ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

YOUSSEF HAOUAT

Anneaux de polynômes à valeurs entières sur un anneau de valuation ou de Seidenberg

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 89, série *Mathématiques*, n° 23 (1986), p. 91-98

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1986__89_23_91_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 23. 1986, pp. 91-98

ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES SUR UN ANNEAU DE VALUATION OU DE SEIDENBERG

Youssef HAOUAT

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. On s'intéresse à *l'anneau des polynômes à valeurs entières* (polynômes de $K[X]$ tels que $f(A) \subset A$) et aux sous-anneaux formés soit des polynômes dont les n premières dérivées sont à valeurs entières, soit des polynômes dont les n premières différences finies divisées sont à valeurs entières.

Le spectre de l'anneau des polynômes à valeurs entières sur un anneau noethérien a été étudié dans [7], celui de l'anneau dont les n premières dérivées sont à valeurs entières sur un anneau noethérien intégralement clos a été étudié dans [4], l'hypothèse de clôture intégrale a pu être remplacée par (S_2) dans [8]. Pour tous ces anneaux, on montre d'abord ici que la propriété noethérienne, utile pour se ramener au cas local, peut être remplacée, pour le même effet, par deux conditions : l'une de finitude (s'inspirant de [1]), l'autre similaire à la clôture intégrale mais plus faible ; et on se ramène ainsi au cas où A est local de corps résiduel fini.

On détermine alors le spectre, dans le cas des anneaux de polynômes dont les n premières différences finies divisées sont à valeurs entières [2] sur certains anneaux, notamment les anneaux de Seidenberg [10], en considérant comme dans le cas où A est un anneau de valuation discrète, l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$.

Notations : A désigne un anneau intègre unitaire commutatif de corps des fonctions K, on note

$$A_s = \{f \in K[X] \;/\; f(A) \subset A\}$$

Pour f dans $K[X]$ et h_1 dans A^* (où A^* désigne l'ensemble des éléments de A distincts de 0), on pose :

$$\Delta^{o}_{h_1} f = f \qquad \text{et} \qquad \Delta'_{h_1} f(x) = \frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1}$$

Puis, par récurrence, on définit les différences finies divisées :

$$\Delta^{n}_{h_1,\dots,h_n} f(x) = \frac{\Delta^{n-1}_{h_1,\dots,h_{n-1}} f(x+h_n) - \Delta^{n-1}_{h_1,\dots,h_{n-1}} f(x)}{h_n}$$

On note $A_{S(n)}$ (resp. $A_{B(n)}$) l'anneau des polynômes dont les n premières dérivées (resp. les n premières différences finies divisées) sont à valeurs entières et

$$A_{S(\infty)} = \bigcap_{n \geqslant 0} A_{S(n)} \qquad (\text{resp. } A_{B(\infty)} = \bigcap_{n \geqslant 0} A_{B(n)}) :$$

on désigne par A_* l'un des anneaux $A_{S(n)}$, $A_{B(n)}$, $A_{S(\infty)}$ ou $A_{B(\infty)}$.

I - LOCALISATION :

On a toujours pour toute partie multiplicative T de A, d'après [4] , [5] , et [8]

$$T^{-1}(A)_* \supset (T^{-1} A)_*$$

La condition noethérienne n'intervient que pour l'inclusion inverse. On peut la remplacer par les deux conditions suivantes :

(P_1) Condition de finitude : Pour toute partie multiplicative T complémentaire d'un idéal premier non nul de A, le A-module $T^{-1}A$ est tel que pour tout M sous-A-module de $T^{-1}A$, il existe un sous-A-module de $T^{-1}A$ de type fini B_M et un entier k positif tel que tout m de M, on a m^k dans B_M.

(P_2) Condition proche d'intégralement clos : Si $a \in K$ est tel que $a^k \in A$ pour $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors $a \in A$.

On a :

Proposition : Soit A un anneau intègre vérifiant (P_1) et (P_2), pour toute partie multiplicative T complèmentaire d'un idéal premier de A, on a :

$$T^{-1}(A_*) = (T^{-1})_*$$

Démonstration : L'égalité est vraie si T est le complémentaire de l'idéal $\{0\}$ de A ; sinon, il suffit de prouver que $(T^{-1}A)_* \subset T^{-1}(A)_*$. Soit f dans $(T^{-1}A)_{B(n)}$ (resp. $(T^{-1}A)_{S(n)}$) ;considérons le A-module M engendré par les valeurs prises par f sur A et par les valeurs prises par les n premières différences finies divisées sur A (resp. par les valeurs prises par les n premières dérivées sur A). Comme M est un sous-A-module de T^{-1} A, d'après la propriété (P_1) il existe un sous-A-module B_M de type fini et un entier positif k tels que pour tout m de M, m^k est dans B_M. Comme B_M est de type fini, il est engendré par

$$\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}, \ldots, \frac{a_p}{s_p}.$$

On pose $t = s_1 \ldots s_p$; alors pour tout m de M, $t\, m^k$ est dans A, donc t^k m^k est dans A, et d'après la propriété (P_2), t_m est dans A ainsi que ses n premières différences finies divisées (resp. ses n premières dérivées). Par suite, f est dans T^{-1} $A_{B(n)}$ (resp. T^{-1} $A_{S(n)}$).
La démonstration est analogue pour $T^{-1}(A_{B(\infty)})$ et $T^{-1}(A_{S(\infty)})$: ceci montre l'égalité entre $T^{-1}A_*$ et $(T^{-1}A)_*$.

II - SPECTRE :

Sous les conditions énoncées plus haut, on peut localiser et étudier le spectre fibre par fibre : la fibre au-dessus d'un idéal premier P de A de corps résiduel infini est alors celle de $(A_P)_* = A_P[X]$ [5] . Elle est donc bien connue. L'étude de la fibre au-dessus d'un idéal premier P de A, de corps résiduel fini, nous permet de nous ramener au cas où A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel fini. On suppose alors en outre que A vérifie la propriété (P_3) suivante :

(P_3) Propriété de finitude : Il existe x_o dans $\mathfrak{m}$ et k entier positif tel que

$$\mathfrak{m}^k \subset A\, x_o$$

On peut alors déterminer le spectre de $A_{B(n)}$ et de $A_{B(\infty)}$. On a le théorème :

Théorème 1 (*) : Pour $n > 0$ la fibre de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ est en bijection avec $A/_{\mathfrak{m}}$. On décompose la démonstration en trois lemmes.

Lemme 1 : Soit g dans $A_{B(n)}$ et x_o non nul dans $\mathfrak{m}$; on suppose que $g(x)$ appartient à $\mathfrak{m}$ pour tout x de A. Il existe alors $s = k(n+1)$ tel que :

$$g^s \in A_{B(n)}\, x_o$$

Démonstration : [8], deuxième partie, lemme 8.

Lemme 2 : Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont maximaux et de corps résiduel $A/_{\mathfrak{m}}$.

Démonstration : [8] , Deuxième partie, proposition 9.

Lemme 3 : Pour tout $n > 0$, $A_{B(n)}$ s'injecte dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ (où $\hat{A}$ est le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique).

Démonstration : Montrons que pour tout a dans $\hat{A}$, $f(a)$ est dans $\hat{A}$. Il existe une suite $(a_p)_{p \geqslant 0}$ de A tendant vers a. Pour p et m assez grands, puisque f est dans $A_{B(n)}$ si $a_p \neq a_m$, on a :

$$\frac{f(a_p) - f(a_m)}{a_p - a_m} = y_{p,m} \in A$$

Ce qui montre que la suite $(f(a_p))_{p \geqslant 0}$ est aussi de Cauchy, donc $\lim\limits_{p \to +\infty} f(a_p)$ est dans $\hat{A}$.

(*) Je remercie le référé d'avoir signalé une omission dans une première version.

Soit d non nul dans A tel que d f(x) est dans $A[X]$. Alors $d\, f(a) = \sum_{i=o}^{i=s} c_i\, a^i$

et $d\, f(a_p) = \sum_{i=o}^{i=s} c_i\, a_p^i$; par passage à la limite $d \lim_{p\to+\infty} f(a_p) = \sum_{i=o}^{i=s} c_i\, a^i$

et $\lim_{p\to+\infty} f(a_p) = \sum_{i=o}^{s} \frac{c_i}{d}\, a^i$. Ce qui montre que $\lim_{p\to+\infty} f(a_p)$ ne dépend pas de la suite choisie tendant vers a. On pose $f(a) = \lim_{p\to+\infty} f(a_p)$.

Ainsi, si f est dans $A_{B(n)}$, on a $f(\hat{A}) \subset \hat{A}$. Montrons maintenant que f est dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$; soient x et y dans $\hat{A}$ tels que x - y est dans $\hat{\mathfrak{m}}^{\ell}$. Il existe x_{k_1} (resp. y_{k_2}) tel que $x - x_{k_1}$ (resp $y - y_{k_2}$) soit dans $\hat{\mathfrak{m}}^{\ell}$, ainsi que $f(x) - f(x_{k_1})$ (resp. $f(y) - f(y_{k_2})$).
En effet, si $(x_p)_{p \geqslant o}$ (resp. $(y_p)_{p \geqslant o}$) est une suite de A tendant vers x (resp. y), on a $f(x_p) - f(x_{k_1}) = z_{k_1,p}(x_p - x_{k_1})$ (resp. $f(y_p) - f(y_{k_2}) = z'_{k_2,p}(y_p - y_{k_2})$) dans $\hat{\mathfrak{m}}^{\ell}$ pour p et k_1 assez grands, où $z_{k_1,p}$ (resp. $z'_{k_2,p}$) est un élément de A.
En faisant tendre p vers $+\infty$, on a le résultat. Ainsi $x_{k_1} - y_{k_2}$ est dans $\hat{\mathfrak{m}}^{\ell}$ et il en est de même pour $f(x_{k_1}) - f(y_{k_2}) = a(x_{k_1} - y_{k_2})$ (où $a \in A$).
Par suite, $f(x) - f(y)$ est dans $\hat{\mathfrak{m}}^{\ell}$, d'où la continuité de f.

Démonstration du théorème : Comme $A_{B(n)}$ s'injecte dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$, alors les idéaux premiers de $A_{B(n)} \otimes A/\mathfrak{m}$ se relèvent dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}) \otimes A/\mathfrak{m} = \mathcal{C}(\hat{A}, A/\mathfrak{m})$ [4] ; par ailleurs, les idéaux premiers de $\mathcal{C}(\hat{A}, A/\mathfrak{m})$ sont en bijection avec les points de $\hat{A}$ [3 chapitre II § IV exercices] ; il en résulte que les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont de la forme

$$M_a = \{f \in A_{B(n)} / f(a) \in \hat{\mathfrak{m}}\} \quad \text{où} \quad a \in \hat{A}.$$

De plus, si $a \equiv b$ modulo $\mathfrak{m}$ alors $M_a = M_b$ [8].

Théorème 2 : La fibre de $A_{B(\infty)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ est en bijection avec $A/\mathfrak{m}$.

III - EXEMPLES :

1er exemple : Cas d'un anneau de valuation A, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ non nécessairement noethérien. Etudions le spectre de $A_{B(n)}$.

- Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus d'un idéal premier P de A non maximal se retrouvent dans A_P [X] car P est de corps résiduel infini [5]
- Considérons les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$

A) $A/\mathfrak{m}$ est infini : alors $A_{B(n)} = A[X]$ [5]

B) $A/\mathfrak{m}$ est fini.

1) S'il n'y a pas d'idéaux premiers juste sous $\mathfrak{m}$: alors $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_f(K/A)$.

Car $\mathrm{Ann}_A(\frac{\bar{1}}{x}) \subset \mathfrak{m}$ entraîne $x \in \mathfrak{m} = \bigcup_{\substack{P \subset \mathfrak{m} \\ P \text{ premier}}}$ donc $x \in P_o$ et $\mathrm{Ann}_A(\frac{\bar{1}}{x}) \subset P_o$.

D'après [5] $A_{B(n)} = A[X]$.

2) S'il existe P premier juste sous $\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_f(K/A)$.

Car si x est dans $\mathfrak{m}$ et pas dans P, l'idéal $\mathfrak{m}$ est un premier minimal contenant $\mathrm{Ann}_A(\frac{\bar{1}}{x})$.

a) Si $\mathfrak{m}$ non principal, alors $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(K/A)$ et d'après [5] $A_{B(n)} = A[X]$

b) Si $\mathfrak{m}$ est principal, alors il vérifie (P_3) et d'après les résultats précédents la fibre des idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ est de dimension 1.

2e exemple : Soient B un anneau intègre de corps des fractions K, K' une extension transcendante pure non triviale de K, V un anneau de valuation discrète v d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $V/\mathfrak{m} = K'$ et de corps des fractions Σ .

On appellera *anneau de Seïdenberg* l'anneau A :

$$A = \{x \in V / \bar{x} \in B\}$$

où $\bar{x}$ est la classe de x dans $V/_{\mathfrak{m}} = K'$. Il est clair que K est le corps des fractions de A, que A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et n'est pas noethérien. Si t est une uniformisante de v, P un idéal premier non nul de A et $n > 0$ le premier entier tel que $t^n \in P$, on a :

$$\mathfrak{m}^2 \subset At \ ; \quad A_P = A + \frac{A}{t} + \dots + \frac{A}{t^{n-1}}$$

Si B est de type (n,m), alors A est de type $(n+1, \ m+2)$ [10] . L'anneau A vérifie les propriétés (P_1) et (P_3). Par ailleurs, on a les équivalences

A est intégralement clos $\Longleftrightarrow$ B est intégralement clos

A vérifie (P_2) $\Longleftrightarrow$ B vérifie (P_2)

On a donc l'exemple d'anneau A qui vérifie (P_2) et n'est pas intégralement clos dès que B vérifie (P_2) et n'est pas intégralement clos. Il suffit de prendre par exemple :

$$B = Z[\sqrt{d}] \ d \equiv 1 \mod 8 \ [6], \ K = Q(\sqrt{d}), \ K' = K(X)$$

$$\Sigma = K'((T)) \ ; \ V = K'[[T]] \ ; \ A = \{a_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_s T^s + \dots / a_0 \in Z[\sqrt{d}], \alpha_i \in K'\}$$

Comme $A/_{\mathfrak{m}} = Z[\sqrt{d}]$ les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus d'un idéal premier de A se retrouvent dans $A_P[X]$.

Résumé :

Si A est un anneau intègre vérifiant des conditions plus faibles que noethérien, intégralement clos, on montre que pour l'étude du spectre d'anneaux de polynômes à valeurs entières dans A, on peut se ramener au cas local. On détermine alors le spectre des anneaux de polynômes à valeurs entières sur A, dans le cas où A est un anneau de Seïdenberg ou un anneau de valuation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ARNOLD - Krull dimension in power series rings, Transactions of the American. Mathematical society. vol. 177 March 1973.

[2] D. BARSKY - Bull. Soc. Math France 101 (1973) pp. 397-411.

[3] N. BOURBAKI - Algèbre commutative (Paris Hermann).

[4] P.J. CAHEN - Polynômes et dérivées à valeurs entières - Ann. Sci. Univ. Clermont - 1975. pp. 27-43.

[5] P.J. CAHEN et J.-L. CHABERT - Coefficients et valeurs d'un polynôme Bull. Sci. Math. 95 (1971) pp. 295-304.

[6] P.-J. CAHEN - Anneaux presque intégralement clos (A paraître).

[7] J.L. CHABERT - Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières. Journal für die reine und andgewandte Mathematik (1977) pp. 275-283.

[8] Y. HAOUAT et F. GRAZZINI - Polynômes de Barsky - Ann. Sci. Univ. Clermont II Soc. Math. Fasc. 18, 1979 pp. 65-81.

[9] A. SEIDENBERG : A note on the dimension theory of rings. Pacific J. Math 3 (1953) 505-512.

[10] A. SEIDENBERG - On the dimension theory of rings II. Pacific J. Math 4 (1954) 603-614.

Youssef HAOUAT
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
Campus Universitaire d'EL MENZAH
Tunisie