leq h_{C_{n+1}}(\theta) \leq h_C(\theta)$ découle de la définition (2.1). Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{C_n}(\theta) = \lambda < h_C(\theta)$

il existerait une droite affine D parallèle à $D_C(\theta)$ telle que $D_C(\theta)$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ seraient dans deux demi-plans ouverts disjoints de frontière D , ce qui contredit $C = \text{fermeture de } \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Si maintenant θ est un point d'existence de $h'_C(\theta)$, d'après le théorème 2.2. la face $F_C(\theta)$ est réduite à 1 point M . Notons $F_{C_n}(\theta) = [M_n, N_n]$. Puisque M_n est dans le compact C , soit M_0 dans C et $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite croissante d'entiers telle que $M_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M_0$. Puisque les coordonnées (x_n, y_n) de M_n satisfont :

$$x_n \cos \theta + y_n \sin \theta = h_{C_n}(\theta) ,$$

et puisque $h_{C_n}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_C(\theta)$, on a donc $M_0 \in F_C(\theta)$, ou $M_0 = M$. Ceci implique facilement que $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$ et de même $N_n \rightarrow M$. D'après le théorème 2.2. ,

$h'_{C_n, g}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h'_{C, g}$ et $h'_{C_n, d}(\theta) \rightarrow h'_{C, d}$. La démonstration dans le cas $C_n \supset C_{n+1}$, est tout à fait semblable. $\square$

§3. La mesure-longueur-d'Arc.

Théorème 3.1. Si $C \in \mathcal{C}$, les deux fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$

$$s_g(\theta) = \int_0^{\theta} h(\alpha) d\alpha + h'_g(\theta)$$

$$s_d(\theta) = \int_0^{\theta} h(\alpha) d\alpha + h'_d(\theta)$$

sont non décroissantes, et respectivement continues à gauche et à droite. De plus si $h'(\theta_1)$ et $h'(\theta_2)$ existent et si $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, alors $s_d(\theta_2) - s_d(\theta_1)$ est la longueur de l'arc de la frontière ∂C de C défini par $\bigcup_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} F_C(\theta)$.

Avant de passer à la démonstration - simple, car le travail difficile a été fait en §2 - faisons quelques remarques. Désignons par E l'ensemble des θ tels que $h'_d(\theta) \neq h'_g(\theta)$, c'est-à-dire où $h'(\theta)$ n'existe pas. Alors s_g et s_d coïncident sur le complémentaire de E , qui est leur ensemble de points de discontinuité. Comme une fonction croissante n'a qu'un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité, le théorème implique que E est au plus dénombrable. Il n'était qu'intuitivement évident, mais pas si facile à montrer que : $\{\theta ; F_C(\theta) \text{ n'est pas un point}\}$ est au plus dénombrable.

Notons également que $\theta \longmapsto \int_0^{\theta} h(\alpha) d\alpha$ étant continûment dérivable, on déduit

du théorème 3.1. que h'_g et h'_d sont des fonctions à variation bornée.

Démonstration du théorème 3.1. Le théorème se vérifie directement quand C est un polygone convexe et nous ne le ferons pas. Dans le cas général, on considère une suite $(M_n)_{n=1}^\infty$ dense sur ∂C ; baptisons C_n l'enveloppe convexe de $(M_1, \dots, M_n)$. Il est clair que $C_n \subset C_{n+1}$ et que C est la fermeture de $\bigcup_{n=1}^\infty C_n$. Donc $s_{C_n, g}$ et $s_{C_n, d}$ sont non décroissantes et, d'après la Proposition 2,3, convergent vers $s_{C, g}$ et $s_{C, d}$ sur le complémentaire de E . $s_{C, g}$ et $s_{C, d}$ sont non décroissantes sur le complémentaire de E . Puisqu'elles sont continues à gauche et à droite respectivement, elles sont non décroissantes sur tout $\mathbb{R}$. Quant à l'interprétation géométrique de $s_d(\theta_2) - s_d(\theta_1)$, elle découle de la définition même de la longueur d'un arc comme limite de somme de Riemann, puisque

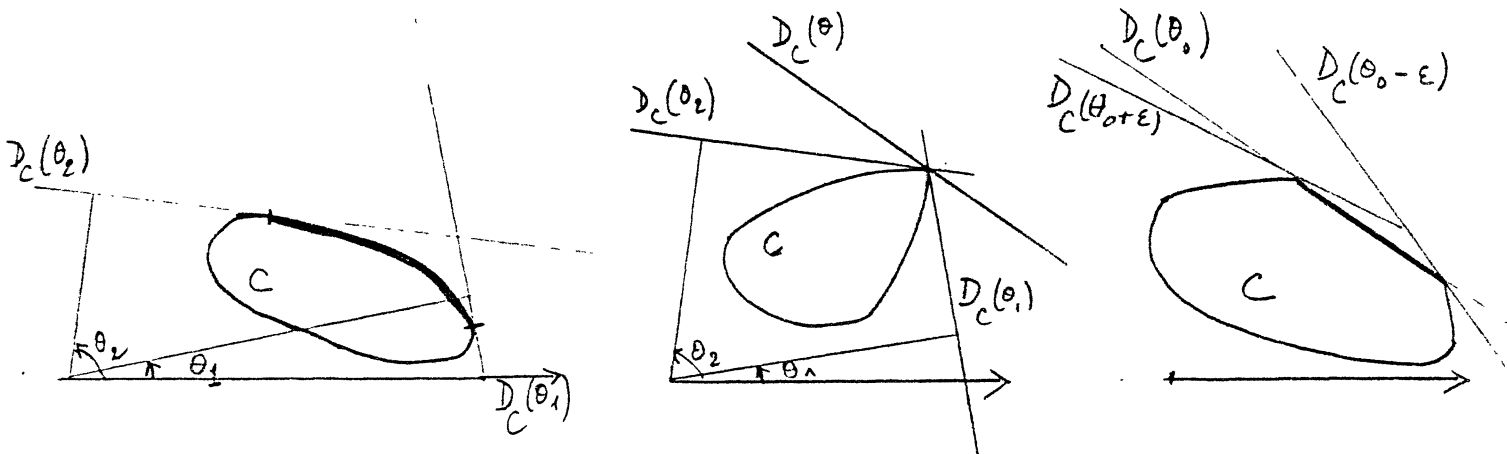
$$s_{C_n, d}(\theta_2) - s_{C_n, d}(\theta_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s_{C, d}(\theta_2) - s_{C, d}(\theta_1) \quad \square$$

Passons alors à la définition la plus importante de l'article :

Si C est dans $\mathcal{C}$, la mesure - longueur-d'arc $s_C(d\theta)$ est la mesure positive sur le cercle $\Gamma = \mathbb{R} / 2\pi \mathbb{Z}$ définie par

$$s_C\{[\theta_1, \theta_2]\} = s_{C, d}(\theta_2) - s_{C, d}(\theta_1)$$

pour θ_1 et θ_2 points de continuité de $s_{C, d}$ et $C \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$.



Avant de travailler les exemples, observons trois faits concernant la mesure longueur d'arc :

1) Tout atome θ de la mesure s_C correspond à une face $F_C(\theta)$ non réduite à un point, et la masse de l'atome est la longueur de $F_C(\theta)$ (Théorème 2.2.).

2) Rappelons qu'on appelle support d'une mesure le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle. Or un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est une réunion au plus, dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints. A chacun de ces intervalles de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de mesure nulle pour s_C - disons $]\theta_1, \theta_2[$ - correspond un point anguleux de C .

3) Convenons de dire que le convexe est lisse si h'_C existe partout et est absolument continue. Dans ce cas :

$$s_C(d\theta) = (h'_C(\theta) + h''_C(\theta))d\theta$$

Etudions maintenant s_C sur les exemples du § 1 :

Exemples :

1. (C est un point) : $s_C(d\theta) = 0$

2. (C est un segment de longueur k et parallèle à la direction α) :

$$s_C(d\theta) = k \delta_\alpha(d\theta) + k \delta_{\alpha+\pi}(d\theta)$$

(ici δ_α est la masse unité sur le point α).

3. (C est un disque de rayon k) $s_C(d\theta) = k d\theta$.

4. (C est un polygone) $s_C(d\theta) = \sum_{j=1}^n m_j \cdot \delta_{\theta_j}(d\theta)$,

où m_j = longueur du côté $F_C(\theta_j)$.

5. (C est le triangle de Reuleaux) $s_C(d\theta) = k \mathbb{1}_A(\theta)d\theta$,

où $A = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

Voici maintenant des propriétés de la mesure-longueur d'arc ; rappelons avant ce qu'est la "somme" de deux convexes : Si C_1 et C_2 sont dans $\mathcal{C}$, si λ_1 et λ_2 sont ≥ 0 , on considère le nouvel élément de :

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \{ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) ; (x_1, y_1) \in C_1 \text{ et } (x_2, y_2) \in C_2 \}$$

On a défini $\mathcal{M}_0$ dans l'introduction comme l'ensemble des mesures $s \geq 0$ sur $\Gamma = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telles que $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} s(d\theta) = 0$

Théorème 3.2.

- 1) $s_C \in \mathcal{M}_0$ pour tout C de $\mathcal{C}$
- 2) $C_1 \sim C_2 \iff s_{C_1} = s_{C_2}$
- 3) $s_{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2} = \lambda_1 s_{C_1} + \lambda_2 s_{C_2}$ si $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$

L'idée de la démonstration est de reconstruire h_C à partir de s_C .

On le fait par le lemme suivant :

Lemme 3.3. Si C est dans $\mathcal{C}$, il existe des nombres a et b tels que

$$h_C(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + \int_{[0, \theta[} \sin(\theta - \alpha) \tilde{s}_C(\alpha) d\alpha \quad \text{pour } \theta \geq 0$$

où $\tilde{s}_C$ est la mesure sur $\mathbb{R}$ (et non sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) définie par

$$\tilde{s}_C[\theta_1, \theta_2] = s_{C,d}(\theta_2) - s_{C,d}(\theta_1)$$

pour tous points de continuité de $s_{C,d}$.

Ce lemme est évident dans le cas lisse de la remarque 3, il suffit de résoudre l'équation différentielle en h : $h'' + h = \rho$ si $\rho(\theta)d\theta = s(d\theta)$. Le cas général est plus délicat :

Démonstration du lemme 3.3. Ici encore, le lemme se montre directement quand C est un polygone convexe, et nous n'allons pas le faire. Dans le cas général, on approche C par une suite croissante de polygones convexes comme dans la démonstration du théorème 3.1. Posons pour simplifier $h_{C_n} = h_n$, $h_C = h$, $\tilde{s}_{C_n} = \tilde{s}_n$ etc... on a donc :

$h_n(\theta) \uparrow h(\theta)$ pour tout θ et $h'_{n,g}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h'_g(\theta)$ pour tout point de continuité de s_g . Donc, par convergence monotone $\int_0^\theta h_n(\alpha) d\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\theta h(\alpha) d\alpha$ pour tout $\theta > 0$,

et $s_{n,g}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s_g(\theta)$ pour tout point de continuité de s_g . Donc la suite des mesures $(\tilde{s}_n)_{n=1}^\infty$ (non bornées...) converge vaguement vers $\tilde{s}$. Maintenant, pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}$ notons par μ^* sa restriction à $]0, +\infty[$; alors $(s_n)^*$ converge vaguement vers $\tilde{s}^*$ mais la restriction de $\tilde{s}_n$ à $[0, +\infty)$ ne converge pas nécessairement (car $[0, +\infty)$ n'est pas ouvert). Cependant, il existe une sous suite croissante $(n_k)_{k=1}^\infty$ d'entiers et une mesure ν sur $[0, +\infty[$ telles que la restriction de $\tilde{s}_{n_k}$ à $[0, +\infty[$ converge vaguement vers ν ; on obtient également $(\tilde{s}_{n_k})^* \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \nu^* = (s^*)^*$.

Prenons maintenant $\theta > 0$, et la fonction $f_\theta(\alpha)$ sur $[0, +\infty[$ définie par

$$\begin{aligned} f_\theta(\alpha) &= \sin(\theta - \alpha) & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \theta \\ &= 0 & \text{si } \theta < \alpha \end{aligned}$$

Donc, puisque f_θ est continue à support compact sur $[0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \int_{[0, \theta]} \sin(\theta - \alpha) \tilde{s}_{n_k}(\alpha) d\alpha &= \int_0^\infty f_\theta(\alpha) d_{n_k}(\alpha) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_\theta(\alpha) \nu(d\alpha) \\ &= \int_{[0, \theta]} \sin(\theta - \alpha) \tilde{s}(d\alpha) + (\nu(\{0\}) - \tilde{s}(\{0\})) \sin \theta. \end{aligned}$$

Introduisons alors les réels a_n et b_n tels que

$$h_n(\theta) = a_n \cos \theta + b_n \sin \theta + \int_{[0, \theta]} \sin(\theta - \alpha) \tilde{s}_n(d\alpha) .$$

sont bornées, on peut extraire une nouvelle suite de $(n_k)_{k=1}^\infty$ disons $(m_k)_{k=1}^\infty$, telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{m_k}$ existent. Donc il existe bien deux nombres a et b tels que

$$a \cos \theta + b \sin \theta + \int_{[0, \theta]} \sin(\theta - \alpha) \tilde{s}(d\alpha) = h(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{m_k}(\theta) \quad \square$$

Démonstration du Théorème 3.2 :

1) D'après le lemme 3.3, pour $\theta \geq 0$:

$$0 = h_C(\theta + 2\pi) - h_C(\theta) = \int_{[\theta, \theta + 2\pi]} \sin(\theta - \alpha) \tilde{s}_C(d\alpha) .$$

Puisque $\int_{[\theta, \theta + 2\pi]} e^{i\alpha} \tilde{s}_C(d\alpha) = \int_0^{2\pi} e^{i\alpha} s_C(d\alpha)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin \theta \int_0^{2\pi} \cos \alpha s_C(d\alpha) + \cos \theta \int_0^{2\pi} \sin \alpha s_C(d\alpha) &= 0 \quad \text{pour tout } \theta \geq 0, \text{ et donc} \\ \int_0^{2\pi} e^{i\alpha} s_C(d\alpha) &= 0 . \end{aligned}$$

2) Le $\Rightarrow$ est évident à partir de la définition de s_C et de la proposition 2.1. Le $\Leftarrow$ vient du lemme 3.3.

3) $s_{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2} = \lambda_1 s_{C_1} + \lambda_2 s_{C_2}$ se vérifie directement quand C_1 et C_2 sont des polygones convexes. Dans le cas général, on approche C_1 et C_2 par des suites croissantes de polygones convexes $C_1^{(n)}$ et $C_2^{(n)}$. Comme $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ est la fermeture de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_1 C_1^{(n)} + \lambda_2 C_2^{(n)}$, la proposition 2.3. donne le résultat. $\square$

§4. Le cône convexe $\mathcal{M}_0$.

On a vu au théorème 3.2. que $C \mapsto s_C$ définissait une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{M}_0$, et même une application injective de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{M}_0$. Nous allons montrer au § 5 que cette application est une bijection. Pour cela, nous avons besoin de quelques propriétés supplémentaires de $\mathcal{M}_0$; elles nécessitent d'abord quelques définitions.

Si s est une mesure positive sur $\Gamma = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\delta_\pi * s$ est la mesure définie par

$$s(A+\pi) = (\delta_\pi * s)(A) \quad , \quad \text{pour } A \subset \Gamma .$$

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des mesures s sur Γ positives et symétriques, c'est-à-dire telles que $s = \delta_\pi * s$. Il est clair que $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_0$. Par exemple, si C est un segment de longueur k et de direction α , alors

$$s_C = k \delta_\alpha + k \delta_{\alpha+\pi}$$

est dans $\mathcal{S}$. On note par $\mathcal{D}$ l'ensemble des mesures de ce type (c'est-à-dire issues de segments de droite).

$\mathcal{A}$ est l'ensemble des mesures s sur Γ positives et antisymétriques, c'est-à-dire telle que s et $\delta_\pi * s$ soient mutuellement singulières, et on pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_0$. Par exemple, si C est un triangle dont les côtés ont pour directions θ_1, θ_2 et θ_3 (avec $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$, $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi$ pour $j=1,2,3$, et la convention $\theta_4 = \theta_1 + 2\pi$), alors

$$s_C = p_1 \delta_{\theta_1} + p_2 \delta_{\theta_2} + p_3 \delta_{\theta_3}$$

et on a $s_C \in \mathcal{A}_0$. On note par $\mathcal{E}$ l'ensemble des mesures de ce type (c'est-à-dire issues de triangles).

Théorème 4.1. Pour tout s de $\mathcal{M}_0$, il existe un couple unique (p,a) dans $\mathcal{S} \times \mathcal{A}_0$ tel que $s = p+a$. De plus $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ est l'ensemble des génératrices extrémales du cône convexe $\mathcal{M}_0$.

A noter que $\mathcal{A}_0$ n'est pas un cône convexe : si $s_1 = \delta_0 + \delta_{\frac{2\pi}{3}} + \delta_{\frac{4\pi}{3}}$ et $s_2 = \delta_{\frac{\pi}{3}} + \delta_{\pi} + \delta_{\frac{5\pi}{3}}$ sont les mesures-longueur d'arc de 2 triangles équilatéraux de côté 1, alors $s_1 + s_2$ est la mesure longueur d'arc d'un hexagone régulier et est dans $\mathcal{S}$, et non dans $\mathcal{A}_0$.

Démonstration du théorème 4.1. Pour voir l'unicité de la décomposition $\mathcal{M}_0 = \mathcal{S} + \mathcal{A}_0$, supposons $p+a = p'+a'$ avec p et p' dans $\mathcal{S}$ et a et a' dans $\mathcal{A}_0$. Alors :

$$a' - a = p - p' = \delta_{\pi*}(p-p') = \delta_{\pi*}(a'-a) ,$$

et

$$a - \delta_{\pi*} a = a' - \delta_{\pi*} a' ,$$

ce qui implique $a = a'$, et donc $p = p'$.

Pour montrer l'existence, on prend s dans $\mathcal{M}_0$, et la décomposition de Jordan de la mesure signée suivante :

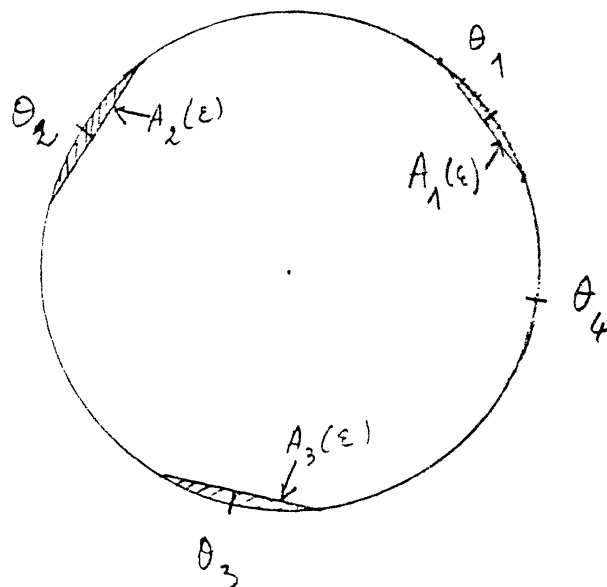
$$s - \delta_{\pi*} s = (s - \delta_{\pi*} s)^+ - (s - \delta_{\pi*} s)^- .$$

Donc $a = (s - \delta_{\pi*} s)^+$ est tel que $\delta_{\pi*} a = (s - \delta_{\pi*} s)^-$ et donc a est dans $\mathcal{A}_0$.

Prenons $p = s-a$, on obtient $\delta_{\pi*} p = p$, donc $p \in \mathcal{S}$ et $a \in \mathcal{A}_0$.

A partir du résultat précédent, si $s \neq 0$ est sur une génératrice extrême de $\mathcal{M}_0$, alors s est dans $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}_0$. Si s est dans $\mathcal{S}$, il est assez évident qu'alors s est dans $\mathcal{D}$, et nous ne détaillons pas ce point.

Supposons maintenant que s soit sur une génératrice extrême et que $s \in \mathcal{A}_0$. Montrons que s est dans $\mathcal{C}$. En effet, si s n'est pas dans $\mathcal{C}$, alors le support de s contient au moins 4 points $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$, tels que $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi$, avec $j=1,2,3,4$ et la convention $\theta_5 = \theta_1 + 2\pi$. (si ces inégalités ne pouvaient pas être vérifiées, alors le support de s serait contenu dans un arc de longueur $< \pi$ et l'appartenance à $\mathcal{M}_0$ serait impossible). Maintenant, ou bien $\theta_3 - \theta_1 < \pi$, et $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ est le support d'une mesure de $\mathcal{C}$, ou bien $\theta_3 - \theta_1 > \pi$, et $\{\theta_1, \theta_3, \theta_4\}$ est le support d'une mesure de $\mathcal{C}$, ou bien $\theta_3 - \theta_1 = \pi$. Dans ce dernier cas θ_3 et θ_1 ne sont pas des points isolés du support de s , puisque s est dans $\mathcal{A}_0$. Il est donc possible de modifier légèrement θ_1 et θ_3 tel que $\theta_3 - \theta_1 \neq \pi$, en gardant les autres inégalités strictes.



Sans perte de généralité, on suppose donc que $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ est le support d'une mesure de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que 0 appartient à l'intérieur du convexe de nombres complexes engendré par $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}$. Choisissons ε assez petit pour que $\varepsilon < \theta_{j+1} - \theta_j$ pour $j = 1, 2, 3$, et tel que si $A_j(\varepsilon)$ est l'enveloppe de l'ensemble de complexes $e^{i\theta}$, avec $\theta_j - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_j + \varepsilon$, alors 0 est intérieur à l'enveloppe convexe de z_1, z_2, z_3 pour tout choix des z_j dans $A_j(\varepsilon)$, $j=1,2,3$. Définissons alors s_j comme la restriction de s à $[\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon]$; puisque θ_j est dans le support de s , s_j n'est pas nul, et $\|s_j\|$ est sa masse. Donc pour $j=1,2,3$:

$$z_j = \frac{1}{\|s_j\|} \int_{\theta_j - \varepsilon}^{\theta_j + \varepsilon} e^{i\theta} s_j(d\theta) \in A_j(\varepsilon)$$

et on peut trouver $p_1, p_2, p_3 > 0$ tels que

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 = 0 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Définissons enfin la mesure $s' = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j}{\|s_j\|} s_j$,

alors $s' \in \mathcal{M}_0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $s - \lambda s'$ soit positive et non proportionnelle à s (puisque $s'([\theta_4 - \varepsilon, \theta_4 + \varepsilon]) = 0$; s n'est donc pas sur une génératrice extrême).

§5. L'isomorphisme entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}_0$:

Au vu du théorème 3.2, la seule chose délicate qui reste à prouver est :

Théorème 5.1 : Pour tout s de $\mathcal{M}_0$, il existe C dans $\mathcal{G}$ tel que $s = s_C$;

Démonstration : Soit s dans $\mathcal{M}_0$. Définissons

$$h(\theta) = \int_{[0, \theta[} \sin(\theta - \alpha) s(d\alpha) \quad \text{pour } \theta \geq 0$$

$$E(\theta) = \{ (x, y) ; \quad x \cos \theta + y \sin \theta \leq h(\theta) \} .$$

$$C = \bigcap_{\theta \geq 0} E(\theta)$$

Ce C est fermé et convexe. Nous avons à montrer qu'il est compact non vide et que $h = h_C$. Pour cela, nous allons procéder par approximation.

Considérons un entier $n \geq 0$, des nombres $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, avec la convention $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$, tels que $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi$ pour $j=1, \dots, n$, le convexe K contenant C :

$$K = \bigcup_{j=1}^n E(\theta_j)$$

et la fonction $k(\theta)$ de période 2π définie par

$$k(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)} [h(\theta_{j+1}) \sin(\theta - \theta_j) + h(\theta_j) \sin(\theta_{j+1} - \theta)]$$

sur $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$. On veut montrer que $h_K = k$.

Si $\theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}]$, il est clair que

$\sup \{x \cos \theta + y \sin \theta ; (x, y) \in E(\theta_j) \cap E(\theta_{j+1})\} = k(\theta)$, puisque $0 < \theta_{j+1} - \theta_j < \pi$. Ceci montre que $h_K(\theta) \leq k(\theta)$ pour tout θ et que K et C sont compacts.

Introduisons la frontière $D(\theta_j)$ de $E(\theta_j)$ et le point $A_j = D(\theta_j) \cap D(\theta_{j+1})$ (qui existe, puisque $0 < \theta_{j+1} - \theta_j < \pi$). Pour voir que $h_K = k$, la seule chose à montrer est que $A_j \in E(\theta_i)$ pour tous i et j dans $1, 2, \dots, n$. Si on calcule les coordonnées de A_j , on voit que $A_j \in E(\theta_i)$ si et seulement si

$$-h(\theta_j) \sin(\theta_{j+1} - \theta_i) + h(\theta_i) \sin(\theta_{j+1} - \theta_j) - h(\theta_{j+1}) \sin(\theta_i - \theta_j) \geq 0.$$

Considérant alors le vecteur $V_j = (h(\theta_j), \cos \theta_j, \sin \theta_j)$ dans $\mathbb{R}^3$, l'inégalité précédente n'est autre que

$$\text{Déterminant } [V_j, V_{j+1}, V_i] \geq 0$$

Or ce déterminant est linéaire en h , c'est-à-dire que $s \mapsto \text{Det } [V_j, V_{j+1}, V_i]$ est linéaire sur le cône convexe $\mathcal{M}_0$! Pour la montrer il suffit de la vérifier quand s appartient aux génératrices extrémales de $\mathcal{M}_0$, c'est-à-dire d'après le théorème 4.1, à $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$. Cette vérification si $s \in \mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ se fait facilement ; $k = h_K$ est montré, et on peut écrire, pour $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$

$$h_K(\theta) = \int_{[0, \theta_j]} \sin(\theta - \alpha) s(d\alpha) + \frac{\sin(\theta - \theta_j)}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \sin(\theta_{j+1} - \alpha) s(d\alpha).$$

Pour terminer la démonstration, on définit $\theta_{k,n} = 2\pi(k-1)2^{-n}$, avec $k=1, 2, \dots, n$ et le convexe :

$$K_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} E(\theta_{n,k})$$

D'après le calcul précédent, pour $\theta_{k,n} \leq \theta \leq \theta_{k+1,n}$:

$$\left| h_{K_n}(\theta) - \int_0^{\theta_{k,n}} \sin(\theta-\alpha) s(d\alpha) \right| \leq \frac{2\pi}{2^n} s([\theta_{k,n}, \theta_{k+1,n}])$$

et donc $h_{K_n}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(\theta)$. Puisque d'après la Proposition 2.3 on avait

$h_{K_n}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_C(\theta)$, le théorème est montré. $\square$

Le théorème principal de l'article est maintenant un simple corollaire ; il est assez évident que si $C_1 \sim C'_1$ et $C_2 \sim C'_2$ alors $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \sim \lambda_1 C'_1 + \lambda_2 C'_2$ pour λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$. Donc $\tilde{\mathcal{C}}$ est un cône convexe, comme $\mathcal{M}_0$.

Plus précisément :

Théorème 5.2. : L'application $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} s_{\tilde{\mathcal{C}}}$ est un isomorphisme des cônes convexes $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{M}_0$.

Démonstration : Linéarité et injectivité découlent du théorème 3.2., surjectivité du théorème 5.1. $\square$

§6. Décomposition des Convexes

Le reste de l'article est consacré à des applications plus ou moins élaborées des théorèmes précédents.

Donnons en tout de suite une :

C dans $\mathcal{C}$ est dit indécomposable si $C = C_1 + C_2$, avec C_1 et C_2 dans $\mathcal{C}$ implique l'existence de λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$ tels que $C_1 \sim \lambda_1 C$ et $C_2 \sim \lambda_2 C$.

Théorème 6.1. [4] Les seuls convexes compacts non vides indécomposables de $\mathbb{R}^2$ sont les points, les segments et les triangles.

Démonstration : D'après les théorèmes 3.2 et 5.1, C est indécomposable si et seulement si $C = C_1 + C_2$ implique l'existence de λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$ tels que $s_{C_1} = \lambda_1 s_C$ et $s_{C_2} = \lambda_2 s_C$. D'après le théorème 4.1 ou bien $s_C = 0$ (C est un point), ou bien $s_C \in \mathcal{D}^2$ (C est un segment), ou bien $s_C \in \mathcal{C}$ (C est un triangle). $\square$

§7 - Aire et périmètre d'un convexe compact

Soit C dans $\mathcal{C}$; d'après la définition de la mesure longueur d'arc, le périmètre $P(C)$ de C est

$$P(C) = \int_0^{2\pi} s_C(d\theta) \quad (7.1)$$

On pourrait facilement montrer également que

$$P(C) = \int_0^{2\pi} h_C(\theta) d\theta : \quad (7.2)$$

le principe de la démonstration étant dans le cas lisse (c'est-à-dire h absolument

continue, et $s_C(d\theta) = (h(\theta) + h''(\theta))d\theta$:

$$\begin{aligned} P(C) &= \int_0^{2\pi} (h(\theta) + h''(\theta))d\theta = \int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta + \left[h'(\theta) \right]_0^{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta \quad \text{puisque } h' \text{ est p\'eriodique.} \end{aligned}$$

Passons \`a l'aire $A(C)$ de C . Supposons celle-ci d\'efinie quand C est un polyg\one convexe. Il est facile de v\'erifier la formule

$$A(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_C(\theta) s_C(d\theta) \quad , \quad (7.3)$$

qui n'est rien d'autre que la somme des aires des triangles engendr\'es par les c\otets de C et $(0,0)$, si on suppose celui-ci dans C (Cette derni\ere condition n'est pas importante : il est clair que puisque $s_C \in \mathcal{M}_0$, le second membre de 7.3 d\'epend seulement de la classe $\tilde{C}$ de C).

Pour un C quelconque dans $\mathcal{C}$, on consid\ere une suite $(C_n)_{n=1}^\infty$ croissante de polyg\ones convexes telle que C soit la fermeture de $\bigcup_{n=1}^\infty C_n$ et nous d\'efinissons $A(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(C_n)$. Puisque d'apr\es la proposition 2.3 nous avons $h_{C_n} \uparrow h_C$ et $s_{C_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s_C$ faiblement, nous pouvons \ecrire :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_C(\theta) s_C(d\theta) - A(C_n) = I_n + J_n \quad ,$$

$$\text{o\`u} \quad I_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_C(\theta) (s_C(d\theta) - s_{C_n}(d\theta))$$

$$\text{et} \quad J_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_C(\theta) - h_{C_n}(\theta)) s_{C_n}(\theta)$$

Donc $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ puisque $s_{C_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s_C$ faiblement. De plus il existe M tel que $s_{C_n} \{ [0, 2\pi] \} \leq M$ et d'apr\es le th\'eor\eme d'Ascoli $h_{C_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h_C$ uniform\'ement.

Donc

$$J_n \leq \frac{M}{2} \sup_{\theta} (h_C(\theta) - h_{C_n}(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Donc la formule 7.3 est vraie pour tout C de $\mathcal{C}$, (ce qui montre que $A(C)$ ne d\'epend pas de la suite $(C_n)_{n=1}^\infty$ particuli\ere choisie).

Pour \enoncer le prochain th\'eor\eme, introduisons les coefficients de Fourier pour h_C et s_C quand $C \in \mathcal{C}$:

$$\hat{h}_C(n) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} h_C(\theta) d\theta \quad (7.4)$$

$$\hat{s}_C(n) = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} s_C(d\theta) \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z} \quad (7.5)$$

Naturellement $\hat{s}_C(\theta)$ est le périmètre $P(C)$, et $\hat{s}_C(1) = \hat{s}_C(-1) = 0$ car $s_C \in \mathcal{M}_0$.
(7.4) et (7.5) sont liés par :

Lemme 7.1. Si C est dans $\mathcal{C}$, alors

$$\hat{s}_C(n) = (1-n^2)\hat{h}_C(n) \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z}.$$

Démonstration : Rappelons que

$$\begin{aligned} s_g(\theta) &= \int_0^\theta h(\alpha) d\alpha + h'_g(\theta) \quad \text{par définition. Donc} \\ \int_0^{2\pi} e^{in\theta} s_C(d\theta) &= [e^{in\theta} s_g(\theta)]_0^{2\pi} - in \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \left[\int_0^\theta h(\alpha) d\alpha + h'_g(\theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} h(\alpha) d\alpha - in \int_0^{2\pi} h(\alpha) d\alpha \int_\alpha^{2\pi} e^{in\theta} d\theta - in \int_0^{2\pi} e^{in\theta} h'_g(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} h(\alpha) d\alpha - \int_0^{2\pi} h(\alpha) (1-e^{in\alpha}) d\alpha - in [e^{in\theta} h'_g(\theta)]_0^{2\pi} - n^2 \int_0^{2\pi} e^{in\theta} h(\theta) d\theta \\ &= \hat{h}(n)(1-n^2). \quad \square \end{aligned}$$

Voici maintenant quelques formules pour $A(C)$ qui sont bien connues dans le cas lisse :

Théorème 7.2. Si C est dans $\mathcal{C}$, alors $A(C)$ est égal à

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_C(\theta) s_C(d\theta) \quad (7.6)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_C^2(\theta) - h_{C,d}^2(\theta)) d\theta \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin|\theta-\alpha| s_C(d\theta) s_C(d\alpha) \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{|\hat{s}_C(n)|^2}{1-n^2} \quad (7.9)$$

Démonstration . (7.6) est (7.3), déjà montré. (7.7) se montre par intégration par parties, comme dans la démonstration du lemme 7.1 :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta) s(d\theta) = \left[\frac{1}{2} h(\theta) \left(\int_0^\theta h(\alpha) d\alpha + h'_d(\theta) \right) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h'_d(\theta) \left(\int_0^\theta h(\alpha) d\alpha + h'_d(\theta) \right) d\theta,$$

et nous ne poursuivons pas les détails.

(7.8) s'obtient en combinant le lemme 3.3 et 7.6 :

$$A(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos \theta + b \sin \theta + \int_{[0, \theta[} \sin(\theta - \alpha) s_C(d\alpha) s_C(d\theta).$$

Enfin (7.9) se montre en utilisant $\hat{h}'_d(n) = -in \hat{h}(n)$,
et l'égalité de Parseval

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h^2(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_n |\hat{h}(n)|^2 \\ \int_0^{2\pi} h_d'^2(\theta) d\theta &= -\frac{1}{2\pi} \sum_n |\hat{h}(n)|^2 n^2 \end{aligned} \quad \square$$

Nous allons donner trois corollaires extrêmement intéressants.

Corollaire 7.3. (Inégalité isopérimétrique)

Si C est dans $\mathcal{C}$, d'aire $A(C)$ et de périmètre $P(C)$ alors

$$4\pi A(C) \leq P^2(C) , \quad (7.10)$$

L'égalité n'est réalisée que si C est un cercle.

Démonstration : $P(C) = \hat{s}_C(0)$, et d'après (7.9) , puisque $\frac{1}{1-n^2} < 0$ pour $|n| \geq 2$,
on a

$$A(C) \leq \frac{1}{4\pi} \hat{s}_C^2(0) . \text{ L'égalité implique } \hat{s}_C(n) = 0$$

pour tout $n \neq 0$, ce qui entraîne que $s_C(d\theta) = P(C)d\theta$ (par l'unicité de la transformée d'une mesure) ce qui d'après le théorème 3.2 entraîne que C est un cercle $\square$.

Corollaire 7.4. (Inégalité de Brunn-Minkowski)

Si C et C_1 sont dans $\mathcal{C}$, et λ dans $]0, 1[$, alors

$$\sqrt{A(\lambda C + (1-\lambda)C_1)} \geq \lambda \sqrt{A(C)} + (1-\lambda) \sqrt{A(C_1)} , \quad (7.11)$$

et l'égalité a lieu pour un λ dans $]0, 1[$ si et seulement si ou bien C est un point ou bien il existe $k \geq 0$ tel que $C \sim kC$.

Démonstration : Notons $s = s_C$, $\sigma = s_{C^*}$. L'énoncé équivaut à montrer que $-\sqrt{A(s)}$ est une fonction convexe sur $\mathcal{M}_0$, avec

$$A(s) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{|\hat{s}(n)|^2}{1-n^2}$$

Pour simplifier, adoptons les notations suivantes

$$\langle s, \sigma \rangle = \sum_{|n| \geq 2} \frac{\hat{s}(n) \overline{\hat{\sigma}(n)}}{n^2 - 1}, \quad p(s) = \sqrt{\langle s, s \rangle}.$$

Notons qu'alors

$$4\pi A(s) = \hat{s}(0)^2 - p^2(s) \geq 0 \quad (7.12)$$

Donc, d'après l'inégalité de Schwarz, il existe θ dans $[0, \pi]$ tel que

$$\langle s, \sigma \rangle + \langle \sigma, s \rangle = 2 p(s) p(\sigma) \cos \theta.$$

Par conséquent l'inégalité demandée (7.11) est équivalente à

$$\hat{s}(0) \hat{\sigma}(0) - p(s) p(\sigma) \cos \theta \geq \sqrt{(\hat{s}(0)^2 - p^2(s))(\hat{\sigma}(0)^2 - p^2(\sigma))},$$

laquelle est à son tour équivalente à :

$$[\hat{s}(0)p(\sigma) - \hat{\sigma}(0)p(s)]^2 + 4p(s)p(\sigma) \sin^2 \frac{\theta}{2} [\hat{s}(0)\hat{\sigma}(0) - p(s)p(\sigma) \cos^2 \frac{\theta}{2}] \geq 0$$

qui est vraie d'après (7.12). Le cas de l'égalité est facile à étudier et fournit ou bien $s=0$, ou bien l'existence d'un $k \geq 0$ tel que $\sigma = ks$. $\square$

Corollaire 7.5. Symétrisation d'un convexe.

Si C est dans $\mathcal{G}$ et si $C^* = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2}(-C)$ est sa symétrisation, alors $A(C) \leq A(C^*)$ et l'égalité implique $C \sim C^*$.

Démonstration : $\hat{s}_{C^*}(n) = \hat{s}_C(n) \left(\frac{1+(-1)^n}{2} \right)$.

Donc, d'après (7.9) :

$$A(C) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{|\hat{s}_C(n)|^2}{1-n^2} \leq \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{|\hat{s}_C(2p)|^2}{1-4p^2} = A(C^*)$$

Si $A(C) = A(C^*)$, on obtient $\hat{s}_C(2p+1) = 0$ pour tout p de $\mathbb{Z}$, et donc $s_C = s_{C^*}$, ou $C \sim C^*$ d'après le théorème 3.2. $\square$

§ 8. Ensembles convexes symétriques.

Un C de $\mathcal{C}$ sera dit symétrique si $C \sim -C$, et symétrique par rapport à $(0,0)$ si $C = -C$. Il est clair que C est symétrique si et seulement si $s_C = s_{-C} = \delta_\pi * s_C$, c'est-à-dire si $s_C \in \mathcal{S}$ (notations vues au §4) et si et seulement si $C = C^*$ (notation du corollaire 7.5). Notez également que si s est dans $\mathcal{S}$, sa restriction $\tilde{s}$ à $[0, \pi[$ caractérise s , et qu'inversement si μ est une mesure bornée positive sur $[0, \pi[$, identifié au groupe $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, il existe une mesure s de $\mathcal{S}$ tel que $\tilde{s} = \mu$. Donc $s \longmapsto \tilde{s}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur l'ensemble des mesures positives sur le groupe compact $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

Nous allons montrer dans le prochain théorème qu'il existe une bijection naturelle entre $\mathcal{S}$ et l'ensemble des semi-normes sur $\mathbb{R}^2$.

Une semi-norme sur $\mathbb{R}^2$ est une application $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$ telle que

$$1) p(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| p(x, y)$$

$$2) p(x+x_1, y+y_1) \leq p(x, y) + p(x_1, y_1) \text{ pour tous } x, y, x_1, y_1 \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Il est clair que pour une semi norme p , on a

$$p(x, y) \leq |x| p(1, 0) + |y| p(0, 1) ,$$

et

$$|p(x+x_1, y+y_1) - p(x_1, y_1)| \leq p(x, y) .$$

Donc p est continue, et

$$B_p = \{ (x, y) ; p(x, y) < 1 \}$$

est un ensemble convexe symétrique ouvert. B_p est non vide car $p(0,0) < 1$,

et B_p n'est peut être pas bornée : B_p peut être une bande (par exemple si $p(x, y) = |x|$) ou même $\mathbb{R}^2$ (si $p(x, y) \equiv 0$).

Introduisons alors le convexe dual C_p de B_p , défini par

$$C_p = \{ (x, y) ; \quad xx_1 + yy_1 \leq 1 \text{ pour tous } (x_1, y_1) \text{ de } B_p \} .$$

Il est clair que $C_p \in \mathcal{C}$ et que C_p est symétrique par rapport à $(0,0)$. Nous avons également :

$$p(\cos\theta, \sin\theta) = h_{C_p}(\theta) \tag{8.1}$$

Théorème 8.1. Soit $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$. Alors p est une semi-norme si et seulement si il existe une mesure positive μ_p sur le groupe $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ telle que

$$p(x, y) = \int_0^\pi |x \sin\theta - y \cos\theta| \mu_p(d\theta) \tag{8.2}$$

Cette mesure est unique et $\mu_p = \frac{1}{2} \tilde{s}_{C_p}$.

Démonstration : Il est clair que si il existe μ_p tel que (8.2) soit vrai, p est une semi-norme. Pour voir l'unicité de μ_p , considérons $f(\alpha) = |\sin \alpha|$ (qui est bien de période π et observons que (8.2) implique

$$p(\cos \theta, \sin \theta) = (f * \mu_p)(\theta) \quad (8.3)$$

où la convolution est prise sur le groupe $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

Puisque

$$\hat{f}(n) = \int_0^\pi |\sin \alpha| e^{2in\alpha} d\alpha = \frac{2}{1-4n^2}$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, n est jamais nul, on déduit de (8.3) que

$$\int_0^\pi e^{2in\alpha} \mu_p(d\alpha) = \frac{1}{\hat{f}(n)} \int_0^\pi e^{2in\theta} p(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

pour tout n de $\mathbb{Z}$, ce qui montre l'unicité de μ_p .

Inversement si p est une semi-norme, pour montrer que μ_p existe et est égale à $\frac{1}{2} \tilde{s}_{C_p}$, on considère la fonction suivante de période π :

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi |\sin(\alpha-\theta)| s_{C_p}(d\alpha) = \frac{1}{2} (f * \tilde{s}_{C_p})(\theta) ,$$

où la convolution est dans le groupe $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$; nous avons alors à montrer que

$$p(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{2} (f * \tilde{s}_{C_p})(\theta)$$

Observons que, pour $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\int_0^\pi \sin(\alpha-\theta) s_{C_p}(d\alpha) = \int_\pi^{2\pi} \sin(\theta-\alpha) s_{C_p}(d\alpha) + \int_{2\pi}^{2\pi+\theta} \sin(\theta-\alpha) s_{C_p}(d\alpha) ,$$

puisque $s_{C_p} \in \mathcal{M}_0$; donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f * \tilde{s}_{C_p})(\theta) &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \sin(\theta-\alpha) s_{C_p}(d\alpha) + \frac{1}{2} \int_\theta^\pi \sin(\alpha-\theta) s_{C_p}(d\alpha) \\ &= \int_0^\theta \sin(\theta-\alpha) s_{C_p}(d\alpha) + \frac{1}{2} \int_\pi^{2\pi} \sin(\theta-\alpha) s_{C_p}(d\alpha) . \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme (3.2) il existe des constantes A et B telles que

$$\frac{1}{2} (f * \tilde{s}_{C_p})(\theta) - h_{C_p}(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta . \quad (8.5)$$

Puisque le premier membre de (8.5) est de période π , on a $A = B = 0$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Ce théorème est l'arme absolue pour démontrer le résultat suivant, dû à T.O. FERGUSON [2] : si p est une semi-norme sur $\mathbb{R}^2$, alors il existe une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$e^{-p(s,t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx+isy} \nu(dx,dy)$$

En effet, on définit pour $\theta \in [0, \pi[$ et $m > 0$, la mesure de probabilité $\nu_{\theta,m}$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\int \int f(x,y) \nu_{\theta,m}(dx,dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u \sin \theta, -u \cos \theta) \frac{m du}{\pi(m^2+u^2)},$$

pour toute fonction continue bornée, c'est-à-dire que $\nu_{\theta,m}$ est une "Loi de Cauchy" concentrée sur la droite $\{(x,y) : x \cos \theta + y \sin \theta = 0\}$.

Compte tenu du fait que pour t réel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} \frac{m du}{\pi(m^2+u^2)} = e^{-m|t|},$$

on a :

$$\int \int e^{itx+isy} \nu_{\theta,m}(dx,dy) = e^{-\sqrt{t^2+s^2} |\sin(\theta-\alpha)|},$$

avec $t = \sqrt{t^2+s^2} \cos \alpha$ et $s = \sqrt{t^2+s^2} \sin \alpha$.

Si C_p est un polygone convexe symétrique, alors

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{\theta_i} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_n < \pi,$$

$$p(t,s) = \sum_{i=1}^n \sqrt{t^2+s^2} m_i |\sin(\theta_i - \alpha)|$$

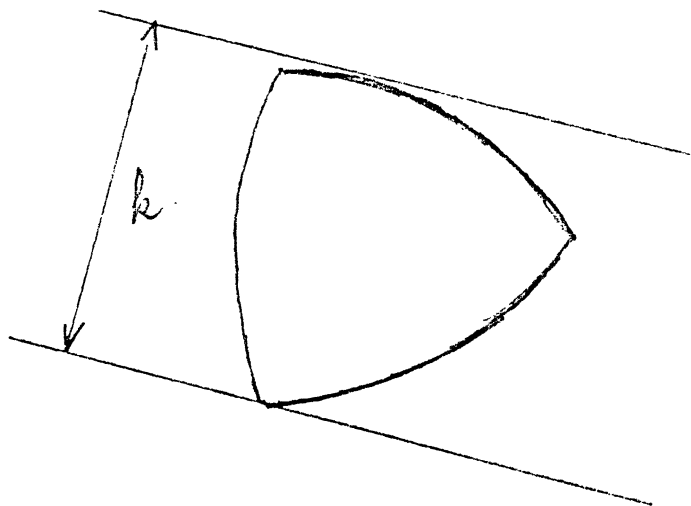
d'après le Théorème 8.1, et donc $e^{-p(t,s)}$ est la transformée de Fourier de la probabilité $\sum_{i=1}^n \nu_{\theta_i, m_i}$; un simple passage à la limite fournit le cas général pour une semi-norme quelconque.

§ 9. Ensembles convexes de largeur constante.

Dans ce §, nous considérons la classe des C de $\mathcal{C}$ tels que :

$$\theta \longmapsto h_C(\theta) + h_C(\theta+\pi)$$

soit une constante. Si cette constante est k , on dit que C est de largeur constante égale à k .



C'est ce qui arrive si C est un cercle, ou un triangle de Reuleaux (voir Exemple 1.5) Ce ne sont naturellement pas les seuls exemples, bien que les ingénieurs utilisent surtout le triangle de Reuleaux pour le tracé de cames. Nous allons voir que si $\mathcal{W}_k$ est l'image par $C \mapsto s_C$ de l'ensemble des convexes de longueur constante k , alors $\mathcal{W}_k$ est en correspondance bijective naturelle avec la boule unité de $L^\infty [0, \pi[$.

Proposition 9.1. Soit C dans $\mathcal{C}$ et $k > 0$. Il y a équivalence entre les affirmations suivantes :

$$1) C \text{ est de largeur constante } k \quad (9.1)$$

$$2) s_C(d\theta) + \delta_\pi * s_C(d\theta) = k \, d\theta \quad (9.2)$$

$$3) \hat{s}_C(2n) = 0 \text{ pour tous entiers } n \neq 0 \text{ et } \hat{s}_C(0) = \pi k \quad (9.3)$$

De plus $\mathcal{W}_k$ est un ensemble convexe compact et $\mathcal{W}_k \cap \mathcal{A}_0$ est l'ensemble de ses points extrémaux.

Démonstration : D'après le lemme 3.3. on montre facilement que si

$k(\theta) = h_C(\theta) + h_C(\theta + \pi)$, alors

$$k(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin(\theta - \alpha)| s_C(d\alpha) \quad (9.4)$$

Prenons la transformée de Fourier des 2 membres de (9.4) :

$$\hat{k}(2n) = \frac{2}{1-4n^2} \hat{s}(2n) \quad \text{pour tout } n \text{ entier} \quad (9.5)$$

Or k est une fonction continue de période π . Donc k est constante si et seulement si $\hat{k}(2n) = 0$ pour tout $n \neq 0$. (9.5) montre donc l'équivalence (9.1) $\iff$ (9.3). L'équivalence (9.2) $\iff$ (9.3) est standard. Convexité et compacité de $\mathcal{W}_k$ sont évidentes à partir de (9.3). Si $s \in \mathcal{W}_k$, (9.2) implique que $s(d\theta)$ est absolument continue par rapport à $d\theta$. Si on note

$$s(d\theta) = f_s(\theta)d\theta ,$$

alors $f_s(\theta) + f_s(\theta+\pi) = k$ presque partout.

On vérifie alors facilement que s dans $\mathcal{W}_k$ est un point extrême de $\mathcal{W}_k$ si et seulement si

$$f_s(\theta) f_s(\theta+\pi) = 0 \quad \text{presque partout} ,$$

c'est-à-dire si s appartient aussi à $\mathcal{P}_0$. □

Il y a quelques conséquences évidentes de la première proposition : par exemple C est de largeur constante si et seulement si $\frac{C+(-C)}{2}$ est un cercle (c'est 9.2., plus ou moins). Mentionnons également le théorème de Barbier (voir [9]) : d'après (9.3), si C est de largeur constante k son périmètre est πk .

Un résultat beaucoup plus délicat concerne le minimum de l'aire d'une courbe de largeur constante k , soit $\min_{s \in \mathcal{W}_k} A(s)$. D'après l'inégalité de Brunn-Minkowski

(Corollaire 7.4), la fonction convexe $-\sqrt{A(s)}$ atteint son maximum sur un point extrême de $\mathcal{W}_k$. Henri Lebesgue a [5] montré géométriquement en 1914 que ce maximum est atteint seulement sur le triangle de Reuleaux (exemple 1.5) (voir Bonnesen et Fenchel [1] page 34). Fujiwara a donné en 1929 [3] une habile preuve analytique, dans l'esprit du présent article (à noter qu'on n'a pas besoin de mesures pour une telle démonstration, puisque s_C a une densité quand s est dans $\mathcal{W}_k$).

Pour terminer ce §, voici une démonstration analytique du fait suivant :

Proposition 8.2. Si C est de largeur constante, C n'a pas de point anguleux d'angle $< \frac{2\pi}{3}$. Si C a un point anguleux d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors C est un triangle de Reuleaux.

Démonstration : Soit γ dans $]0, \pi[$. Si C a un point anguleux d'angle $\pi - \gamma$ cela signifie qu'il existe un arc $]\alpha, \alpha+\gamma[$ dans $\Gamma = \mathbb{R}/2\pi \mathbb{Z}$ tel que $s_C\{]\alpha, \alpha+\gamma[\} = 0$. Sans perte de généralité, supposons que C soit de largeur 1. Alors $s_C(d\theta) = f(\theta)d\theta$, avec

$$f(\theta) + f(\theta+\pi) = 1 \quad , \quad \text{pour tout } \theta \tag{9.6}$$

Nous pouvons aussi supposer $\alpha = \pi$; donc $f(\theta) = 1$ si $0 < \theta < \gamma$.

Ensuite

$$0 = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} f(\theta) d\theta = \int_0^\gamma e^{i\theta} d\theta + \int_\gamma^\pi e^{i\theta} f(\theta) d\theta + \int_{\pi+\gamma}^{2\pi} e^{i\theta} f(\theta) d\theta ,$$

et, après quelques manipulations utilisant (9.6) :

$$1 = \int_{\gamma}^{\pi} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2} - \gamma)} f(\theta) d\theta \quad (9.7)$$

Supposons maintenant $\gamma \geq \pi/3$. Nous pouvons écrire : $1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{i\alpha} d\alpha$,

$$\text{introduire } f_1(\alpha) = f(\alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma)$$

$$\begin{aligned} \text{ainsi que } f_2(\alpha) &= 1 - f_1(\alpha) & \text{sur } [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} - \gamma] \\ &= 1 & \text{sur } [\frac{\pi}{2} - \gamma, \frac{\pi}{6}] . \end{aligned}$$

Si on pose :

$$z_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} e^{i\alpha} f_1(\alpha) d\alpha \quad \text{et} \quad z_2 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} f_2(\alpha) d\alpha ,$$

alors 9.7. implique $z_1 = z_2$. Or $z_1 = \rho e^{i\alpha_1}$ avec $\rho \geq 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < -\frac{\pi}{6}$,

et $z_2 = \rho e^{i\alpha_2}$, avec $-\frac{\pi}{6} < \alpha_2 < \frac{\pi}{6}$. Donc nécessairement $\rho = 0$, $f_1(\alpha) = 0$ sur $[-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$. Ceci implique que $\gamma = \frac{\pi}{3}$ et que C est un triangle de Reuleaux. $\square$

§ 10. Dualité et coordonnées polaires :

Si la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est de période 2π , positive et telle que ρ'' existe et est continue, on a appris dans les cours élémentaires (voir par exemple [6]) tome III) que la courbe du plan définie par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ est convexe si et seulement si

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' \geq 0 \quad (10.1)$$

Si par contre ρ n'est pas assez régulière pour que ρ'' existe, la courbe peut quand même limiter un convexe. Que devient alors la condition (10.1) ?

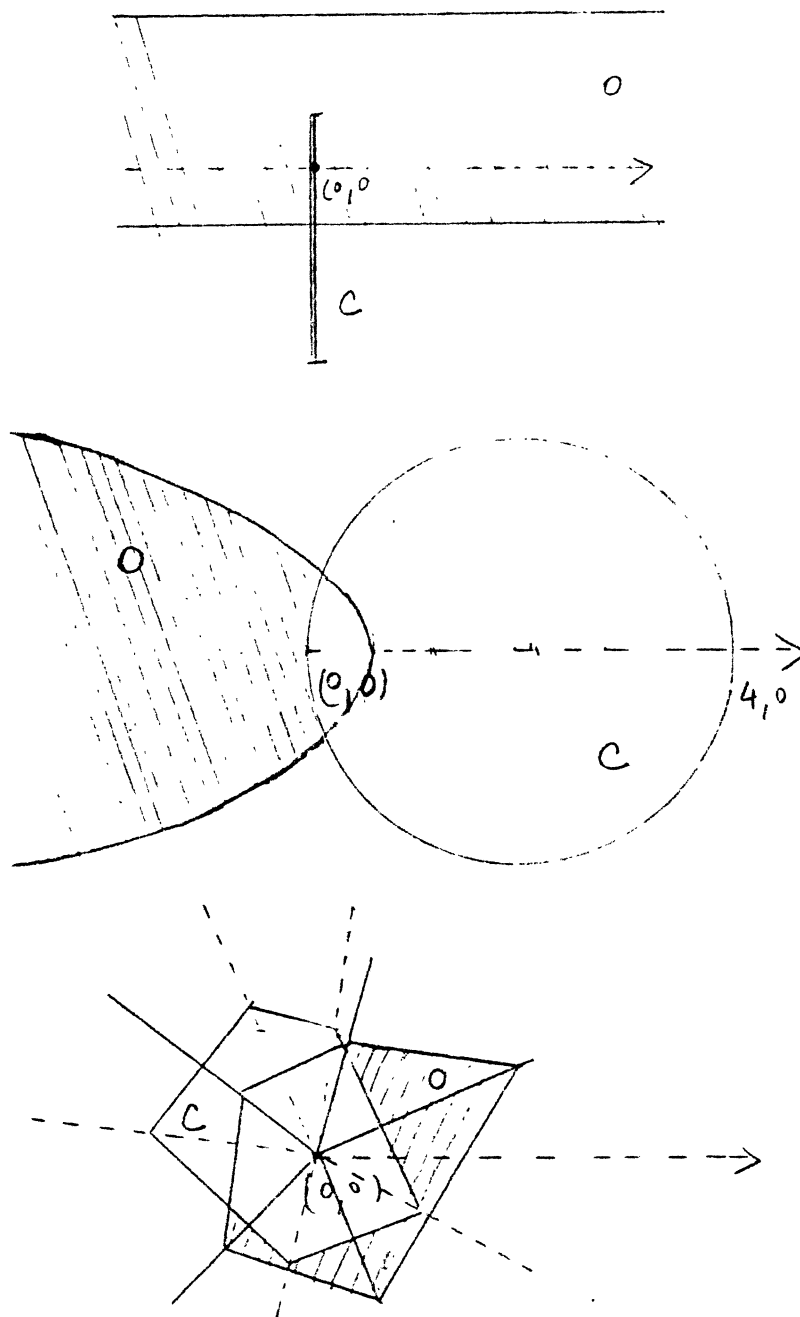
Pour répondre à cette question, il faut introduire la notion de dualité, déjà évoquée au §8.

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des convexes fermés de $\mathbb{R}^2$ non nécessairement bornés, mais contenant $(0,0)$ dans leur intérieur. Si $O \in \mathcal{O}$, alors le convexe dual

$$C = \{ (x,y) \quad ; \quad xx_1 + yy_1 \leq 1 \quad \forall (x_1, y_1) \in O \}$$

est fermé borné et $(0,0) \in C$. (Inversement, O est convexe dual de C).

Voici quelques exemples :



A noter que la forme du convexe dual dépend lourdement de la place de $(0,0)$.

Si $0 \in \mathcal{O}$, introduisons l'équation en coordonnées polaires de la frontière ∂ :

$$\rho = \rho(\theta) ,$$

en convenant $\rho(\theta) = +\infty$ dans les directions non bornées. Il faut noter que, puisque $(0,0)$ est intérieur à $\mathcal{O}$, nécessairement $\rho(\theta) > 0 \quad \forall \theta$. Alors :

Proposition 10.1. Soit O dans $\mathcal{C}$ de dual C dans $\mathcal{C}$. Alors $\frac{1}{\rho(\theta)} = h_C(\theta)$, où h_C est la fonction support de C .

La démonstration découle immédiatement des définitions $\square$.

L'inégalité (10.1) perd alors son caractère mystérieux. Son premier membre n'est autre que la densité de la mesure s_C du convexe dual, qui existe dans le cas lisse où ρ'' est continue. Dans le cas général, on peut tirer beaucoup de renseignements sur O à partir de s_C : une face $F_C(\theta_0)$ non réduite à un point de C correspond à un atome de s_C et à un point anguleux de O dans la direction θ_0 . Un point anguleux de C correspond à un intervalle $] \theta_1, \theta_2[$ sans masse pour s_C et à une face pour O dont les extrémités M_1 et M_2 sont dans les directions θ_1 et θ_2 . On peut encore tirer de s_C des choses plus raffinées sur O , mais nous ne poursuivrons pas.

§ 11. Conclusions.

Une théorie de la mesure "de poche", à savoir de la mesure sur un intervalle de la droite réelle ou du cercle, (pour laquelle nous avons essentiellement besoin seulement de comprendre ce qu'est une fonction croissante), nous a donné beaucoup de renseignements sur les convexes du plan. Un sport amusant est de prendre un résultat sur les convexes plans (par exemple dans le livre de YAGLOM et BOLTLIAVSKI [9] parfois péniblement démontré géométriquement et d'en fournir la preuve analytique. Une chose beaucoup plus difficile est de généraliser la théorie à $\mathbb{R}^d$. Cela a été fait en 1938 par Fenchel et Jessen, qui ont généralisé le résultat suivant de Minkowski : Si $\sum_{i=1}^n p_i \delta_{\theta_i} = u$ est une mesure positive discrète sur la sphère S_2 telle que $\sum_{i=1}^n \theta_i p_i = 0$, alors il existe un polyèdre convexe, unique à translation près, à n faces $F_1, \dots, F_n$, et tel que pour tout $j=1, \dots, n$, la face F_j est d'aire p_j et de normale θ_j . Une histoire très détaillée de ces questions est faite aux §9 et §10 de l'admirable article de synthèse de Rolf Schneider [8].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BONNESEN, T., FENCHEL, W. "Theorie der Konvexer Körper" Chelsea (N.York)(1971)
- [2] FERGUSON, T.S. "A representation of the symmetric bivariate Cauchy distribution" Annals of Math. Statistics, Vol.33 n°4 (1962) pp. 1256-1266.
- [3] FUJIWARA, M. "Analytical proof of Blaschke's Theorem on the curve of constant breadth with minimum area I., II. Proc. Imp. Acad. Jap. Vol.3 (1927), pp.307-309, Vol.7 (1931) pp.300-302.
- [4] GALE, D. "Irreducible convex sets" International Cong. of Mathematics, Amsterdam (1954) Vol.II pp. 21/-218.
- [5] LEBESGUE, H. "Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante" Bull. Soc. Math. France C.R. (1914) pp.72-76.
- [6] LELONG-FERRAND, J., ARNAUDIES, J.M. "Cours de Mathématiques Spéciales", Dunod. 1972 (Tome 2) (19/5) Tome 3.
- [7] LEVIN, B. Ja. "Distribution of Zeros of Entire Functions" American Math. Soc. Translations of Math. Monographs, Vol.5. Providence R.I. (1964).
- [8] SCHNEIDER, Rolf. "Boundary structure and curvature of Convex bodies" Contributions to Geometry, Proceedings of the geometry symposium in Siegen 1978. Edited by Jürgen Tölke and Jörg M. Wills C BIRKHÄUSER Verlag, Basel 1979.
- [9] YAGLOM, I.M., BOLTYANSKI, V.G., "Convex figures". Holt. New-York (1981).

Gérard LETAC
Université Paul Sabatier
Département de Mathématiques
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cédex