

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ARTIBANO MICALI
MOUSSA OUATTARA

Sur les algèbres de Jordan génétiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 97, série *Mathématiques*, n° 27 (1991), p. 193-227

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1991__97_27_193_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ALGÈBRES DE JORDAN GENÉTIQUES(*)

Artibano MICALI et Moussa OUATTARA

This paper concern essentially the structure of Jordan algebra that we can find in the study of algebras related with formal Genetics.

La théorie des algèbres de Jordan est née à partir du travail fondamental de Pascual Jordan, John Von Neumann et Eugène Wigner (cf. [15]) dans une tentative d'exprimer algébriquement les fondements de la Mécanique Quantique. Les développements ultérieurs de la théorie doivent beaucoup à l'école Américaine dont l'un des principaux représentants fut Adrien A. Albert (cf. [1]). Le nom *algèbre de Jordan* a été introduit par Adrien A. Albert (cf. [1]) mais, en fait, l'étude initiale de ces objets date de 1933 (cf. [14]). Lors d'une visite aux U.S.A., après la dernière guerre mondiale, Pascual Jordan a été surpris d'apprendre que ses systèmes de r -nombres ("systems of r -numbers") s'appelaient désormais algèbres de Jordan (cf. [20]). Cette théorie connaît actuellement un extraordinaire développement et ses applications touchent non seulement la Physique mais encore l'Analyse, la Géométrie et bien d'autres domaines (cf. [17]).

Dans cet article, nous montrerons comment les algèbres de Jordan interviennent en Génétique par le biais des algèbres génétiques (cf. [7], [9]). Au moment où certains spécialistes parlent de Génétique Quantique (cf. [22]), il se peut que ses fondements résident justement dans les algèbres de Jordan qui sont, de plus, génétiques.

(*) Partially supported by Programme CAMPUS

Sommaire. 1. Algèbres de Jordan et décomposition de Peirce. 2. Les algèbres $A(\lambda)$. 3. Les algèbres gamétiques. 4. Les algèbres $A_{T,\omega}$. 5. Les algèbres type autofécondation. 6. Algèbres de Bernstein-Jordan. 7. Dérivations dans les algèbres de Bernstein-Jordan. 8. La dupliquée d'une algèbre. 9. Algèbres de Jordan spéciales. 10. Les algèbres gamétiques $G_{mn}(\theta)$. 11. Note finale. Bibliographie.

1. Algèbres de Jordan et décomposition de Peirce. Dans cet article, il s'agira toujours d'algèbres non nécessairement associatives ni commutatives sur un anneau commutatif K à élément unité 1. Dans le cas où K est un corps, des hypothèses sur la caractéristique de K s'avèrent souvent nécessaires.

On dira qu'une K -algèbre A est une *algèbre de Jordan* si les conditions $x(yx^2) = (xy)x^2$, $(x^2y)x = x^2(yx)$, sont vérifiées quels que soient x et y dans A . Si A est commutative, une seule de ces deux conditions suffit pour définir une algèbre de Jordan. On dira dans ce cas, qu'il s'agit d'une *algèbre de Jordan commutative*. Si A est une algèbre de Jordan commutative sur un anneau intègre K infini (cf. [5], chapitre 4, §2, n° 5) alors (cf. [1])

$$(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = (x(yz))t + (x(zt))y + (x(yt))z$$

quels que soient x, y, z et t dans A . Réciproquement, si cette identité est vérifiée dans une algèbre commutative A sur un anneau commutatif K à élément unité 1, en y faisant $t = z = y$ on a $3(xy)y^2 = 3(xy^2)y$. Donc, si l'homothétie définie par 3 dans A est injective, alors $(xy)y^2 = (xy^2)y$ quels que soient x, y dans A . Donc A est une algèbre de Jordan (commutative).

Exemple 1.1. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K -algèbre associative. Dans le K -espace vectoriel A on définit une nouvelle structure de K -algèbre au moyen de la formule $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, quels que soient x, y dans A , où l'on note xy le produit de x par y dans la structure initialement donnée sur A . Le produit \circ définit sur A une nouvelle structure de K -algèbre commutative, que l'on notera $A(\frac{1}{2})$ ou encore A^+ . On vérifie facilement que A^+ est une algèbre de Jordan commutative.

A l'exemple des algèbres associatives, les algèbres de Jordan admettent la décomposition de Peirce. En effet, soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K -algèbre de Jordan (commutative) ayant un idempotent e . Alors A admet la décomposition $A = A_1(e) \oplus A_{1/2}(e) \oplus A_0(e)$ en somme directe de sous K -espaces vectoriels $A_i(e)$ avec $A_i(e) = \{x \mid x \in A, ex = ix\}$

($i = 0, 1/2, 1$). Cette décomposition est appelée *décomposition de Peirce* de A relative à l'idempotent e . Les propriétés des composantes de Peirce sont données par (cf. [13], page 119) :

Théorème 1.2. (d'Albert). Soient K un corps commutatif, A une K -algèbre de Jordan commutative et $A = A_1 \oplus A_{1/2} \oplus A_0$ la décomposition de Peirce de l'algèbre de Jordan A , relative à l'idempotent e . Alors, on a : (i) $A_0^2 \subset A_0$, $A_1^2 \subset A_1$, $A_0A_1 = 0$; (ii) $A_{1/2}^2 \subset A_0 + A_1$, $A_{1/2}(A_0 + A_1) \subset A_{1/2}$; (iii) $x_{1/2}(a_i b_i) = (x_{1/2} a_i) b_i + (x_{1/2} b_i) a_i$ pour $x_{1/2}$ dans $A_{1/2}$, a_i, b_i dans A_i ($i = 0, 1$). De plus $[R_{a_0}, R_{a_i}] = 0$, si $a_i \in A_i$.

2. Les algèbres $A(\lambda)$. Soient K un anneau commutatif à élément unité, λ un élément de K et A une K -algèbre non nécessairement commutative ni associative. Sur le K -module A , on définit une structure de K -algèbre au moyen de la multiplication $x \circ y = \lambda xy + (1 - \lambda)yx$ pour x et y parcourant A . On notera $A(\lambda)$ cette nouvelle algèbre et il est évident que, en tant que K -algèbres, $A(0) = A^{opp}$ et $A(1) = A$. Il se pose ici le problème d'étudier les propriétés de $A(\lambda)$ connaissant celles de A . Ainsi, on voit facilement que si A est commutative, il en est de même de $A(\lambda)$. Réciproquement, si $A(\lambda)$ est commutative et si $1 - 2\lambda$ est inversible dans K , alors A est aussi commutative. Le lemme suivant est immédiat, par voie de calcul :

Lemme 2.1. Soient K un anneau commutatif à élément unité, infini et intègre, et A une K -algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $A(\lambda)$ est flexible pour tout λ dans $K \setminus \{0, 1\}$; (ii) A est flexible.

Proposition 2.2. Soient K un corps commutatif infini ou un anneau intègre infini à élément unité et A une K -algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) pour tout élément λ de K , $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, la K -algèbre $A(\lambda)$ est de Jordan; (ii) A est une algèbre de Jordan et $x^2(xy) + (yx)x^2 = x(x^2y) + (yx^2)x$ quels que soient x et y dans A .

En effet, si x et y sont dans A , on écrit $(x \circ y) \circ (x \circ x) = \lambda^2(xy)x^2 + \lambda(1 - \lambda)(yx)x^2 + \lambda(1 - \lambda)x^2(xy) + (1 - \lambda)^2x^2(yx)$ et $x \circ (y \circ (x \circ x)) = \lambda^2x(yx^2) + \lambda(1 - \lambda)x(x^2y) + \lambda(1 - \lambda)(yx^2)x + (1 - \lambda)^2(x^2y)x$ et dans l'équation $(x \circ y) \circ (x \circ x) =$

$x \circ (y \circ (x \circ x))$ on identifie les coefficients des termes de même degré en λ . De même on écrit $(x \circ x) \circ (y \circ x) = \lambda^2 x^2(yx) + \lambda(1-\lambda)x^2(xy) + \lambda(1-\lambda)(yx)x^2 + (1-\lambda)^2(xy)x^2$ et $((x \circ x) \circ y) \circ x = \lambda^2(x^2y)x + \lambda(1-\lambda)(yx^2)x + \lambda(1-\lambda)x(x^2y) + (1-\lambda)^2x(yx^2)$ et dans l'équation $(x \circ x) \circ (y \circ x) = ((x \circ x) \circ y) \circ x$ on identifie les coefficients des termes de même degré en λ . Ceci nous donne le résultat voulu.

3. Les algèbres gamétiques. Soit K un anneau commutatif à élément unité et supposons que K soit une \mathbf{Q} -algèbre. On note $G(n+1, 2m)$ le sous- K -module de l'algèbre des polynômes $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ dont une base est formée par les monômes homogènes de degré m en les indéterminées X_0, X_1, \dots, X_n . La multiplication

$$(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n})(X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{i_0 + j_0}{m} X_0^{i_0 + j_0 - m} X_1^{i_1 + j_1} \dots X_n^{i_n + j_n},$$

quels que soient les suites d'entiers (i_0, \dots, i_n) et (j_0, \dots, j_n) vérifiant $\sum_{k=0}^n i_k = m$ et $\sum_{k=0}^n j_k = m$, définit sur le K -module $G(n+1, 2m)$ une structure d'algèbre commutative, non associative et sans élément unité. On dira que $G(n+1, 2m)$ est la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde à $n+1$ allèles (cf. [18]). Pour l'interprétation biologique de cette algèbre on renvoie à la littérature citée.

Pour un K -module P , désignons par $S_K^m(P)$ le sous- K -module de l'algèbre symétrique $S_K(P)$ formé par les éléments homogènes de degré m de $S_K(P)$ (cf. [6]). Une définition plus générale d'algèbre gamétique d'un K -module P muni d'une forme K -linéaire surjective $d : P \rightarrow K$ pouvant se prolonger en une K -dérivation de $S_K(P)$, notée encore d , est donnée dans [18]. Cette algèbre est notée $S_K^m(P, d)$. Dans le cas qui nous intéresse ici, $G(n+1, 2m) = S_K^m(K^{n+1}, \frac{\partial}{\partial X_0})$ où $\frac{\partial}{\partial X_0}$ est la dérivation partielle par rapport à la variable X_0 . L'algèbre $S_K^m(P, d)$ est une algèbre pondérée, c'est-à-dire, il existe une forme K -linéaire surjective unique et multiplicative $\omega : S_K^m(P, d) \rightarrow K$ appelée pondération de $S_K^m(P, d)$. En effet, il suffit de prendre $\omega = \frac{1}{m!} d^m$ et de vérifier que $\omega : S_K^m(P, d) \rightarrow K$ est l'unique forme K -linéaire surjective multiplicative.

Exemple 3.1. Si K est un anneau commutatif à élément unité 1 dans lequel 2 est inversible, $G(2, 2)$ est la K -algèbre commutative dont la table de multiplication relative à la base $e_0 = X_0, e_1 = X_1$ s'écrit $e_0^2 = e_0, e_0 e_1 = e_1 e_0 = \frac{1}{2} e_1, e_1^2 = 0$. On vérifie immédiatement que $G(2, 2)$ est une algèbre de Jordan commutative. Dans

la définition de $G(2, 2)$ il suffit de supposer que 2 soit inversible sur K , l'hypothèse que K soit une \mathbf{Q} -algèbre étant superflue. Nous montrerons par la suite que ce résultat est général, à savoir :

Théorème 3.2. *Soient K un anneau commutatif à élément unité 1 qui est une \mathbf{Q} -algèbre et $G(n + 1, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde à $n + 1$ allèles. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $G(n + 1, 2m)$ est une algèbre de Jordan commutative ; (ii) $G(n + 1, 2m)$ est une algèbre de Bernstein ; (iii) $m = 1$.*

La notion d'algèbre de Bernstein est rappelée plus loin (cf. 6.) mais on renvoie à [3] pour une étude exhaustive.

En effet, si $m = 1$ et si ω est la pondération de $G(n + 1, 2)$ alors la multiplication de $G(n + 1, 2)$ s'écrit $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)$ quels que soient x, y dans $G(n + 1, 2)$ et cette algèbre est, à la fois, de Jordan et de Bernstein. Réciproquement, supposons que $G(n + 1, 2m)$ soit de Jordan commutative. Alors $m \leq 2$ car sinon, pour $x = X_0^{m-1}X_1$, $y = X_0^m$ on aurait $x^2(yx) \neq (x^2y)x$. L'anneau K étant une \mathbf{Q} -algèbre (c'est aussi vrai pour un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$) l'identité $x^2(yx) = (x^2y)x$ entraîne $(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = (xzt)y + (x(yz)t + (x(ty)z)$, quels que soient x, y, z, t dans $G(n + 1, 2m)$. Supposons $m = 2$ et faisons $x = y = X_0^2$, $z = t = X_0X_1$ dans l'identité précédente ; il vient que $(\binom{4}{2}^{-3} \binom{4}{2} + 2\binom{3}{2}^2)X_1^2 = \binom{4}{2}^{-3} (1 + 2\binom{3}{2}^2)X_1^2$ ce qui est impossible. Par conséquent $m = 1$ reste la seule valeur possible. Si maintenant $G(n + 1, 2m)$ est une algèbre de Bernstein et si l'on suppose que $m \geq 2$, on considère les éléments $x = X_0^{m-2}X_1^2$ et $e = X_0^m$ et on voit que $ex = \lambda x$ avec $\lambda = \binom{2m}{m}^{-1} \binom{2m-2}{m}$. Or, la restriction de la multiplication par tout idempotent à $\text{Ker}(\omega)$ admet pour seules valeurs propres 0 et $\frac{1}{2}$. La condition $\lambda = 0$ entraîne $m < 2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ entraîne $m = 0$, ce qui est absurde dans les deux cas. L'unique possibilité est donc $m = 1$.

Corollaire 3.3. *Soient K un anneau commutatif à élément unité 1 qui est une \mathbf{Q} -algèbre et $S_K^m(P, d)$ la K -algèbre du K -module (P, d) , où P est un K -module projectif de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) $S_K^m(P, d)$ est une algèbre de Jordan commutative ; (2) $S_K^m(P, d)$ est une algèbre de Bernstein ; (3) $m = 1$.*

Si $m = 1$ on vérifie immédiatement (cf. [18], Notes 4.6 et 5.7) que $S_K^m(P, d)$ est une algèbre de Jordan commutative même si P n'est pas projectif. Démontrons la réciproque, c'est-à-dire, supposons que P soit un K -module projectif de type fini et que $S_K^m(P, d)$ soit une algèbre de Jordan commutative. Pour tout idéal premier \mathfrak{p} de K , $S_K^m(P, d)_{\mathfrak{p}} \simeq S_{K_{\mathfrak{p}}}^m(P_{\mathfrak{p}}, d_{\mathfrak{p}})$ (isomorphisme de $K_{\mathfrak{p}}$ -algèbres) est une algèbre de Jordan commutative. Comme $P_{\mathfrak{p}}$ est un $K_{\mathfrak{p}}$ -module libre de type fini, d'après le théorème 3.2, on a $m = 1$. Les lemmes 3.4 et 3.5 dont les démonstrations ne présentent aucune difficulté, achèvent la démonstration du corollaire :

Lemme 3.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité 1 et A une K -algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) A est une K -algèbre de Jordan ; (2) pour tout idéal premier \mathfrak{p} de K , la $K_{\mathfrak{p}}$ -algèbre $A_{\mathfrak{p}}$ est de Jordan.*

Lemme et définition 3.5. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et (A, ω) une K -algèbre pondérée commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) (A, ω) est une K -algèbre de Bernstein ; (2) pour tout idéal premier \mathfrak{p} de K , la $K_{\mathfrak{p}}$ -algèbre $(A_{\mathfrak{p}}, \omega_{\mathfrak{p}})$ est de Bernstein, où $\omega_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow K_{\mathfrak{p}}$ est la pondération définie par $\frac{x}{s} \mapsto \frac{\omega(x)}{s}$.*

4. Les algèbres $A_{T, \omega}$. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A un K -espace vectoriel, $T : A \rightarrow A$ un opérateur K -linéaire et $\omega : A \rightarrow K$ une forme linéaire non nulle telle que $\omega \circ T = \omega$. On notera $A_{T, \omega}$ la K -algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est A et dont la multiplication est définie par $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x))$ quels que soient x et y dans $A_{T, \omega}$. On vérifie immédiatement que $A_{T, \omega}$ est une algèbre pondérée de pondération ω . Comme $xy = T(\frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x))$, alors $A_{T, \omega}$ est l'image de la K -algèbre gamétique $G(n+1, 2)$ par l'opérateur T ou encore $A_{T, \omega} = T(G(n+1, 2)) \simeq G(n+1, 2)/\text{Ker}(T)$ où $\text{Ker}(T)$ devient, compte tenu des structures d'algèbres, un idéal de l'algèbre $G(n+1, 2)$. Ceci nous montre que certaines propriétés des algèbres $A_{T, \omega}$ s'obtiennent par passage au quotient, des propriétés analogues de l'algèbre gamétique $G(n+1, 2)$.

Les valeurs propres de l'opérateur T nous conduisent à établir des propriétés spécifiques de l'algèbre $A_{T, \omega}$. Rappelons tout d'abord qu'une K -algèbre commutative et pondérée A de pondération ω est dite *conservative* si $x^2y = \omega(x)xy$ quels que soient x, y dans A .

Théorème 4.1. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A un K -espace vectoriel, $\omega : A \rightarrow K$ une forme K -linéaire non nulle et $T : A \rightarrow A$ un opérateur K -linéaire tel que $\omega \circ T = \omega$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) $A_{T,\omega}$ est une algèbre de Bernstein ; (2) $A_{T,\omega}$ est une algèbre conservative ; (3) $T = T^2$.*

On a $x^2y = \frac{1}{2}\omega(x)(\omega(x)T(y) + \omega(y)T^2(x))$ et $\omega(x)xy = \frac{1}{2}\omega(x)(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x))$. Comme $T^2 = T$ alors $x^2y = \omega(x)xy$ quels que soient x et y dans $A_{T,\omega}$, donc $A_{T,\omega}$ est conservative. Réciproquement, supposons que $A_{T,\omega}$ soit conservative. De $x^2y = \omega(x)xy$ il vient que $\omega(x)T(x) = \omega(x)T^2(x)$ pour tout x dans A . Pour x dans A tel que $\omega(x) \neq 0$ on a $T^2(x) = T(x)$. Sinon, il existe $e \neq 0$ dans A tel que $\omega(e) = 1$ et $A = Ke \oplus \text{Ker}(\omega)$ et soit x dans A tel que $\omega(x) = 0$. Alors $y = e + x$ vérifie $\omega(y) = \omega(e) = 1$ et $T^2(y) = T(y)$ et comme $T^2(e) = T(e)$ alors $T^2(x) = T(x)$ pour tout x dans $\text{Ker}(\omega)$. On a ainsi montré que $T^2 = T$. Une démonstration analogue nous dit que les conditions (1) et (3) sont aussi équivalentes.

Théorème 4.2. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A un K -espace vectoriel, $\omega : A \rightarrow K$ une forme K -linéaire non nulle et $T : A \rightarrow A$ un opérateur K -linéaire tel que $\omega \circ T = \omega$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) $A_{T,\omega}$ est une algèbre à puissances associatives ; (2) $A_{T,\omega}$ est une algèbre de Jordan commutative ; (3) $T^3 - 3T^2 + 2T = 0$.*

En effet, on a

$$x(x^2y) = \frac{1}{4}\omega(x)^3T^2(y) + \frac{1}{4}\omega(x)^2\omega(y)T^3(x) + \frac{1}{2}\omega(x)^2\omega(y)T(x) \quad \text{et}$$

$$x^2(xy) = \frac{1}{4}\omega(x)^3T^2(y) + \frac{3}{4}\omega(x)^2\omega(y)T^2(x),$$

donc $x(x^2y) - x^2(xy) = \frac{1}{4}\omega(x)^2\omega(y)(T^3 - 3T^2 + 2T)(x)$, quels que soient x, y dans $A_{T,\omega}$. Donc la condition (3) entraîne (2) et, réciproquement, (2) entraîne que $(T^3 - 3T^2 + 2T)(x) = 0$ pour tout x dans $A_{T,\omega}$ tel que $\omega(x) \neq 0$. Sinon, il existe e dans $A_{T,\omega}$ tel que $\omega(e) = 1$ et soit x dans $A_{T,\omega}$ tel que $\omega(x) = 0$. Les éléments e et $y = e + x$ vérifient $(T^3 - 3T^2 + 2T)(e) = 0$ et $(T^3 - 3T^2 + 2T)(y) = 0$ donc $(T^3 - 3T^2 + 2T)(x) = 0$. On a ainsi montré que $T^3 - 3T^2 + 2T = 0$. Il nous manque, finalement, à démontrer que (1) équivaut à (2). Or, c'est un fait bien connu que toute algèbre de Jordan est à puissances associatives (cf. [2], [24]), c'est à dire, (2)

entraîne (1) et comme $x^2x^2 = \omega(x)^3T^2(x)$ et $x^4 = \frac{1}{4}\omega(x)^3(T^3 + T^2 + 2T)(x)$ pour tout x dans $A_{T,\omega}$, la condition (1) entraîne que $x^2x^2 = x^4$ donc que $T^3 - 3T^2 + 2T = 0$, c'est-à-dire, (1) entraîne (3). Le théorème est ainsi démontré.

Note 4.3. Il résulte, de la démonstration ci-dessus, que *l'algèbre $A_{T,\omega}$ est à puissances associatives si et seulement si $x^2x^2 = x^4$ pour tout x dans $A_{T,\omega}$.*

Corollaire 4.4. *Si $A_{T,\omega}$ est conservative (resp. de Bernstein) alors elle est de Jordan.*

Par la suite, nous allons décrire les dérivations de l'algèbre $A_{T,\omega}$ et, à cet effet, on suppose que $T(T - I)(T - 2I) = 0$, i.e., que $A_{T,\omega}$ soit une algèbre de Jordan (cf. théorème 4.2.), où I est l'endomorphisme identité de A . Soit $A_{T,\omega} = A(0) \oplus A(1) \oplus A(2)$ la décomposition de $A_{T,\omega}$ comme somme directe des sous- K -espaces vectoriels propres $A(\lambda)$ associés à la valeur propre λ ($\lambda = 0, 1, 2$). Pour x dans $A(\lambda)$, $\omega(x) = \omega(T(x)) = \lambda\omega(x)$ entraîne $(1 - \lambda)\omega(x) = 0$ et si $\lambda \neq 1$ alors $\omega(x) = 0$, on a $ex = \frac{1}{2}T(x)$. Si l'on pose $A(1) = Ke \oplus U$, $A(0) = V$ et $A(2) = W$ alors la table de multiplication de $A_{T,\omega}$ est donnée par $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $ev = 0$ et $ew = w$ tous les autres produits étant nuls, pour u dans U , v dans V et w dans W . On note $\text{Der}_K(A)$ l'algèbre de Lie des dérivations de A et $\text{Der int}_K(A)$, l'idéal des dérivations intérieures, i.e., $\text{Der int}_K(A) = \text{Der}_K(A) \cap E(A)^-$ où $E(A)^-$ est l'algèbre de Lie des multiplications de A . De plus, si A est une algèbre de Jordan, on a $E(A)^- = L(A) + [L(A), L(A)]$ (cf. [24], chapitre 4, §1, page 92).

Lemme 4.5. *L'algèbre de Lie $\text{Der int}_K(A_{T,\omega})$ s'identifie à l'algèbre de Lie $L_K(U)$ engendrée par les multiplication L_x avec x dans U .*

Puisque $\text{Ker}(\omega)^2 = 0$, quels que soient x dans $A_{T,\omega}$ et y dans $A_{T,\omega}$ tel que $\omega(y) = 0$, on a $xy = \omega(x)ey$. Il est facile de voir que $[L_x, L_e](y) = 0$ pour x et y dans $\text{Ker}(\omega)$. Pour x tel que $\omega(x) = 0$, $[L_x, L_e](y) = x(ey) - e(xy) = \omega(y)(ex - e(ex))$, quel que soit y dans $A_{T,\omega}$. Ainsi $[L_x, L_e] = 0$ pour x dans $V \oplus W$ et $[L_x, L_e] = L_{\frac{1}{2}x}$ pour x dans U , d'où le lemme.

Les *composantes de Peirce* de $A_{T,\omega}$ relativement à l'idempotent e , sont $A_1(e) = Ke \oplus W$, $A_{\frac{1}{2}}(e) = U$ et $A_0(e) = V$.

Théorème 4.6. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A_{T,\omega}$ la K -algèbre de Jordan ci-dessus définie. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K -linéaire $d : A_{T,\omega} \rightarrow A_{T,\omega}$ soit une K -dérivation de $A_{T,\omega}$ est que les conditions suivantes soient vérifiées : $d(e) \in U$, $d(U) \subset U$, $d(V) \subset V$, $d(W) \subset W$.

Soit d une K -dérivation de $A_{T,\omega}$. Si on dérive $e^2 = e$ on a $2ed(e) = d(e)$, soit $ed(e) = \frac{1}{2}d(e)$, donc $d(e) \in U$. Soit x tel que $\omega(x) = 0$ et $ex = \lambda x$ ($\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$). Si l'on dérive $ex = \lambda x$ on a $\lambda d(x) = ed(x) + d(e)x = ed(x)$ donc pour $\lambda = 0$ ou $\frac{1}{2}$, il résulte que $d(U) \subset U$ et $d(V) \subset V$. Si $\lambda = 1$, $ed(x) = d(x)$ nous dit que $d(x) \in A_1(e)$ et si l'on écrit $d(x) = \alpha e + y$, α dans K et y dans W , alors la dérivée de $x^2 = 0$ donne $0 = 2xd(x) = 2\alpha x$, soit $\alpha = 0$, d'où $d(W) \subset W$. La réciproque est immédiate.

Lemme 4.7. L'application K -linéaire $\varphi : \text{Der}_K(A_{T,\omega}) \rightarrow U \times_{s.d.} \text{End}_K(U) \times \text{End}_K(V) \times \text{End}_K(W)$ définie par $d \mapsto (d(e), d|_U, d|_V, d|_W)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Soient d une K -dérivation de $A_{T,\omega}$ et f_d, g_d, h_d les restrictions de d , respectivement aux sous- K -espaces vectoriels U, V et W . Si d' est une autre K -dérivation et $x = \omega(x)e + u + v + w$ est un élément quelconque de $A_{T,\omega}$ alors, $dd'(x) = d(\omega(x)d'(e) + f_{d'}(u) + g_{d'}(v) + h_{d'}(w)) = \omega(x)f_d(d'(e)) + f_d f_{d'}(u) + g_d g_{d'}(v) + h_d h_{d'}(w)$ et $[d, d'](x) = \omega(x)(f_d(d'(e)) - f_{d'}(d(e))) + [f_d, f_{d'}](u) + [g_d, g_{d'}](v) + [h_d, h_{d'}](w)$. On définit le crochet de Lie sur $U \times_{s.d.} \text{End}_K(U) \times \text{End}_K(V) \times \text{End}_K(W)$ (*s.d.* signifie *semi-direct*) par $[(u, f, g, h), (u', f', g', h')] = (f(u') - f'(u), [f, f'], [g, g'], [h, h'])$ et la relation précédente nous dit que $\varphi([d, d']) = [\varphi(d), \varphi(d')]$, c'est-à-dire, que φ est un morphisme d'algèbres de Lie. De plus, φ est, de toute évidence, un isomorphisme.

Le lemme 4.7. peut se traduire aussi comme suit :

Théorème 4.8. Soient K un corps commutatif de caractéristique différent de 2 et $A_{T,\omega}$ la K -algèbre de Jordan ci-dessus définie. Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\text{Der}_K(A_{T,\omega}) \xrightarrow{\sim} K^r \times_{s.d.} M_r(K) \times M_s(K) \times M_t(K)$ où $1 + r = \dim_K(A(1))$, $s = \dim_K(A(0))$, $t = \dim_K(A(2))$ et $1 + r + s + t = 1 + n = \dim_K(A_{T,\omega})$.

A l'exemple des algèbres associatives, on peut définir l'analogue du *premier groupe de cohomologie de Hochschild* pour une K -algèbre A quelconque comme

étant l'algèbre de Lie quotient $H^1(A) = \text{Der}_K(A)/\text{Der int}_K(A)$, K étant un corps commutatif ou un anneau commutatif à élément unité.

Théorème 4.9. *Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $H^1(A_{T,\omega}) \xrightarrow{\sim} M_r(K) \times M_s(K) \times M_t(K)$.*

Il suffit de voir, d'après le lemme 4.5, que $\text{Der int}_K(A_{T,\omega}) = K^r$, isomorphisme d'espaces vectoriels et on passe au quotient dans le théorème 4.8, la structure d'algèbre de Lie de $M_r(K) \times M_s(K) \times M_t(K)$ étant celle du produit direct.

Corollaire 4.10. *Si $A_{T,\omega}$ est conservative, alors $\text{Der}_K(A_{T,\omega}) \xrightarrow{\sim} K^r \times_{s.d.} M_r(K) \times M_s(K)$ et $H^1(A) \xrightarrow{\sim} M_r(K) \times M_s(K)$.*

En effet, dire que $A_{T,\omega}$ est conservative revient à dire que $T^2 = T$ et ceci équivaut à $A(2) = 0$, donc $t = 0$.

Notons que l'on retrouve ici des résultats connus. Ainsi, si $T = I = id_A$, $s = t = 0$, $A_{T,\omega} = G(n + 1, 2)$ et $\text{Der}_K(G(n + 1, 2)) \simeq K^n \times_{s.d.} M_n(K)$, $H^1(G(n + 1, 2)) \simeq M_n(K)$. Si $T(x) = \omega(x)e$, pour tout x dans $A_{T,\omega}$ on a $r = t = 0$ et $\text{Der}_K(A_{T,\omega}) = H^1(A_{T,\omega}) \simeq M_n(K)$.

Corollaire 4.11. *Si $(T - I)(T - 2I) = 0$ alors $\text{Der}_K(A_{T,\omega}) \simeq K^r \times_{s.d.} M_r(K) \times M_t(K)$ et $H^1(A_{T,\omega}) \simeq M_r(K) \times M_t(K)$.*

5. Les algèbres type autofécondation.

5.1. Mixture d'algèbres. Soient K un anneau commutatif à élément unité et supposons que A soit un K -module muni de deux structures de K -algèbres notées respectivement A^\cdot et A° . Sur le K -module A on définit une nouvelle structure de K -algèbre, appelée *mixture des algèbres A^\cdot et A° de paramètre θ* , dont la multiplication s'écrit $xy = \theta x \cdot y + (1 - \theta)x \circ y$ quels que soient x et y dans A , où θ est un élément de K .

Certaines propriétés communes aux algèbres composantes sont immédiatement transposées sur la mixture. Par exemple si A^\cdot et A° sont commutatives il en est de même de A . Par contre, l'associativité de A^\cdot et A° n'entraîne pas nécessairement celle de A . En effet, quels que soient x, y, z dans A on a

$$(xy)z = \theta(\theta x \cdot y + (1 - \theta)x \circ y) \cdot z + (1 - \theta)(\theta x \cdot y + (1 - \theta)x \circ y) \circ z$$

et

$$x(yz) = \theta x \cdot (\theta y \cdot z + (1 - \theta)y \circ z) + (1 - \theta)x \circ (\theta y \cdot z + (1 - \theta)y \circ z)$$

donc $(xy)z - x(yz) = \theta(1 - \theta)((x \circ y) \cdot z + (x \cdot y) \circ z - x \cdot (y \circ z) - x \circ (y \cdot z))$. Si, de plus, θ est un idempotent de K alors A est associative. Sinon, pour avoir l'associativité de A il faudrait supposer des conditions de compatibilité entre les structures de $A \cdot$ et A° respectivement. En effet, la condition $(x \circ y) \cdot z + (x \cdot y) \circ z = x \cdot (y \circ z) + x \circ (y \cdot z)$ quels que soient x, y, z dans A entraîne, en supposant que $A \cdot$ et A° soient associatives, que A est aussi associative.

Notre but n'étant pas, du moins pour le moment, de faire une étude systématique de la mixture d'algèbres, nous nous arrêtons à ces quelques considérations. On rappelle néanmoins que si $A \cdot$ et A° sont des algèbres pondérées de même pondération ω , alors ω est encore une pondération de A . De plus, si ω est l'unique pondération de $A \cdot$ et A° , elle est aussi l'unique pondération de A .

Notons que la mixture des algèbres A et A^{opp} pour un paramètre θ est l'algèbre $A(\theta)$ construite au paragraphe 2. Finalement, l'interprétation biologique d'une mixture d'algèbres, dans le cas où $K = \mathbf{R}$ et $0 \leq \theta \leq 1$ a été donnée par P. Holgate (cf. [12]).

5.2. Les algèbres d'autofécondation. Il s'agit d'une mixture d'algèbres étudiée par P. Holgate (cf. [12]) et définie comme suit. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A un K -espace vectoriel, $\omega : A \rightarrow K$ une forme K -linéaire non nulle sur A et $T : A \rightarrow A$ un opérateur K -linéaire tel que $\omega \circ T = \omega$. Sur le K -espace vectoriel A on définit une structure de K -algèbre non nécessairement commutative ni associative en définissant la multiplication de A par $xy = \frac{1}{2}\theta(\omega(x)y + \omega(y)x) + (1 - \theta)\omega(x)T(y)$ quels que soient x et y dans A , où θ est un élément de K . On dira que A est l'algèbre d'autofécondation de paramètre θ . Il est évident que l'algèbre d'autofécondation A de paramètre θ est la mixture, de paramètre θ , de l'algèbre gamétique $G(n + 1, 2)$ et d'une algèbre définie sur A , où le produit de deux éléments x et y est $\omega(x)T(y)$. Notons A_θ l'algèbre d'autofécondation de paramètre θ . On observe que A_θ est une algèbre pondérée de pondération ω . En général, A_θ n'est pas commutative sauf si $\theta = 1$ ou si $\omega(x)y - \omega(y)x$ est dans $\text{Ker}(T)$ quels que soient x et y dans A_θ . De plus on sait que la pondération ω est unique.

Nous verrons, par la suite, un certain nombre de propriétés de ces algèbres avant d'étudier ses dérivations et automorphismes.

Proposition 5.3. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A_θ une K -algèbre d'autofécondation de paramètre $\theta \neq 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre A_θ soit flexive est $T^2 = T$.*

On observe, tout d'abord, que si $\theta = 1$, l'algèbre A_θ est flexive sans aucune condition sur T , car commutative. Supposons donc que $\theta \neq 1$ et que $T^2 = T$; la flexivité résulte des égalités

$$(xy)x = \left(\frac{3}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)\right)\omega(xy)x + \frac{1}{4}\theta^2\omega(x)^2y + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)\omega(x^2)T(y) \\ + (1-\theta)\omega(xy)T(x)$$

et

$$x(yx) = \left(\frac{3}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)\right)\omega(xy)x + (1-\theta)\omega(xy)(\theta T + (1-\theta)T^2)(x) \\ + \frac{1}{4}\theta^2\omega(x^2)y + \frac{1}{2}\theta(1-\theta)\omega(x^2)T(y).$$

Réciproquement, la flexivité de A_θ , c'est-à-dire, $x(yx) = (xy)x$ quels que soient x et y dans A_θ , entraîne que $(1-\theta)^2\omega(xy)(T^2(x) - T(x)) = 0$ quels que soient x et y dans A_θ . Donc $T^2 = T$.

Proposition 5.4. *Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Pour tout θ dans K , la K -algèbre A_θ est Lie-admissible.*

En effet $[x, y] = xy - yx = (1-\theta)(\omega(y)T(x) - \omega(x)T(y))$, $\omega([x, y]) = 0$ et $[[x, y], z] = (1-\theta)^2\omega(z)(\omega(y)T^2(x) - \omega(x)T^2(y))$ quels que soient x, y et z dans A_θ , donc quels que soient x, y et z dans A_θ on a $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

Théorème 5.5. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A_θ la K -algèbre d'autofécondation de paramètre θ . Une condition nécessaire et suffisante pour que A_θ soit de Jordan est que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (1) $(\theta - 1)(T - I)(4(\theta - 1)T + \theta(\theta - 2)I) = 0$;
- (2) $(\theta - 1)(T - I)(4(\theta - 1)^2T^2 - 4\theta(\theta - 1)T + \theta(\theta - 2)I) = 0$.

En effet on a,

$$x^2(yx) = \frac{1}{2}\theta(\omega(x^2))\left(\frac{1}{2}\theta(\omega(x)y + \omega(y)x) + (1-\theta)\omega(y)T(x) + \omega(xy)(\theta\omega(x)x \right. \\ \left. + (1-\theta)\omega(x)T(x))\right) + (1-\theta)\omega(x^2)\left(\frac{1}{2}\theta(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x)) \right. \\ \left. + (1-\theta)\omega(y)T^2(x)\right)$$

et

$$(x^2y)x = \frac{1}{4}\theta(2 + \theta^2)\omega(x^2y)x + \frac{1}{4}\theta^2\omega(x)^3y + \frac{1}{4}(1 - \theta)(4 + \theta^2)\omega(x^2y)T(x) + \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)\omega(x)^3T(y).$$

De l'équation $(x^2y)x = x^2(yx)$ il vient que $\frac{1}{4}\theta(\theta - 1)(\theta - 2)\omega(x^2y)x + \frac{1}{4}(1 - \theta)(\theta^2 - 6\theta + 4)\omega(x^2y)T(x) = (1 - \theta)^2\omega(x^2y)T^2(x)$. Si $\omega(x) = 0$ ou $\omega(y) = 0$ alors $(x^2y)x = x^2(yx) = 0$. Sinon, après simplification de la dernière relation par $\omega(x^2y)$ on obtient (1). D'autre part, les calculs donnent

$$\begin{aligned} x(yx^2) &= \frac{1}{4}\theta(\theta^2 + 2)\omega(x^2y)x + \frac{1}{4}\theta^2\omega(x)^3y + \frac{5}{4}\theta^2(1 - \theta)\omega(x^2y)T(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)\omega(x)^3T(y) + 2\theta(1 - \theta)^2\omega(x^2y)T^2(x) \\ &\quad + (1 - \theta)^3\omega(x^2y)T^3(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (xy)x^2 &= \frac{3}{4}\theta^2\omega(x^2y)x + \frac{1}{4}\theta^2\omega(x)^3y + \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)\omega(x)^3T(y) \\ &\quad + \frac{3}{2}\theta(1 - \theta)\omega(x^2y)T(x) + (1 - \theta)^2T^2(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x(yx^2) - (xy)x^2 &= \frac{1}{4}\theta(\theta - 1)(\theta - 2)\omega(x^2y)x + \frac{1}{4}\theta(1 - \theta)(5\theta - 6)\omega(x^2y)T(x) \\ &\quad + (1 - \theta)^2(2\theta - 1)\omega(x^2y)T^2(x) + (1 - \theta)^3\omega(x^2y)T^3(x). \end{aligned}$$

Encore une fois, on voit que si x ou y est dans $\text{Ker}(\omega)$, on a $x(yx^2) = (xy)x^2 = 0$. Sinon après simplification par $\omega(x^2y)$, on obtient l'équation (2).

Corollaire 5.6. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la K -algèbre A_θ soit de Jordan est que A_θ soit de l'un des types suivants : (1) $T = I$, (2) $\theta = 1$, (3) $\theta = 0$ et $T^2 = T$, (4) $\theta = 2\xi$ et $(T - I)((2\xi - 1)T + \xi(\xi - 1)I) = 0$ où ξ est une racine cubique de l'unité dans K .*

Si $\theta = 1$ ou $T = I$, l'endomorphisme identité de A , c'est immédiat. Supposons alors $\theta \neq 1$ et cherchons le polynôme minimal du système (1) et (2) du théorème 5.5. Si l'on écrit les polynômes associés sous la forme $(x - 1)(2(\theta - 1)x - \theta + \frac{1}{2}\theta^2) = 0$ et $(x - 1)((2(\theta - 1)x - \theta)^2 - 2\theta) = 0$ on déduit que $(\frac{1}{2}\theta^2)^2 = 2\theta$ soit $\theta^4 = 8\theta$ ou $\theta(\theta^3 - 8) = 0$, donc $\theta = 0$ ou $\theta^3 = 8$. Si $\theta = 0$ l'équation minimale du système est

$x^2 - x = 0$ sinon, c'est-à-dire, si $\theta^3 = 8$, $\theta = 2\xi$ où ξ est une racine cubique de l'unité dans K et $(x - 1)((2\xi - 1)x + \xi(\xi - 1)) = 0$ est l'équation minimale.

En particulier, si $K = \mathbf{R}$, alors $\xi = 1$ donc $\theta = 2$ et $T^2 = T$, c'est-à-dire, l'unique algèbre réelle d'autofécondation qui est de Jordan est l'algèbre A_2 dont la multiplication s'écrit $xy = \omega(x)y + \omega(y)x - \omega(x)T(y)$ pour x, y parcourant A_2 .

Exemple 5.7. *L'algèbre A_0 .* On a $xy = \omega(x)T(y)$ avec $T^2 = T$, A_0 est une algèbre associative et si l'on écrit $A_0 = Ke \oplus U \oplus V$ alors $e^2 = e$, $ex = x$, $ey = 0$, $xe = 0$, $xx' = 0$, $xy = 0$, $ye = 0$, $yx = 0$, $yy' = 0$, quels que soient x, x' dans U et y, y' dans V .

Exemple 5.8. *L'algèbre A_2 .* On a $xy = \omega(x)y + \omega(y)x - \omega(x)T(y)$ avec $T^2 = T$, quels que soient x, y dans A_2 et si l'on écrit $A_2 = Ke \oplus U \oplus V$ alors $e^2 = e$, $ex = 0$, $ey = y$, $xe = x$, $xx' = 0$, $xy = 0$, $ye = y$, $yx = 0$ et $yy' = 0$, quels que soient x, x' dans U et y, y' dans V .

Exemple 5.9. *L'algèbre A_θ avec $T = I = id_A$.* La multiplication s'écrit $xy = (1 - \frac{1}{2}\theta)\omega(x)y + \frac{1}{2}\theta\omega(y)x$ pour x, y parcourant A_θ et si l'on écrit $A_\theta = Ke \oplus U$, alors $e^2 = e$, $ex = (1 - \frac{1}{2}\theta)x$, $xe = \frac{1}{2}\theta x$ et $xx' = 0$, quels que soient x, x' dans U .

Théorème 5.10. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A_θ la K -algèbre d'autofécondation de paramètre $\theta \neq 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K -linéaire bijective $\sigma : A_\theta \rightarrow A_\theta$ soit un automorphisme d'algèbres de A_θ est que les conditions suivantes soient vérifiées : 1) $\omega \circ \sigma = \omega$; 2) $\sigma \circ T = T \circ \sigma$.*

Soit $\sigma : A_\theta \rightarrow A_\theta$ une application K -linéaire bijective et supposons que σ soit un automorphisme d'algèbres de A_θ . De l'unicité de la pondération il vient que $\omega \circ \sigma = \omega$. D'autre part, pour x, y dans A_θ on a

$$\sigma(xy) = \frac{1}{2}\theta(\omega(x)\sigma(y) + \omega(y)\sigma(x)) + (1 - \theta)\omega(x)\sigma \circ T(y)$$

et

$$\sigma(x)\sigma(y) = \frac{1}{2}\theta(\omega(x)\sigma(y) + \omega(y)\sigma(x)) + (1 - \theta)\omega(x)T \circ \sigma(y).$$

De l'équation $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$, il vient que $(1 - \theta)\omega(x)(\sigma \circ T - T \circ \sigma)(y) = 0$ quels que soient x et y dans A_θ . Il suffit de prendre x tel que $\omega(x) = 1$ et de simplifier par $(1 - \theta)$ pour avoir $\sigma \circ T = T \circ \sigma$. La réciproque est immédiate.

Théorème 5.11. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A_θ la K -algèbre d'autofécondation de paramètre $\theta \neq 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K -linéaire $d : A_\theta \rightarrow A_\theta$ soit une dérivation de A_θ est que les conditions suivantes soient vérifiées : 1) $\omega \circ d = 0$; 2) $d \circ T = T \circ d$.*

Supposons que $d : A_\theta \rightarrow A_\theta$ soit une K -dérivation de A_θ . On sait qu'il existe un élément e dans A_θ tel que $\omega(e) = 1$, donc pour tout x dans $\text{Ker}(\omega)$, on a $xe = \frac{1}{2}\theta x$. Si l'on dérive on a $d(x)e + xd(e) = \frac{1}{2}\theta d(x)$ et si on y applique ω on a $\omega(d(x)) = \frac{1}{2}\theta\omega(d(x))$. En supposant $\theta \neq 2$ on a $\omega(d(x)) = 0$. Sinon, c'est-à-dire, si $\theta = 2$, pour tout x dans $\text{Ker}(\omega)$ on a $ex = x - T(x)$ et si l'on dérive et après on y applique ω on a $\omega(d \circ T(x)) = 0$. Maintenant, pour x dans $\text{Ker}(\omega)$ on a $x^2 = 0$ et si l'on dérive, on a $2\omega(d(x))x - \omega(d(x))T(x) = 0$. En dérivant cette dernière relation et en y appliquant après ω , on a $\omega(d(x)) = 0$. D'autre part, comme $T(e) - e$ est dans $\text{Ker}(\omega)$, alors $\omega(d \circ T(e)) = \omega(d(e))$ et si l'on dérive la relation $e^2 = \theta e + (1 - \theta)T(e)$ et après on y applique ω , on a $\omega(d(e)) = 0$ donc $\omega \circ d = 0$. La relation $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ quels que soient x, y dans A_θ entraîne, compte tenu de $\omega \circ d = 0$, que $(1 - \theta)\omega(x)(d \circ T - T \circ d)(y) = 0$ quels que soient x, y dans A_θ . Donc $d \circ T = T \circ d$. La réciproque est immédiate.

6. Algèbres de Bernstein-Jordan. Soient K un corps commutatif et (A, ω) une K -algèbre commutative pondérée. On dira que (A, ω) est une *algèbre de Bernstein* si elle vérifie $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$ pour tout x dans A . Il est facile de voir que toute algèbre de Bernstein admet un idempotent non nul.

Lemme 6.1. *Soient K un corps commutatif infini et A une K -algèbre de Bernstein. Quels que soient x, y, z, t dans A on a :*

- (i) $8((xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)yz) = 4(\omega(xy)zt + \omega(zt)xy + \omega(xz)yt + \omega(yt)xz + \omega(xt)yz + \omega(yz)xt)$,
- (ii) $4x^2(yz) + 8(xy)(xz) = 4\omega(xz)xy + 2\omega(yz)x^2 + 2\omega(x^2)yz + 4\omega(xy)xz$,
- (iii) $4(xy)^2 + 2x^2y^2 = 4\omega(xy)xy + \omega(x^2)y^2 + \omega(y^2)x^2$,
- (iv) $4x^2(xy) = 2\omega(x^2)xy + 2\omega(xy)x^2$.

Il suffit de polariser la relation $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$.

Théorème 6.2. *Soient K un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2, $A = A_1(e) \oplus A_{\frac{1}{2}}(e) \oplus A_0(e)$ la décomposition de Peirce de l'algèbre de*

Bernstein A relative à un idempotent e de A . Alors on a : (i) $A_1(e) = Ke$, (ii) $A_{\frac{1}{2}}^2(e) \subset A_0(e)$, $A_0^2(e) \subset A_{\frac{1}{2}}(e)$, (iii) $A_1(e)A_{\frac{1}{2}}(e) = A_{\frac{1}{2}}(e)$, $A_1(e)A_0(e) = 0$, $A_{\frac{1}{2}}(e)A_0(e) \subset A_{\frac{1}{2}}(e)$.

En effet, si la caractéristique de K est différente de 3, l'identité (iv) du lemme 6.1 donne, pour $x = e$, $2e(ey) = ey + \omega(y)e$ soit $\omega(y)e = (2R_e^2 - R_e)(y)$. En multipliant cette identité par e , on a $\omega(y)e = (2R_e^3 - R_e^2)(y)$ et par identification on obtient $2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0$, soit encore $R_e(R_e - I)(2R_e - I) = 0$. Si par contre la caractéristique de K est 3, l'identité (iv) du lemme 6.1 devient $x^2(xy) + \omega(x^2)xy + \omega(xy)x^2 = 0$ et en y faisant $x = e$ puis en multipliant par e on obtient, respectivement, $e(ey) + ey + \omega(y)e = 0$ et $e(e(ey)) + e(ey) + \omega(y)e = 0$. Par différence il vient que $R_e - R_e^3 = 0$, qui peut encore s'écrire $R_e(R_e - I)(2R_e - I) = 0$. Il suffit donc que la caractéristique de K soit différente de 2 pour avoir $R_e(R_e - I)(2R_e - I) = 0$. Les valeurs propres de l'opérateur R_e étant $0, \frac{1}{2}$ et 1 , on peut alors écrire $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$, somme directe des sous-espaces propres A_i associés aux valeurs propres i ($i = 1, 1/2, 0$). Si l'on fait $x = e$ dans (ii), lemme 6.1, on obtient $2e(yz) + 4(ey)(ez) = 2\omega(ey)ez + 2\omega(ez)ey + yz + \omega(yz)e$ et comme $(2R_e^2 - R_e)(yz) = \omega(yz)e$, alors $(2R_e^2 - 3R_e + I)(yz) = 4(ey)(ez) - 2\omega(ey)ez - 2\omega(ez)ey$. Pour y et z tels que $ey = \lambda y$ et $ez = \mu z$ avec $\lambda, \mu = 0, \frac{1}{2}, 1$, cette dernière relation donne $(2R_e^2 - 3R_e + I)(yz) = \lambda\mu(4yz - 2\omega(y)z - 2\omega(z)y)$. Si $\lambda\mu = 0$ alors $(2R_e^2 - 3R_e + I)(yz) = 0$ et en revenant à (ii), lemme 6.1, on a $2R_e(yz) = yz$, donc $yz \in A_{\frac{1}{2}}$, d'où les relations $A_1A_0 \subset A_{\frac{1}{2}}$, $A_{\frac{1}{2}}A_0 \subset A_{\frac{1}{2}}$, et $A_0^2 \subset A_{\frac{1}{2}}$. Remarquons que pour x dans A_λ , $\omega(ex) = \omega(x) = \lambda\omega(x)$ entraîne $(1 - \lambda)\omega(x) = 0$, soit $\lambda = 1$ ou $\omega(x) = 0$. Donc $A_{\frac{1}{2}} \subset \text{Ker}(\omega)$ et $A_0 \subset \text{Ker}(\omega)$. Soit maintenant x dans $\text{Ker}(\omega)$; la relation $(2R_e^2 - R_e)(x) = \omega(x)e$ nous dit alors que x est dans $A_0 + A_{\frac{1}{2}}$. Donc $\text{Ker}(\omega) = A_0 + A_{\frac{1}{2}}$ et on en déduit que $A_1 = Ke$ car $A = Ke \oplus \text{Ker}(\omega)$ est vrai dans toute algèbre pondérée. Soient y, z dans $A_{\frac{1}{2}}$, $\omega(y) = \omega(z) = 0$ et (ii), lemme 6.1, donne $2e(yz) + yz = yz$, soit $e(yz) = 0$ et ceci nous dit que $A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_0$. Enfin, puisque $A_1 = Ke$ alors $A_1^2 = A_1$, $A_1A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}}$ et $A_1A_0 = 0$.

En fait, revenant toujours au lemme 6.1, on peut déduire toutes les identités concernant les algèbres de Bernstein (cf. [3]).

Si A est à la fois de Bernstein et de Jordan, de l'unicité de la décomposition de Peirce relative à l'idempotent e , il vient que $A_0^2 \subset A_{\frac{1}{2}} \cap A_0 = 0$ et $(xy)z + (xz)y = 0$, quels que soient x dans $A_{\frac{1}{2}}$ et y, z dans A_0 (cf. lemme 6.5).

Si la caractéristique de K est différente de 2, pour tout idempotent e de A , on peut écrire la décomposition de A en somme directe de sous- K -espaces vectoriels

$A = Ke \oplus U \oplus V$ vérifiant les conditions : $U^2 \subset V$, $V^2 \subset U$, $UV \subset U$, $UV^2 = 0$, $ex = 0$ pour tout x dans V , $ex = \frac{1}{2}x$ pour tout x dans U . Ces notations seront conservées par la suite. Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 6.3. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) la K -algèbre commutative pondérée. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) A est une algèbre de Bernstein et de Jordan ; (ii) Pour tout x dans A , $x^3 = \omega(x)x^2$. Si, de plus, la caractéristique de K est aussi différente de 3, ces conditions sont équivalentes à la suivante : (iii) A est une algèbre de Bernstein à puissances associatives.*

La démonstration de ce théorème dépend d'un certain nombre de lemmes que nous démontrerons préalablement.

Lemme 6.4. *Si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K -algèbre de Bernstein, les conditions suivantes sont équivalentes : (i) Pour tout x dans A , $x^3 = \omega(x)x^2$; (ii) $V^2 = 0$ et quels que soient z dans U et x, y dans V , on a $x(yz) + y(xz) = 0$.*

En effet, si l'on polarise la relation donnée en (i) on a $x^2y + 2x(xy) = \omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy$ quels que soient x, y dans A et si l'on prend $y = e$ et x dans V ceci nous donne $x^2 = 0$, donc $xy = 0$ quels que soient x, y dans V , soit encore $V^2 = 0$. De plus, pour x dans V et z dans U , la relation $x^2z + 2x(xz) = \omega(z)x^2 + 2\omega(x)xz$ nous donne $x(xz) = 0$ d'où, en remplaçant x par $x + y$ avec x et y dans V , on déduit que $x(yz) + y(xz) = 0$. Ceci nous montre que (i) \Rightarrow (ii). Réciproquement, si $x = \omega(x)e + y + z$ est un élément de A où y est dans U et z est dans V alors $x^2 = \omega(x)^2e + \omega(x)y + y^2 + 2yz$ et $x^3 = \omega(x)^3e + \omega(x)^2y + 2\omega(x)yz + \omega(x)y^2 + y^3 + 2y(yz)$. On a $y(yz) = 0$ pour tout y dans U et pour tout z dans V . D'autre part, le lemme 6.1. nous dit que $2y^2(yt) = \omega(y)^2yt + \omega(yt)y^2$ quels que soient y, t dans A , donc si l'on prend y dans U et $t = e$ on a $y^3 = 0$ pour tout y dans U . On a donc $x^3 = \omega(x)x^2$.

Lemme 6.5. *Si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K -algèbre de Bernstein, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre de Jordan ; (ii) $V^2 = 0$ et pour tout z dans U et quels que soient x, y dans V , on a $x(yz) + y(xz) = 0$.

En effet, si la condition (ii) est vérifiée, d'après le lemme 6.4 on a $x^2y + 2x(xy) = \omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy$ quels que soient x, y dans A . D'un côté on remplace ici y par xy et d'autre part on multiplie cette relation par x . On a, respectivement, $x^2(xy) + 2x(x(xy)) = \omega(xy)x^2 + 2\omega(x)x(xy)$ et $x(x^2y) + 2x(x(xy)) = \omega(y)x^3 + 2\omega(x)x(xy)$. Compte tenu du fait que $x^3 = \omega(x)x^2$ on déduit que $x^2(xy) = x(x^2y)$ quels que soient x et y dans A . Donc (ii) \Rightarrow (i). Si A est une algèbre de Jordan on sait (cf. [13], page 33) que, quels que soient x, y, z, t dans A on a $(xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = (x(yz))t + (x(zt))y + (x(ty))z$ et si l'on y fait $x = y = e$ et on prend z, t dans V , alors $e(zt) = (e(zt))e$. Comme zt est dans U , alors $\frac{1}{2}zt = \frac{1}{4}zt$ d'où $zt = 0$ quels que soient z, t dans V . D'autre part, si dans la relation écrite on prend $x = e, y$ dans U et z, t dans V on a la seconde condition de (ii). Ceci nous montre que (i) \Rightarrow (ii).

Lemme 6.6. Soient K un corps commutatif infini et A une K -algèbre commutative. Si A est une K -algèbre à puissances associatives, quels que soient x, y, z et t dans A , on a :

- (i) $8((xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz)) = 2(J(x, y, z)t + J(y, z, t)x + J(z, t, x)y + J(t, x, y)z)$,
- (ii) $4x^2(yz) + 8(xy)(xz) = 2x(x(yz)) + 2x(y(xz)) + 2x(z(xy)) + 2y(x(xz)) + 2z(x(xy)) + (x^2z)y + (x^2y)z$,
- (iii) $4(xy)^2 + 2x^2y^2 = x(xy^2) + 2x(y(yx)) + 2y(x(xy)) + y(yx^2)$,
- (iv) $4x^2(xy) = x(x^2y) + 2x(x(xy)) + x^3y$, où $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ est le Jacobien de A .

En effet, on sait que pour tout x dans A , $x^4 = (x^2)^2$. Il suffit de polariser cette relation.

Lemme 6.7. Soient K un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2 et 3 et (A, ω) une K -algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) L'algèbre A est à puissances associatives ; (ii) Pour tout x dans A , $x^3 = \omega(x)x^2$.

En effet (ii) \Rightarrow (i) est immédiate car toute algèbre de Jordan est à puissances associatives. Montrons que (i) \Rightarrow (ii). Si l'on prend $x = e$ et y dans V dans la

relation (iii) du lemme 6.6, on a $y^2 = 0$ d'où $V^2 = 0$, et en prenant x dans U , y dans V et $t = e$ dans la relation (i) du lemme 6.6, il vient que $3((xy)z + (xz)y) = 0$ donc $(xy)z + (xz)y = 0$. Du lemme 6.4, on déduit (ii).

Le théorème 6.3 s'obtient par application des lemmes. En effet, des lemme 6.4 et lemme 6.5, on déduit que (ii) équivaut à (i) et si la caractéristique de K est différente de 3, alors le lemme 6.7 nous dit que (iii) équivaut à (ii).

6.8. Exemples d'algèbres de Bernstein-Jordan. On suppose que K soit ici un corps de caractéristique différente de 2 et que les algèbres considérées soient des algèbres sur K .

1. L'algèbre gamétique $A = G(n+1, 2)$ d'une population diploïde à $n+1$ allèles définie au paragraphe 3 est une algèbre de Bernstein-Jordan. En effet, si $\omega : A \rightarrow K$ est la pondération de A , sa multiplication s'écrit $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)$, quels que soient x et y dans A d'où $x^3 = \omega(x)x^2$ pour tout x dans A .

2. Soit $A = Z(n+1, 2)$ l'algèbre zygotique formée à partir de l'algèbre $G(n+1, 2)$ par duplication. Ses éléments de base sont les couples (x, y) formés d'éléments de $G(n+1, 2)$ avec la multiplication $(x, y)(x', y') = (xy, x'y')$ quels que soient x, y, x', y' dans $G(n+1, 2)$. On vérifie (cf. [11], proposition 4) que $Z(n+1, 2)$ est encore une algèbre de Bernstein-Jordan.

3. Soit $A = A_{T, \omega}$ l'algèbre définie au paragraphe 4, avec $\omega \circ T = \omega$ et $T^2 = T$. La multiplication de A s'écrit $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x))$, quels que soient x et y dans A donc $x^3 = \omega(x)x^2$ pour tout x dans A . Ceci nous montre que A est une algèbre de Bernstein-Jordan.

4. Toute algèbre conservative (cf. 4.1) est une algèbre de Bernstein-Jordan.

5. Soit (A, ω) une algèbre de Bernstein nucléaire, i.e. $A^2 = A$. L'annulateur $\text{Ann}(\text{Ker}(\omega))$ du noyau de ω est un idéal de A et l'algèbre quotient $B = A/\text{Ann}(\text{Ker}(\omega))$ est à la fois de Bernstein et de Jordan. En effet, pour tout élément x dans B , on a $x^3 = \omega(x)x^2$.

7. Dérivations dans les algèbres de Bernstein-Jordan. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une algèbre de Bernstein-Jordan de dimension $n+1$, de type $(r+1, s)$. On a :

Proposition 7.1. *Soit A une algèbre de Bernstein-Jordan. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K -linéaire $d : A \rightarrow A$ soit une K -dérivation de A est que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $d(e) \in U$, (ii) pour tout x dans U , $d(x) = f_d(x) + 2xd(e)$, où l'application $f : \text{Der}_K(A) \rightarrow \text{End}_K(U)$, $d \mapsto f_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie, (iii) pour tout

x dans V , $d(x) = -2xd(e) + g_d(x)$, où l'application $g : \text{Der}_K(A) \rightarrow \text{End}_K(V)$, $d \mapsto g_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie, (iv) $g_d(xy) = x f_d(y) + y f_d(x)$, quels que soient x et y dans U , (v) $f_d(xy) = x g_d(y) + f_d(x)y$, quels que soient x dans U et y dans V .

Pour la démonstration, voir [3] théorème 3.1. en tenant compte, en plus, du fait que $V^2 = 0$ et $x(yz) + y(xz) = 0$, quels que soient x et y dans V et z dans U .

Théorème 7.2. *Soit A une algèbre de Bernstein-Jordan de type $(r + 1, s)$. Alors $\text{Derint}_K(A) = L(\text{Ann}(UV) \cap V) + [L(A), L(A)]$. De plus, il existe un entier ρ , $r + 1 \leq \rho \leq n$, tel que $\text{Derint}_K(A)$ soit engendré par la famille $\{L_{e_t}, [L_e, L_{e_k}], [L_{e_i}, L_{e_j}], [L_{e_m}, L_{e_l}]\}$, $t = r + 1, \dots, \rho$, $k = 1, \dots, r$, $1 \leq i < j \leq r$, $r + 1 \leq m < l \leq n$ où $\{e_1, \dots, e_r\}$ est une base de U et $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ est une base de V , $n = r + 1 + s$ étant la dimension de A .*

On sait déjà que $[L(A), L(A)] \subseteq \text{Derint}_K(A)$ (cf. [24]). Soit $x = \alpha e + u + v$ dans A tel que $d = L_x$ soit une dérivation de A . De $\omega \circ d = 0$ il vient que $\alpha = 0$. On a $d(e) = L_{u+v}(e) = \frac{1}{2}u$, soit $u = 2d(e)$. Pour $x \in U$, $d(x) = ux + vx = 2d(e)x + vx$ et (ii) nous dit alors que $f_d = L_v$. Pour $x \in V$, $d(x) = ux = 2d(e)x$ et (iii) nous dit que $g_d = 0$ et $2d(e)x = -2d(e)x$, soit $d(e)x = 0$, quel que soit x dans V , donc $d(e) \in \text{Ann}(V)$, i.e., $u \in \text{Ann}(V) \cap U$. De (v), il vient que, pour x dans U , y dans V , $f_d(xy) = f_d(x)y$ soit $v(xy) = (vx)y$. Or, $v(xy) = -y(vx)$ ((ii) du lemme 6.4), donc $v(xy) = 0$, quels que soient x dans U , y dans V . Ainsi $v \in \text{Ann}(UV) \cap V$. Mais si $u \in \text{Ann}(V) \cap U$ alors $L_u = 2[L_u, L_e]$, donc $L(\text{Ann}(UV) \cap U) \subseteq [L(A), L(A)]$ et $\text{Derint}_K(A) = L(\text{Ann}(UV) \cap V) + [L(A), L(A)]$. Soient maintenant $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de U et $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ une base de V telle que $\{e_{r+1}, \dots, e_\rho\}$ soit une base de $\text{Ann}(UV) \cap V$. Posons $d_{0k} = [L_e, L_{e_k}]$ et $d_{ij} = [L_{e_i}, L_{e_j}]$, $k = 1, \dots, r$, $1 \leq i < j \leq n$. On a $d_{0i}(e_k) = -\frac{1}{2}e_i e_k$, $k = 1, \dots, r$ et $d_{0i}(e_j) = \frac{1}{2}e_i e_j$, $j = r + 1, \dots, n$. Les applications d_{ij} sont de trois types :

(I) Si $1 \leq i < j \leq r$, on a $d_{ij}(e) = 0$, $d_{ij}(e_k) = e_i(e_j e_k) - e_j(e_i e_k) = 2e_i(e_j e_k) + (e_i e_j)e_k$ (identité de Jacobi dans U) ($k = 1, \dots, r$) et $d_{ij}(e_k) = e_i(e_j e_k) - e_j(e_i e_k) = 2e_i(e_j e_k)$ ($k = r + 1, \dots, n$).

(II) Si $r + 1 \leq i < j \leq n$, on a $d_{ij}(e) = 0$, $d_{ij}(e_k) = 0$ ($k = r + 1, \dots, n$) et $d_{ij}(e_k) = e_i(e_j e_k) - e_j(e_i e_k) = 2e_i(e_j e_k)$ ($k = 1, \dots, r$).

(III) Si $1 \leq i \leq r$ et $r + 1 \leq j \leq n$, on a $d_{ij}(e) = -\frac{1}{2}e_i e_j$, $d_{ij}(e_k) = e_i(e_j e_k) - e_j(e_i e_k) = -e_j(e_i e_k)$ ($k = 1, \dots, r$) et $d_{ij}(e_k) = e_i(e_j e_k) - e_j(e_i e_k) = (e_i e_j)e_k$

($k = r + 1, \dots, n$) mais en fait, si la table de multiplication dans A est donnée par $e_i e_j = \sum_{k=r+1}^n \gamma_{ijk} e_k$ ($1 \leq i \leq j \leq r$) et $e_i e_j = \sum_{k=1}^r \mu_{ijk} e_k$ ($1 \leq i \leq r$, $r + 1 \leq j \leq n$), $e e_i = \frac{1}{2} e_i$ les autres produits étant nuls, alors on a, pour $1 \leq i \leq r$ et $r + 1 \leq j \leq n$, $d_{ij}(e) = -\frac{1}{2} e_i e_j = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \mu_{ijk} e_k = 2 \sum_{k=1}^r \mu_{ijk} d_{0k}(e)$,

$$d_{ij}(e_l) = -(e_i e_j) e_l = -\sum_{k=1}^r \mu_{ijk} e_k e_l = 2 \sum_{k=1}^r \mu_{ijk} d_{0k}(e_l) \quad (1 \leq l \leq r), \quad d_{ij}(e_l) = (e_i e_j) e_l = \sum_{k=1}^r \mu_{ijk} e_k e_l = 2 \sum_{k=1}^r \mu_{ijk} d_{0k}(e_l) \quad (r+1 \leq l \leq n),$$

donc $d_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n \mu_{ijk} d_{0k}$.

Si d est une dérivation intérieure, il existe $a = \alpha_0 e + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $b = \beta_0 e + \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$

et $c = \sum_{i=r+1}^{\rho} \gamma_i e_i$ dans A tels que

$$\begin{aligned} d = L_c + [L_a, L_b] &= \sum_{i=r+1}^{\rho} \gamma_i L_{e_i} + \sum_{i=1}^r (\alpha_0 \beta_i - \alpha_i \beta_0) [L_a, L_{e_i}] \\ &+ \sum_{i \leq i < j \leq n} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) [L_{e_i}, L_{e_j}] = \\ &\sum_{i=r+1}^{\rho} \gamma_i L_{e_i} + \sum_{k=1}^n (\alpha_0 \beta_k - \alpha_k \beta_0 + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^n (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) \mu_{ijk}) d_{0k} \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq r} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) d_{ij} + \sum_{r+1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) d_{ij}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que les d_{ij} du type (I) et du type (II) sont des blocs linéairement indépendants des d_{0k} , c'est-à-dire, qu'ils ne peuvent pas se réduire comme on l'a fait avec le type (III). Ils ne peuvent pas non plus s'exprimer l'un en fonction de l'autre. La famille $\{L_{e_t}, d_{0k}, d_{ij}, d_{sl}\}$ ($t = r + 1, \dots, \rho$, $k = 1, \dots, r$, $1 \leq i < j \leq r$, $r + 1 \leq s < l \leq n$) contient une famille génératrice minimale qui est une base de $\text{Derint}_K(A)$.

Remarque 7.3. Si l'on fait $f_d = 0$ et $g_d = 0$, la dérivation correspondante vérifie $d(x) = 2d(e)x$, pour tout x dans U et $d(x) = -2xd(e)$ pour tout x dans V . On voit alors que $d = -4[L_e, L_{d(e)}]$: ce sont les dérivations intérieures engendrées par $\{d_{0k}\}$ ($k = 1, \dots, r$).

Corollaire 7.4. Soit A une algèbre de Bernstein-Jordan de type $(r + 1, s)$. Si A est conservative alors $\text{Derint}_K(A) = \langle d_{01}, \dots, d_{0r} \rangle$.

En effet, A conservative entraîne que $UV = 0$ et il suffit de voir que les applications d_{ij} de type (I) et (II) sont identiquement nulles et $L(V) = 0$ ($\text{Ann}(UV) \cap V = V$).

Exemple 7.5. La réciproque du corollaire 7.4 n'est pas vraie. En effet, soit A la K -algèbre de dimension 5 dont une base $\{e, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vérifie $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = \frac{1}{2}e_2$, $e_1e_4 = \alpha e_2$, $e_2e_4 = 0$, les autres produits étant nuls avec α non nul. Comme A est de Bernstein-Jordan et $U^2 = 0$ alors $d_{12} = 0$. On vérifie ensuite que $d_{34} = 0$. Donc $\text{Derint}_K(A)$ est de dimension 2.

Théorème 7.6. Soit A une algèbre de Bernstein-Jordan de type $(1 + r, s)$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $\dim_K(H^1(A)) = r^2 + s^2$ et $H^1(A) \simeq \text{End}_K(U) \times \text{End}_K(V)$, (ii) $U^2 = 0$, $UV = 0$, (iii) il existe un projecteur $T : A \rightarrow A$ vérifiant $\omega \circ T = \omega$, $\dim_K(\text{Im}(T)) = 1 + r$, tel que $A = A_{T, \omega}$.

(i) \Rightarrow (ii). De (i) on déduit que $\dim_K(\text{Derint}_K(A)) = r$. De la remarque 7.3., il vient alors que, pour toute dérivation d de $H^1(A)$, $f_d = d|_U$ et $g_d = d|_V$. Il suffit de faire $f = id_U$ et $g = id_V$ pour voir, respectivement de (iv) et (v) de la proposition 7.1, que $U^2 = 0$ et $UV = 0$.

(ii) \Rightarrow (iii). On pose $T(x) = \omega(x)e + y$, pour tout $x = \omega(x)e + y + z$ dans A , où y est dans U et z dans V . On a $\omega \circ T = \omega$, $\text{Im}(T) = Ke \oplus U$ et si $x' = \omega(x')e + y' + z'$ est un autre élément de A , alors $xx' = \omega(x)\omega(x')e + \frac{1}{2}(\omega(x)y' + \omega(x')y) = \frac{1}{2}(\omega(x)(\omega(x')e + y') + \omega(x')(\omega(x)e + y)) = \frac{1}{2}(\omega(x)T(x') + \omega(x')T(x))$.

(iii) \Rightarrow (i). D'après le théorème 4.7, avec $t = 0$.

8. La dupliquée d'une algèbre.

8.1. Propriété universelle. Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K -algèbre commutative, non nécessairement associative ni ayant un élément unité. On dira qu'une K -algèbre commutative D est une *dupliquée* de A s'il existe une application quadratique $f : A \rightarrow D$ telle que $\varphi(x, x')\varphi(y, y') = \varphi(xx', yy')$ quels que soient x, x', y, y' dans A , où $\varphi : A \times A \rightarrow D$, $(x, y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ est l'application K -bilinéaire symétrique associée à f . De plus, pour toute K -algèbre commutative B et pour toute application quadratique $g : A \rightarrow B$ telle que $\psi(x, x')\psi(y, y') = \psi(xx', yy')$, quels que soient x, x', y, y' dans A , où $\psi : A \times A \rightarrow B$ est l'application K -bilinéaire symétrique associée à g , il existe un morphisme,

unique, de K -algèbres $\bar{g} : D \rightarrow B$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \parallel \\ D & \xrightarrow{\bar{g}} & B \end{array}$$

Il est clair que si un tel objet existe, il est unique à isomorphisme près ou encore, si (D, f) et (D', f') sont deux dupliques de la même K -algèbre A , alors les K -algèbres D et D' sont isomorphes. Pour l'existence, on suppose que 2 soit inversible dans K et on procède comme suit. On considère le K -module $S_K^2(A)$, seconde puissance symétrique du K -module A et soit $f : A \rightarrow S_K^2(A), x \mapsto \frac{1}{2}x \cdot x$ (produit symétrique de x par x). La structure de K -algèbre de $S_K^2(A)$ est donnée par $(x \cdot x')(y \cdot y') = xx' \cdot yy'$, quels que soient x, x', y, y' dans A , donc $\varphi(x^2, y^2) = (x \cdot x)(y \cdot y)$, quels que soient x, y dans A , où $\varphi : A \times A \rightarrow S_K^2(A), (x, y) \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$ est l'application K -bilinéaire symétrique associée à f . Ainsi, l'identité $f(x + x')f(y) = \frac{1}{4}\varphi((x + x')^2, y^2)$ donne $\varphi(x, x')f(y) = \frac{1}{2}\varphi(xx', y^2)$ et par suite $\varphi(x, x')\varphi(y, y') = \varphi(xx', yy')$ quels que soient $x, x', y, y' \in A$. Soient maintenant B une K -algèbre commutative, $g : A \rightarrow B$ une application quadratique et $\psi : A \times A \rightarrow B, (x, y) \mapsto g(x + y) - g(x) - g(y)$ l'application K -bilinéaire symétrique associée à g . On sait qu'il existe alors une application K -linéaire unique $\bar{g} : D \rightarrow B$ telle que $\bar{g} \circ f = g$ donc $\bar{g}(f(x)f(y)) = \frac{1}{4}\bar{g}(\varphi(x^2, y^2)) = \frac{1}{4}\bar{g}(f(x^2 + y^2) - f(x^2) - f(y^2)) = \frac{1}{4}(g(x^2 + y^2) - g(x^2) - g(y^2)) = \frac{1}{4}\psi(x^2, y^2) = g(x)g(y) = (\bar{g} \circ f)(x)(\bar{g} \circ f)(y)$, quels que soient x, y dans A . Ainsi \bar{g} est un morphisme de K -algèbres.

Par la suite, on dira tout simplement que la K -algèbre $S_K^2(A)$ est la *dupliquée* de A et on la note $D(A)$.

Théorème 8.2. (d'Etherington). Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible, A une K -algèbre commutative et $D(A)$ sa dupliquée. Il existe un morphisme surjectif de K -algèbres $D(A) \rightarrow A^2$ tel que, si N est son noyau alors $ND(A) = 0$ et il existe un isomorphisme de K -algèbres $D(A)/N \xrightarrow{\sim} A^2$.

On associe à chaque élément $x \cdot y$ de $D(A)$ l'élément xy de A . Comme pour x et y parcourant A les éléments xy engendrent A^2 en tant qu'idéal de A ,

l'application K -linéaire $\mu : D(A) \rightarrow A^2, x \cdot y \mapsto xy$ est surjective. De plus, l'égalité $(x \cdot x')(y \cdot y') = (xx') \cdot (yy')$, quels que soient x, x', y, y' dans A , entraîne que μ est un morphisme de K -algèbres. Il existe alors un isomorphisme de K -algèbres $D(A)/N \xrightarrow{\sim} A^2$. Enfin, si $x \cdot x'$ est dans N , $0 = \mu(x \cdot x') = xx'$ et pour tout $y \cdot y'$ dans $D(A)$ on a $(x \cdot x')(y \cdot y') = (xx') \cdot (yy') = 0$, donc $ND(A) = 0$.

Corollaire 8.3. *Si A est une K -algèbre telle que A^2 soit un K -module projectif, il existe un isomorphisme de K -algèbres $D(A) \xrightarrow{\sim} A^2 \times_{s.d.} N$, produit semi-direct de K -algèbres.*

Le K -module A^2 étant projectif, la suite exacte $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} D(A) \xrightarrow{\mu} A^2 \rightarrow 0$ est scindée et $ND(A) = 0$ nous dit alors que $D(A) = A^2 \times_{s.d.} N$ où la multiplication dans $D(A)$ est donnée par $(x, m)(y, n) = (xy, \varphi(x, y) + \eta(x, y)n)$, quels que soient x, y dans A^2 et m, n dans N et où $\varphi : A^2 \times A^2 \rightarrow N$ est l'application K -bilinéaire symétrique définie par $(x, y) \mapsto \eta(xy) - \eta(x)\eta(y)$, $\eta : A^2 \rightarrow D(A)$ étant une application K -linéaire telle que $\mu \circ \eta = \text{id}_{A^2}$. Il est évident que l'isomorphisme cité dans le corollaire ne dépend pas du choix de η . Dans toute la suite, A^2 sera un K -module projectif.

Exemple 8.4 Soient $A = \langle 1, i \rangle$ l'algèbre des nombres complexes où $1^2 = 1$, $1i = i1 = i$, $i^2 = -1$ et $D(A) = \langle 1 \cdot 1, 1 \cdot i, i \cdot i \rangle$ sa dupliquée avec comme table de multiplication celle donnée par le tableau 1 :

	a	b	c
$a = 1 \cdot 1$	a	b	$-a$
$b = 1 \cdot i$	b	c	$-b$
$c = i \cdot i$	$-a$	$-b$	a

Tableau 1

	a	b	c'
a	a	b	0
b	b	$c' - a$	0
c'	0	0	0

Tableau 2

Comme $A^2 = A$, si l'on pose $c' = a + c$ alors $N = \langle c' \rangle$ et le tableau 2 nous donne la structure d'algèbre de $A^2 \times_{s.d.} N$ avec, $\varphi(a, a) = \varphi(a, b) = 0$ et $\varphi(b, b) = c'$, où $a = 1$ et $b = i$.

Remarque 8.5 (i) Si 2 n'est pas inversible dans K et, en particulier, si 2 est égal à zéro dans K , on peut encore définir la dupliquée d'une K -algèbre commutative

A comme étant $S_K^2(A)$ mais l'unicité de la dupliquée en tant que solution d'un problème universel ne subsiste plus.

(ii) Si A est une K -algèbre commutative où K est un corps commutatif et si $\dim_K(A) > 1$ alors $N \neq 0$.

(iii) Soient K un anneau commutatif à élément unité et (A, ω) une K -algèbre pondérée commutative. Si $D(A)$ désigne une dupliquée de A , alors $D(A)$ est encore une algèbre pondérée pour laquelle la pondération est le morphisme composé évident $D(A) \rightarrow A^2 \hookrightarrow A \xrightarrow{\omega} K$.

Le fait qu'une algèbre commutative A soit de Jordan n'entraîne pas que $D(A)$ soit aussi de Jordan. De même, $D(A)$ peut être de Jordan sans que A le soit.

Lemme 8.6. Soient K un anneau commutatif à élément unité dans lequel 2 est inversible et A une K -algèbre commutative. Une condition nécessaire et suffisante pour que $D(A)$ soit de Jordan est que (i) la K -algèbre A^2 soit de Jordan et (ii) l'application K -bilinéaire symétrique $\varphi : A^2 \times A^2 \rightarrow N$ vérifie $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, xy)$, quels que soient x, y dans A^2 .

En effet, $D(A)$ étant identifiée à $A^2 \times_{s.d.} N$, pour tout x, y dans A^2 et pour tout m, n dans N on a

$$\begin{aligned} ((x, m)^2(y, n))(x, m) &= ((x^2, \varphi(x, x))(y, n))(x, m) = (x^2y, \varphi(x^2, y))(x, m) \\ &= ((x^2y)x, \varphi(x^2y, x)) \end{aligned}$$

et

$$(x, m)^2((y, n)(x, m)) = (x^2, \varphi(x, x))(yx, \varphi(y, x)) = (x^2(yx), \varphi(x^2, yx)).$$

L'égalité $((x, m)^2(y, n))(x, m) = (x, m)^2((y, n)(x, m))$ équivaut à $(x^2y)x = x^2(yx)$ et $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, yx)$, quels que soient x et y dans A^2 .

Proposition 8.7. Soient K un corps commutatif, A un K -espace vectoriel de dimension finie, $T : A \rightarrow A$ un opérateur K -linéaire et $\omega : A \rightarrow K$ une forme linéaire surjective telle que $\omega \circ T = \omega$. Si $T^2 = T$ alors $D(A_{T, \omega})$ est de Jordan.

En effet, $T^2 = T$ entraîne que $A_{T, \omega}$ est conservative, c'est-à-dire, elle vérifie $x^2y = \omega(x)xy$, quels que soient x et y dans $A_{T, \omega}$. Si l'on suppose que $\dim_K(\text{Im}(T)) = 1 + r$, alors $A_{T, \omega}^2 \simeq G(1 + r, 2)$, isomorphisme de K -algèbres de

Jordan. Ainsi, quels que soient x et y dans $A_{T,\omega}^2$, on a $x^2 = \omega(x)x$, $x^2y = \omega(x)xy$. Du corollaire 8.3 et du fait que φ est K -bilinéaire symétrique il vient que $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, xy)$.

Exemple 8.8. Un exemple bien connu est le cas où $T = id_A$, alors $A_{id_A,\omega} = G(n, 2)$, $\dim_K(N) = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $Z(n, 2) = D(G(n, 2))$ est de Jordan. Mais, bien que $Z(n, 2)$ soit de Jordan $D(Z(n, 2))$ ne l'est pas. En effet, $A = Z(n, 2)$ étant une algèbre conservative, dès que x est dans $\text{Ker}(\omega)$, x^2 est dans l'annulateur de A . Pour un tel x , on a $x^2y = 0$ pour tout y dans A donc $\varphi(x^2y, x) = 0$ pour tout y dans A . Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de A en somme directe de sous- K -modules relativement à un idempotent e , où $U^2 = V$, $UV = V^2$, $eV = 0$ et $ey = \frac{1}{2}y$ quel que soit y dans U . Pour x et y des éléments de la base canonique de U , $\varphi(x^2, xy) = \varphi(\frac{1}{4}x \cdot x, \frac{1}{4}x \cdot y) = \frac{1}{16}\varphi(x \cdot x, x \cdot y) = \frac{1}{16^2}v$ où $x \cdot x$ et $x \cdot y$ dénotent les éléments de la base canonique de V provenant des produits x^2 et xy et v est un élément de la base canonique de N . Ainsi, la condition (ii) du lemme 8.6 n'est pas vérifiée.

Ce contre-exemple est donné dans [4], page 83 pour $n = 2$, où l'Auteur montre que $Z(2, 2)$ n'est pas à puissances associatives. Un autre contre-exemple est celui de l'algèbre des nombres complexes \mathbf{C} de l'exemple 8.4. L'algèbre $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}$ est de Jordan en tant qu'algèbre associative mais $\varphi(b^3, b) = -\varphi(b, b) = -c'$ tandis que $\varphi(b^2, b^2) = \varphi(a, a) = 0$. Donc $D(\mathbf{C})$ n'est pas de Jordan.

Exemple 8.9. Nous donnerons ici un exemple d'algèbre non de Jordan dont la dupliquée est de Jordan. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A une K -algèbre de Bernstein et $A = Ke \oplus U \oplus V$ sa décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$. Supposons que $U^2 = 0$ et $V^2 \neq 0$. Alors A n'est pas de Jordan car sinon $V^2 = 0$ (cf. lemme 6.5). On a $A^2 = Ke \oplus U$ car $UV \subset U$ et $V^2 \subset U$ et A^2 est isomorphe à $G(1+r, 2)$ où $r = \dim_K(U)$, donc $x^2 = \omega(x)x$ et $x^2y = \omega(x)xy$ quels que soient x et y dans A^2 . La relation $\varphi(x^2y, x) = \varphi(x^2, yx)$ devenant immédiate le lemme 8.6 nous dit alors que $D(A)$ est de Jordan.

9. Algèbres de Jordan spéciales. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K -algèbre associative non commutative. On définit sur le K -espace vectoriel sous-jacent à A une nouvelle multiplication $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ qui fait de A une algèbre de Jordan notée A^+ , où xy désigne le produit dans A . On dira que B est une *algèbre de Jordan spéciale* s'il existe une

algèbre associative A telle que B soit une sous-algèbre de Jordan de A^+ . De cette définition, il vient que, pour toute K -algèbre associative A , A^+ est une algèbre de Jordan spéciale. Nous nous en tiendrons ici à donner des exemples d'algèbres qui sont de Jordan spéciales.

Les algèbres $A_{T,\omega}$. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A un K -espace vectoriel, $T : A \rightarrow A$ un opérateur linéaire et $\omega : A \rightarrow A$ une forme linéaire non nulle vérifiant $\omega \circ T = \omega$.

Théorème 9.1. *Si $T^2 = T$ alors $A_{T,\omega}$ est une algèbre de Jordan spéciale.*

On définit sur A une structure d'algèbre non commutative au moyen du produit $xy = \omega(x)T(y)$. Si $T^2 = T$ la nouvelle algèbre, notée A_0 , est associative. En effet, $(xy)z - x(yz) = \omega(x)(\omega(T(y))T(z) - \omega(y)T^2(z)) = \omega(x)\omega(y)(T(z) - T^2(z)) = 0$, quels que soient x, y, z dans A_0 . Il suffit alors de voir que $A_{T,\omega} = A_0^+$, donc $A_{T,\omega}$ est de Jordan spéciale. Les corollaires suivants sont connus (cf.[23]) :

Corollaire 9.2. *La K -algèbre gamétique $G(n + 1, 2)$ d'une population diploïde avec $n + 1$ allèles est une algèbre de Jordan spéciale.*

Corollaire 9.3. *L'algèbre de Bernstein constante est de Jordan spéciale.*

Pour T défini par $T(x) = \omega(x)e$, l'algèbre $A_{T,\omega}$ est dite de *Bernstein constante*. Elle vérifie $xy = \omega(x)\omega(y)e$ où e est l'unique idempotent de $A_{T,\omega}$.

La dupliquée de $A_{T,\omega}$ avec $T^2 = T$. On sait (cf. Proposition 8.7) que $D(A_{T,\omega})$ est de Jordan. En fait, on a le théorème suivant :

Théorème 9.4. *Soit $A_{T,\omega}$ la K -algèbre ci-dessus définie avec $T^2 = T$. Sa dupliquée $D(A_{T,\omega})$ est une algèbre de Jordan spéciale.*

Soient $\text{Im}(T) = Ke_0 \oplus U$, $\text{Ker}(T) = V$ où e_0 est un idempotent de $A_{T,\omega}$, $U = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ et $V = \langle e_{r+1}, \dots, e_{n-1} \rangle$. La table de multiplication de $A_{T,\omega}$ est donnée par $e_0^2 = e_0$, $e_0e_i = \frac{1}{2}e_i$ ($i = 1, \dots, r$) $e_ie_j = 0$ ($i, j = 1, \dots, n - 1$). Soit $\{e_i \cdot e_j\}_{0 \leq i \leq j \leq n-1}$ la base correspondante de $D(A_{T,\omega})$ avec, comme table de multiplication, $(e_0 \cdot e_0)^2 = e_0 \cdot e_0$, $(e_0 \cdot e_0)(e_0 \cdot e_i) = \frac{1}{2}e_0 \cdot e_i$ ($i = 1, \dots, r$), $(e_0 \cdot e_i)(e_0 \cdot e_j) = \frac{1}{4}e_i \cdot e_j$ ($1 \leq i \leq j \leq r$), les autres produits étant nuls. Soient

(e_{ij}) la base canonique de $M_{2n-1}(K)$ avec $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ où δ_{jk} est le delta de Kronecker et B le sous- K -espace vectoriel de $M_{2n-1}(K)$ engendré par les éléments $a_1, \dots, a_{n-1}, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n-1, n-1}, a_n$ avec $a_i = e_{in} + e_{n, n+i}$ ($i = 1, \dots, r$), $a_k = e_{k, n+1}$ ($k = r + 1, \dots, n - 1$), $a_{ij} = 2(e_{i, n+j} + e_{j, n+i})$ ($1 \leq i \leq j \leq n - 1$) et $a_n = e_{nn}$. L'algèbre de Jordan B^+ a pour table de multiplication $a_n a_n = a_n$, $a_n a_i = \frac{1}{2} a_i$ ($i = 1, \dots, r$), $a_i a_j = \frac{1}{2}(e_{i, n+j} + e_{j, n+i}) = \frac{1}{4} a_{ij}$ ($1 \leq i \leq j \leq r$), les autres produits étant nuls. Il suffit de voir que $D(A_{T, \omega})$ est isomorphe à B^+ .

Corollaire 9.5. *L'algèbre zygotique $Z(n, 2)$ est une algèbre de Jordan spéciale.*

En effet, pour $T = id_A$, $A_{T, \omega} \simeq G(n, 2)$ et $Z(n, 2) = D(G(n, 2))$.

Corollaire 9.6. *Toute K -algèbre de Bernstein de type (m, s) avec $V = U^2$ et $s = \frac{1}{2}m(m - 1)$, où K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, est une algèbre de Jordan spéciale.*

Il suffit de voir, d'après [16], théorème 5, que ces algèbres sont isomorphes à $Z(m, 2)$.

Les algèbres conservatives de type $(1 + r, s)$ avec $\dim_K(U^2) = 1$. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de Peirce d'une telle algèbre où K est le corps des complexes. La sous-algèbre $A^2 = Ke \oplus U \oplus U^2$ est aussi conservative de type $(1 + r, 1)$. Le théorème de 5.2.8 de [19] nous dit qu'il existe un entier m ($1 \leq m \leq r$) et une base $\{e, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ avec la table de multiplication $e^2 = e$, $ee_i = \frac{1}{2}e_i$ ($i = 1, \dots, r$) $e_j^2 = e_{r+1}$ ($j = 1, \dots, m$) les autres produits étant nuls et où $U^2 = Ke_{r+1}$.

Théorème 9.7. *Toute algèbre conservative de type $(1 + r, s)$ avec $\dim_K(U^2) = 1$ est une algèbre de Jordan spéciale.*

Considérons encore l'algèbre associative $M_{2n-1}(K)$. Soit B le sous- K -espace vectoriel de $M_{2n-1}(K)$ engendré par les éléments a_0, \dots, a_{n-1} définis par :

$$a_0 = \sum_{i=n}^{n+m} e_{ii}, \quad a_i = 2(e_{1, n+i} + e_{n+i, r+1}) \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$a_i = e_{ni} \quad (i = m + 1, \dots, r), \quad a_{r+1} = 4e_{1, r+1},$$

$$a_k = e_{1k} \quad (k = r + 2, \dots, n - 1).$$

L'algèbre de Jordan B^+ a, pour table de multiplication, $a_0^2 = a_0$, $a_0 a_i = \frac{1}{2} a_i$ ($i = 1, \dots, r$), $a_i^2 = a_{r+1}$ ($i = 1, \dots, m$) et les autres produits sont nuls. La correspondance $e \mapsto a_0$, $e_i \mapsto a_i$ ($i = 1, \dots, n-1$), définit un isomorphisme $A \simeq B^+$ d'algèbres, donc A est de Jordan spéciale. En particulier, on a les corollaires suivants :

Corollaire 9.8. *Toute algèbre de Bernstein de type $(2, n-2)$ avec $n \geq 3$ et $U^2 \neq 0$ est de Jordan spéciale.*

Une telle algèbre étant conservative, on applique le théorème 9.7. avec $r = m = 1$ et $s = n - 2$.

Corollaire 9.9. *Toute algèbre de Bernstein de type $(n-1, 1)$ avec $n \geq 3$ et $U^2 \neq 0$ est de Jordan spéciale.*

Une telle algèbre est aussi conservative. Il suffit alors d'appliquer le théorème 9.7 avec $r = n - 2$ et $s = 1$.

10. Les algèbres gamétiques $G_{mn}(\theta)$. Soient deux séries de $m+1$ et $n+1$ allèles, K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et θ un élément de K . On note $G_{mn}(\theta)$ l'algèbre engendrée par les $(m+1)(n+1)$ types gamétiques G^{ik} ($i = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n$) où la multiplication est donnée par

$$G^{ik} G^{jl} = \frac{1}{2}(1 - \theta)(G^{ik} + G^{jl}) + \frac{1}{2}\theta(G^{il} + G^{jk}).$$

Si $\theta = 0$ alors $G_{mn}(0) = G((m+1)(n+1), 2)$ est la K -algèbre gamétique d'une population diploïde avec $(n+1)(m+1)$ allèles (cf. 3). On supposera toujours $\theta \neq 0$. Posons $e = G^{00}$ (ce choix est arbitraire), $u_j = G^{0j} - G^{00}$ ($j = 1, \dots, n$), $v_i = G^{i0} - G^{00}$ ($i = 1, \dots, m$) et $w_{ij} = (G^{i0} - G^{00})(G^{0j} - G^{00}) = u_j v_i = v_i u_j$. D'après la loi de multiplication $w_{ij} = \frac{1}{2}\theta(G^{ij} - (e + v_i + u_j))$. Ceci nous dit que les éléments e , u_j , v_i et w_{ij} sont indépendants et comme ils sont au nombre de $1 + m + n + mn = (m+1)(n+1)$ ils forment une base. On a $e^2 = e$, $ev_i = \frac{1}{2}v_i$, $eu_j = \frac{1}{2}u_j$, $ew_{ij} = \frac{1}{2}(1 - \theta)w_{ij}$, $w_{ij} = u_j v_i = v_i u_j$, les autres produits étant nuls. Pour les calculs, on renvoie à [4], page 74 où, bien que des erreurs ont pu s'y glisser, l'Auteur donne l'équation principale $x^3 - \frac{1}{2}(3 - \theta)\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}(1 - \theta)\omega(x)^2 x = 0$, ω étant une pondération de l'algèbre.

Théorème 10.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) $G_{mn}(\theta)$ est une algèbre de Jordan ; (ii) $\theta = \pm 1$.*

(i) \Rightarrow (ii). En effet, sachant que, pour tout idempotent e l'opérateur L_e (multiplication à gauche par e) admet pour seules valeurs propres $0, \frac{1}{2}$ et 1 , alors de $e\omega_{ij} = \frac{1}{2}(1 - \theta)\omega_{ij}$ il vient que $\frac{1}{2}(1 - \theta)$ est égal à $0, \frac{1}{2}$ ou 1 ce qui donne respectivement $\theta = 1, \theta = 0$ ou $\theta = -1$.

(ii) \Rightarrow (i). Si $\theta = 1$, l'équation principale se réduit à $x^3 = \omega(x)x^2$ et le théorème 6.3 nous dit alors que $G_{mn}(1)$ est de Jordan. Soient maintenant $\theta = -1$, $A_{-1} = G_{mn}(-1)$, $x = \xi e + u + v + w$ et $y = \xi' e + u' + v' + w'$ deux éléments de A_{-1} . On a $x^2 = \xi^2 e + \xi u + \xi v + 2\xi w + 2uv$, $x^2 y = \xi^2 \xi' e + \frac{1}{2} \xi^2 u' + \frac{1}{2} \xi^2 v' + \xi^2 w' + \frac{1}{2} \xi \xi' u + \frac{1}{2} \xi \xi' v + 2\xi' \xi w + 2\xi' uv + \xi u' v + \xi uv'$, $(x^2 y)x = \xi' \xi^3 e + \frac{1}{4} \xi^3 u' + \frac{1}{4} \xi^3 v' + \xi^3 w' + \frac{1}{4} \xi^2 \xi' u + \frac{1}{4} \xi^2 \xi' v + 2\xi' \xi^2 w + \frac{1}{2} \xi^2 u' v + \frac{1}{2} \xi^2 uv' + \frac{1}{2} \xi' \xi^2 u + \frac{1}{2} \xi' \xi^2 v + \xi' \xi^2 w + 2\xi \xi' uv + \xi^2 u' v + \xi^2 uv' + \frac{1}{2} \xi \xi' uv$. On calcule, de même, $x^2(yx)$ et on vérifie que $x^2(yx) = (x^2 y)x$, quels que soient x et y dans A_{-1} , donc A_{-1} est de Jordan.

Remarque 10.2. Si $A_1 = G_{mn}(1)$, on a $A_1(1) = Ke$, $A_1(\frac{1}{2}) = U \oplus V$, $A_1(0) = W$ où U, V, W sont les sous- K -espaces vectoriels de A_1 engendrées respectivement par les u_j, v_i, w_{ij} . Par contre $A_{-1}(1) = Ke \oplus W$, $A_{-1}(\frac{1}{2}) = U \oplus V$ et $A_{-1}(0) = 0$. L'algèbre A_{-1} n'est pas de Bernstein. Notons que $\{e + u + v + 2\theta^{-1}uv \mid u \in U, v \in V\}$ est l'ensemble des idempotents de $G_{mn}(\theta)$.

Théorème 10.3. *Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, $\theta \neq 0$ un élément de K et $A = G_{mn}(\theta)$ la K -algèbre gamétique d'une population diploïde avec deux séries de $m + 1$ et $n + 1$ allèles et de paramètre θ . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K -linéaire $d : A \rightarrow A$ soit une K -dérivation de A est que les conditions suivantes soient vérifiées : (i) $d(e) = u_d + v_d$, avec u_d dans U et v_d dans V ; (ii) pour tout x dans U , $d(x) = f_d(x) + 2\theta^{-1}v_d x$; (iii) pour tout x dans V , $d(x) = g_d(x) + 2\theta^{-1}u_d x$; (iv) $d(xy) = xg_d(y) + yf_d(x)$, quels que soient x dans U et y dans V , où les applications $f : Der_K(A) \rightarrow End_K(U)$, $d \mapsto f_d$ et $g : Der_K(A) \rightarrow End_K(V)$, $d \mapsto g_d$ sont des morphismes d'algèbres de Lie.*

Soit $d \in Der_K(A)$. Si $d(e) = \alpha e + u + v + w$, avec α dans K , u dans U , v dans V et w dans W , alors $d(e) = 2ed(e) = 2\alpha e + u + v + (1 - \theta)w$ donne $2\alpha = \alpha$ et $w = (1 - \theta)w$, soit $\alpha = 0$ et $w = 0$, d'où $d(e) = u_d + v_d$ avec u_d dans U et v_d dans V . Pour tout x dans U , on écrit $d(x) = \alpha e + u + v + w$. Dérivons

$x^2 = 0$. On a $0 = 2xd(x) = \alpha x + 2xv$ donc $\alpha = 0$ et $xv = 0$, quel que soit x , soit $v = 0$ (car $UV = W$ et $\dim_K W = mn$). Si l'on dérive $ex = \frac{1}{2}x$, alors $\frac{1}{2}d(x) = ed(x) + d(e)x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(1 - \theta)w + v_d x$, ce qui entraîne que $\frac{1}{2}\theta w = v_d x$ soit $w = 2\theta^{-1}v_d x$. En posant $u = f_d(x)$, on a $d(x) = f_d(x) + 2\theta^{-1}v_d x$, d'où (ii). Il est facile de voir que f_d est dans $\text{End}_K(U)$. Par des calculs analogues on établit (iii). Comme $W = UV$ alors, pour tout w dans W il existe x dans U et y dans V tels que $w = xy$ et $d(w) = d(xy) = d(x)y + xd(y) = (f_d(x) + 2\theta^{-1}v_d x)y + (g_d(y) + 2\theta^{-1}u_d y)x = f_d(x)y + xg_d(y)$. Soient maintenant d et d' deux K -dérivations de A . On a $[d, d'](e) = f_d(u_{d'}) - f_{d'}(u_d) + g_d(v_{d'}) - g_{d'}(v_d)$, $[d, d'](x) = [f_d, f_{d'}](x) + 2\theta^{-1}(g_d(v_{d'}) - g_{d'}(v_d))x$, $[d, d'](y) = [g_d, g_{d'}](y) + 2\theta^{-1}(f_d(u_{d'}) - f_{d'}(u_d))y$ et $[d, d'](xy) = x[g_d, g_{d'}](y) + y[f_d, f_{d'}](x)$, quels que soient x dans U et y dans V . Par identification, il vient que $f_{[d, d']} = [f_d, f_{d'}]$ et $g_{[d, d']} = [g_d, g_{d'}]$, d'où la dernière assertion de (iv). La réciproque est un simple calcul de vérification.

Corollaire 10.4. *Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\text{Der}_K(G_{mn}(\theta)) \xrightarrow{\sim} K^m \times_{s.d.} M_m(K) \oplus K^n \times_{s.d.} M_n(K).$$

Si E est un K -espace vectoriel, on définit sur le K -espace vectoriel $E \times_{s.d.} \text{End}_K(E)$ (s.d. signifie semi-direct) une structure d'algèbre de Lie en posant $[(x, f), (y, g)] = (f(y) - g(x), [f, g])$ avec $[f, g] = f \circ g - g \circ f$, quels que soient x, y dans E et f, g dans $\text{End}_K(E)$. L'application K -linéaire $\text{Der}_K(G_{mn}(\theta)) \rightarrow K^m \times_{s.d.} M_m(K) \oplus K^n \times_{s.d.} M_n(K)$ définie par $d \mapsto (v_d, g_d) + (u_d, f_d)$ est maintenant un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Théorème 10.5. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et $A = G_{mn}(\theta)$ la K -algèbre gamétique ci-dessus définie. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application K -linéaire bijective $\sigma : A \rightarrow A$ soit un K -automorphisme est que les conditions suivantes soient vérifiées : (i) $\sigma(e) = e + u_\sigma + v_\sigma + 2\theta^{-1}u_\sigma v_\sigma$ avec u_σ dans U et v_σ dans V ; (ii) pour tout x dans U , $\sigma(x) = f_\sigma(x) + 2\theta^{-1}v_\sigma f_\sigma(x)$, (iii) pour tout y dans V , $\sigma(y) = g_\sigma(y) + 2\theta^{-1}u_\sigma g_\sigma(y)$, (iv) $\sigma(xy) = f_\sigma(x)g_\sigma(y)$, quels que soient x dans U et y dans V où les applications $f : \text{Aut}_K(A) \rightarrow GL_K(U)$, $\sigma \mapsto f_\sigma$ et $g : \text{Aut}_K(A) \rightarrow GL_K(V)$, $\sigma \mapsto g_\sigma$ sont des morphismes de groupes.*

Soit σ un K -automorphisme de A . La condition $(\sigma(e))^2 = \sigma(e^2) = \sigma(e)$ nous dit que $\sigma(e)$ est un idempotent de A et d'après la remarque 10.2 on a (i)

$\sigma(e) = e + u_\sigma + v_\sigma + 2\theta^{-1}u_\sigma v_\sigma$. Pour x dans U , si l'on écrit $\sigma(x) = \alpha e + u + v + w$, la condition $e\sigma(x) = \frac{1}{2}\sigma(x)$ entraîne $\frac{1}{2}\sigma(x) = \sigma(e)\sigma(x) = \alpha e + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(1-\theta)w + \frac{1}{2}\alpha u_\sigma + \frac{1}{2}\alpha v_\sigma + (1-\theta)\theta^{-1}\alpha u_\sigma v_\sigma + uv_\sigma + u_\sigma v$ soit $\alpha = 0$ et $w = 2\theta^{-1}uv_\sigma + 2\theta^{-1}u_\sigma v$. Mais $0 = (\sigma(x))^2 = 2uv$ entraîne que $u = 0$ ou $v = 0$ (car $UV = W$ et $\dim_K W = mn$).

Supposons $m \neq n$. Pour des raisons de dimension, il vient que $v = 0$ et si l'on pose $u = f_\sigma(x)$ alors $\sigma(x) = f_\sigma(x) + 2\theta^{-1}v_\sigma f_\sigma(x)$ d'où (ii). La condition (iii) s'établit de manière analogue. Pour x dans U et y dans V , on a $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = (f_\sigma(x) + 2\theta^{-1}v_\sigma f_\sigma(x))(g_\sigma(y) + 2\theta^{-1}u_\sigma g_\sigma(y)) = f_\sigma(x)g_\sigma(y)$. Soient maintenant σ et σ' deux K -automorphismes de A . On a

$$\begin{aligned}\sigma\sigma'(e) &= e + (u_\sigma + f_\sigma(u_{\sigma'})) + (v_\sigma + g_\sigma(v_{\sigma'})) \\ &\quad + 2\theta^{-1}(u_\sigma + f_\sigma(u_{\sigma'}))(v_\sigma + g_\sigma(v_{\sigma'})), \\ \sigma\sigma'(x) &= f_\sigma \circ f_{\sigma'}(x) + 2\theta^{-1}(v_\sigma + g_\sigma(v_{\sigma'}))f_\sigma \circ f_{\sigma'}(x), \\ \sigma\sigma'(y) &= g_\sigma \circ g_{\sigma'}(y) + 2\theta^{-1}(u_\sigma + f_\sigma(u_{\sigma'}))g_\sigma \circ g_{\sigma'}(y), \\ \sigma\sigma'(xy) &= (f_\sigma \circ f_{\sigma'}(x))(g_\sigma \circ g_{\sigma'}(y)),\end{aligned}$$

quels que soient x dans U et y dans V . Il vient alors que $f_{\sigma\sigma'} = f_\sigma \circ f_{\sigma'}$, et $g_{\sigma\sigma'} = g_\sigma \circ g_{\sigma'}$, ce qui confirme la dernière assertion de (iv), c'est-à-dire, que les applications f et g sont des morphismes de groupes.

Si, par contre, $m = n$ et $u = 0$ les calculs conduisent à $\sigma(x) = f_\sigma(x) + 2\theta^{-1}u_\sigma f_\sigma(x)$, $\sigma(y) = g_\sigma(y) + 2\theta^{-1}v_\sigma g_\sigma(y)$, quels que soient x dans U et y dans V avec $f_\sigma : U \rightarrow V$ et $g_\sigma : V \rightarrow U$ des applications linéaires bijectives et pour σ et σ' deux K -automorphismes de A on aurait $\sigma\sigma'(x) = g_\sigma \circ f_{\sigma'}(x) + 2\theta^{-1}(v_\sigma + f_\sigma(u_{\sigma'}))g_\sigma \circ f_{\sigma'}(x)$, pour tout x dans U c'est-à-dire, $f_{\sigma\sigma'} = g_\sigma f_{\sigma'}$ et $f_{\sigma\sigma'}$ est une application de U dans U , ce qui contredit le fait que $f_{\sigma\sigma'}$ soit une application de U dans V . Donc $v = 0$ et le résultat est comme ci-dessus.

Les calculs précédents nous suggèrent le résultat suivant :

Corollaire 10.6. *Il existe un isomorphisme de groupes (non abéliens)*

$$\text{Aut}_K(G_{mn}(\theta)) \xrightarrow{\sim} \text{Aff}_K(U) \times \text{Aff}_K(V).$$

Pour tout K -espace vectoriel E , on note $\text{Aff}_K(E) = E \times_{s.d.} GL_K(E)$ le groupe affine de E (cf.[6]) où la structure de groupe de $\text{Aff}_K(E)$ est donnée par $(x, f)(y, g) = (x + f(y), f \circ g)$. Soit $\text{Aff}_K(U) \times \text{Aff}_K(V)$ le produit direct des groupes affines de U et V respectivement. L'application

$Aut_K(G_{mn}(\theta)) \xrightarrow{\sim} Aff_K(U) \times Aff_K(V)$ définie par $\sigma \mapsto ((u_\sigma, f_\sigma), (v_\sigma, g_\sigma))$ est, de toute évidence, un isomorphisme de groupes.

Note 10.7. Si θ prend la valeur $\frac{1}{2}$, l'algèbre gamétique $G_{mn}(\frac{1}{2})$ peut s'exprimer comme le produit direct des algèbres gamétiques $G(m+1, 2)$ et $G(n+1, 2)$ (cf. [7], §13) et dans les corollaires 10.4 et 10.6, on retrouve les résultats bien connus $Der_K(G(n+1, 2)) \xrightarrow{\sim} K^n \times_{s.d.} M_n(K)$ et $Aut_K(G(n+1, 2)) \xrightarrow{\sim} Aff_K(K^n)$.

11. Note finale. Cet article est une version remaniée de deux autres articles présentés, l'un au colloque sur les Algèbres Génétiques, l'autre au colloque sur les algèbres de Jordan et Algèbres de Jordan-Banach, tenus à Montpellier respectivement en Janvier et Octobre 1985. La publication des comptes rendus de ces colloques ayant été retardés pour des raisons indépendantes de notre volonté, quelques uns de nos résultats ont fait, entre temps, l'objet de publication. C'est ainsi qu'on trouvera le théorème 6.3 dans [25] et d'autres résultats partiels du paragraphe 6 dans [26].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.A. ALBERT, On Jordan algebras of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **59** (1946), 524–555.
- [2] A.A. ALBERT, A structure theory for Jordan algebras, *Ann. of Math.*, **48**, no. 3 (1947), 546–567.
- [3] M.T. ALCALDE, C. BURGUENO, A. LABRA et A. MICALI, Sur les algèbres de Bernstein, *Proc. London Math. Soc.* (3) **58** (1989), 51–68.
- [4] M. BERTRAND, Algèbres non associatives et algèbres génétiques, *Mémorial des Sciences Mathématiques* **162**, Gauthiers Villars, Paris 1966.
- [5] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Livre II, Chapitres 4 et 5, Hermann, Paris 1950.
- [6] N. BOURBAKI, *Algèbre I*, Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris 1970.
- [7] I.M.H. ETHERINGTON, Genetic algebras, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **59** (1939), 242–258.
- [8] I.M.H. ETHERINGTON, Duplication of linear algebras, *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.* (2) **6** (1941), 222–230.
- [9] H. GONSHOR, Special train algebras arising in Genetics, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) (1960), 41–53.
- [10] P. HOLGATE Genetic algebras associated with polyploidy, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **15** (1966), 1–9.
- [11] P. HOLGATE, Jordan algebras arising in Population Genetics, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **15** (1967), 291–294.
- [12] P. HOLGATE, Selfing in Genetics algebras, *J. Math. Biology* **6** (1978), 197–206.
- [13] N. JACOBSON, *Structure and representations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. **39**, Providence, Rhode Island 1968.
- [14] P. JORDAN, Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1933), 209–214.
- [15] P. JORDAN, J. VON NEUMANN and E. WIGNER, On the algebraic generalization of the Quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.* (2) **36** (1934), 29–64.
- [16] Ju. I. LJUBIC, Algebraic methods in Evolutionary Genetics, *Biom. J.* **20**, no. 5 (1978), 511–529.
- [17] K. McCRIMMON, Jordan algebras and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 612–627.
- [18] A. MICALI et P. REVOY, Sur les algèbres gamétiques, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **29** (1986), 187–197.

- [19] M. OUATTARA, *Algèbres de Jordan et Algèbres génétiques*, Cahiers Mathématiques, Montpellier, 37 (1988).
- [20] L.J. PAIGE, *Jordan Algebras*, Studies in Modern Algebra, Volume 2, M.A.A. and Prentice Hall, A.A. Albert editor, 144–186, 1963.
- [21] Ch.M. PRICE, Jordan division algebras and the algebras $A(\lambda)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 70 (1951), 291–300.
- [22] R. ROSEN, Quantum Genetics, in *Foundations of Mathematical Biology* Volume 1, 215–252, Academic Press, New York and London, 1972.
- [23] R.D. SCHAFER, Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.* 71 (1949), 121–135.
- [24] R.D. SCHAFER, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.
- [25] S. WALCHER, Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.* 50 (1988), 218–222.
- [26] A. WORZ-BUSEKROS, Bernstein Algebras, *Arch. Math.* 48 (1987), 388–398.

Département des Sciences
Mathématiques, Case Courier 051
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER, FRANCE

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
Université de Ouagadougou
03 B.P. 7021 Ouagadougou 03
BURKINA FASO (Upper Volta)