

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

YOUSSEF HAOUAT

**Anneaux de polynômes à valeurs entières sur un anneau
de valuation ou de Seidenberg**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 89, série *Mathématiques*, n° 23 (1986), p. 91-98

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1986__89_23_91_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIÈRES
SUR UN ANNEAU DE VALUATION OU DE SEIDENBERG

Youssef HAOUAT

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K . On s'intéresse à l'anneau des polynômes à valeurs entières (polynômes de $K[X]$ tels que $f(A) \subset A$) et aux sous-anneaux formés soit des polynômes dont les n premières dérivées sont à valeurs entières, soit des polynômes dont les n premières différences finies divisées sont à valeurs entières.

Le spectre de l'anneau des polynômes à valeurs entières sur un anneau noethérien a été étudié dans [7], celui de l'anneau dont les n premières dérivées sont à valeurs entières sur un anneau noethérien intégralement clos a été étudié dans [4], l'hypothèse de clôture intégrale a pu être remplacée par (S_2) dans [8]. Pour tous ces anneaux, on montre d'abord ici que la propriété noethérienne, utile pour se ramener au cas local, peut être remplacée, pour le même effet, par deux conditions : l'une de finitude (s'inspirant de [1]), l'autre similaire à la clôture intégrale mais plus faible ; et on se ramène ainsi au cas où A est local de corps résiduel fini.

On détermine alors le spectre, dans le cas des anneaux de polynômes dont les n premières différences finies divisées sont à valeurs entières [2] sur certains anneaux, notamment les anneaux de Seidenberg [10], en considérant comme dans le cas où A est un anneau de valuation discrète, l'anneau $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ des fonctions continues de \hat{A} dans \hat{A} .

Notations : A désigne un anneau intègre unitaire commutatif de corps des fonctions K , on note

$$A_S = \{f \in K[X] / f(A) \subset S\}$$

Pour f dans $K[X]$ et h_1 dans A^* (où A^* désigne l'ensemble des éléments de A distincts de 0), on pose :

$$\Delta_{h_1}^0 f = f \quad \text{et} \quad \Delta_{h_1}^1 f(x) = \frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1}$$

Puis, par récurrence, on définit les différences finies divisées :

$$\Delta_{h_1, \dots, h_n}^n f(x) = \frac{\Delta_{h_1, \dots, h_{n-1}}^{n-1} f(x+h_n) - \Delta_{h_1, \dots, h_{n-1}}^{n-1} f(x)}{h_n}$$

On note $A_{S(n)}$ (resp. $A_{B(n)}$) l'anneau des polynômes dont les n premières dérivées (resp. les n premières différences finies divisées) sont à valeurs entières et

$$A_{S(\infty)} = \bigcap_{n \geq 0} A_{S(n)} \quad (\text{resp. } A_{B(\infty)} = \bigcap_{n \geq 0} A_{B(n)}) :$$

on désigne par A_* l'un des anneaux $A_{S(n)}$, $A_{B(n)}$, $A_{S(\infty)}$ ou $A_{B(\infty)}$.

I - LOCALISATION :

On a toujours pour toute partie multiplicative T de A , d'après [4], [5], et [8]

$$T^{-1}(A)_* \supset (T^{-1}A)_*$$

La condition noethérienne n'intervient que pour l'inclusion inverse. On peut la remplacer par les deux conditions suivantes :

(P₁) Condition de finitude : Pour toute partie multiplicative T complémentaire d'un idéal premier non nul de A , le A -module $T^{-1}A$ est tel que pour tout M sous- A -module de $T^{-1}A$, il existe un sous- A -module de $T^{-1}A$ de type fini B_M et un entier k positif tel que tout m de M , on a m^k dans B_M .

(P₂) Condition proche d'intégralement clos : Si $a \in K$ est tel que $a^k \in A$ pour $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors $a \in A$.

On a :

Proposition : Soit A un anneau intègre vérifiant (P₁) et (P₂), pour toute partie multiplicative T complémentaire d'un idéal premier de A , on a :

$$T^{-1}(A_*) = (T^{-1})_*$$

Démonstration : L'égalité est vraie si T est le complémentaire de l'idéal $\{0\}$ de A ; sinon, il suffit de prouver que $(T^{-1}A)_* \subset T^{-1}(A)_*$. Soit f dans $(T^{-1}A)_{B(n)}$ (resp. $(T^{-1}A)_{S(n)}$) ; considérons le A -module M engendré par les valeurs prises par f sur Λ et par les valeurs prises par les n premières différences finies divisées sur A (resp. par les valeurs prises par les n premières dérivées sur A). Comme M est un sous- A -module de $T^{-1}\Lambda$, d'après la propriété (P₁) il existe un sous- A -module B_M de type fini et un entier positif k tels que pour tout m de M , m^k est dans B_M . Comme B_M est de type fini, il est engendré par

$$\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}, \dots, \frac{a_p}{s_p}.$$

On pose $t = s_1 \dots s_p$; alors pour tout m de M , $t m^k$ est dans A , donc $t^k m^k$ est dans Λ , et d'après la propriété (P₂), t_m est dans A ainsi que ses n premières différences finies divisées (resp. ses n premières dérivées). Par suite, f est dans $T^{-1}A_{B(n)}$ (resp. $T^{-1}A_{S(n)}$). La démonstration est analogue pour $T^{-1}(A_{B(\infty)})$ et $T^{-1}(A_{S(\infty)})$: ceci montre l'égalité entre $T^{-1}A_*$ et $(T^{-1}A)_*$.

II - SPECTRE :

Sous les conditions énoncées plus haut, on peut localiser et étudier le spectre fibre par fibre : la fibre au-dessus d'un idéal premier P de A de corps résiduel infini est alors celle de $(A_P)_* = A_P[X] [5]$. Elle est donc bien connue. L'étude de la fibre au-dessus d'un idéal premier P de A , de corps résiduel fini, nous permet de nous ramener au cas où A est local d'idéal maximal \mathfrak{M} , de corps résiduel fini. On suppose alors en outre que A vérifie la propriété (P₃) suivante :

(P₃) Propriété de finitude : Il existe x_0 dans \mathfrak{M} et k entier positif tel que

$$\mathfrak{M}^k \subset A x_0$$

On peut alors déterminer le spectre de $A_{B(n)}$ et de $A_{B(\infty)}$. On a le théorème :

Théorème 1 (*) : Pour $n > 0$ la fibre de $A_{B(n)}$ au-dessus de \mathfrak{M} est en bijection avec A/\mathfrak{M} . On décompose la démonstration en trois lemmes.

Lemme 1 : Soit g dans $A_{B(n)}$ et x_0 non nul dans \mathfrak{M} ; on suppose que $g(x)$ appartient à \mathfrak{M} pour tout x de A . Il existe alors $s = k(n + 1)$ tel que :

$$g^s \in A_{B(n)} x_0$$

Démonstration : [8], deuxième partie, lemme 8.

Lemme 2 : Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de \mathfrak{M} sont maximaux et de corps résiduel A/\mathfrak{M} .

Démonstration : [8], Deuxième partie, proposition 9.

Lemme 3 : Pour tout $n > 0$, $A_{B(n)}$ s'injecte dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ (où \hat{A} est le complété de A pour la topologie \mathfrak{M} -adique).

Démonstration : Montrons que pour tout a dans \hat{A} , $f(a)$ est dans \hat{A} . Il existe une suite $(a_p)_{p \geq 0}$ de A tendant vers a . Pour p et m assez grands, puisque f est dans $A_{B(n)}$ si $a_p \neq a_m$, on a :

$$\frac{f(a_p) - f(a_m)}{a_p - a_m} = y_{p,m} \in A$$

Ce qui montre que la suite $(f(a_p))_{p \geq 0}$ est aussi de Cauchy, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(a_p)$ est dans \hat{A} .

(*) Je remercie le référent d'avoir signalé une omission dans une première version.

Soit d non nul dans A tel que $d f(x)$ est dans $A[X]$. Alors $d f(a) = \sum_{i=0}^{i=s} c_i a^i$

et $d f(a_p) = \sum_{i=0}^{i=s} c_i a_p^i$; par passage à la limite $d \lim_{p \rightarrow +\infty} f(a_p) = \sum_{i=0}^{i=s} c_i a^i$

et $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(a_p) = \sum_{i=0}^s \frac{c_i}{d} a^i$. Ce qui montre que $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(a_p)$ ne dépend pas de la

suite choisie tendant vers a . On pose $f(a) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f(a_p)$.

Ainsi, si f est dans $A_{B(n)}$, on a $f(\hat{A}) \subset \hat{A}$. Montrons maintenant que f est dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$;

soient x et y dans \hat{A} tels que $x - y$ est dans $\hat{\mathfrak{m}}^k$. Il existe x_{k_1} (resp. y_{k_2}) tel que $x - x_{k_1}$ (resp. $y - y_{k_2}$) soit dans $\hat{\mathfrak{m}}^k$, ainsi que $f(x) - f(x_{k_1})$ (resp. $f(y) - f(y_{k_2})$).

En effet, si $(x_p)_{p \geq 0}$ (resp. $(y_p)_{p \geq 0}$) est une suite de A tendant vers x (resp. y),

on a $f(x_p) - f(x_{k_1}) = z_{k_1, p} (x_p - x_{k_1})$ (resp. $f(y_p) - f(y_{k_2}) = z'_{k_2, p} (y_p - y_{k_2})$)

dans $\hat{\mathfrak{m}}^k$ pour p et k_1 assez grands, où $z_{k_1, p}$ (resp. $z'_{k_2, p}$) est un élément de Λ .

En faisant tendre p vers $+\infty$, on a le résultat. Ainsi $x_{k_1} - y_{k_2}$ est dans $\hat{\mathfrak{m}}^k$ et il

en est de même pour $f(x_{k_1}) - f(y_{k_2}) = a(x_{k_1} - y_{k_2})$ (où $a \in \Lambda$).

Par suite, $f(x) - f(y)$ est dans $\hat{\mathfrak{m}}^k$, d'où la continuité de f .

Démonstration du théorème : Comme $A_{B(n)}$ s'injecte dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$, alors les idéaux premiers de $A_{B(n)} \otimes A/\mathfrak{m}$ se relèvent dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes A/\mathfrak{m} = \mathcal{C}(\hat{A}, A/\mathfrak{m})$ [4] ;

par ailleurs, les idéaux premiers de $\mathcal{C}(\hat{A}, A/\mathfrak{m})$ sont en bijection avec les points de \hat{A}

[3 chapitre II § IV exercices] ; il en résulte que les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus

de \mathfrak{M} sont de la forme

$$M_a = \{f \in A_{B(n)} / f(a) \in \hat{\mathfrak{M}}\} \quad \text{où } a \in \hat{\Lambda}.$$

De plus, si $a \equiv b$ modulo \mathfrak{M} alors $M_a = M_b$ [8].

Théorème 2 : La fibre de $A_{B(\infty)}$ au-dessus de \mathfrak{M} est en bijection avec Λ/\mathfrak{m} .

III - EXEMPLES :

1er exemple : Cas d'un anneau de valuation Λ , d'idéal maximal \mathfrak{M} non nécessairement noethérien. Etudions le spectre de $A_{B(n)}$.

- Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus d'un idéal premier P de Λ non maximal se retrouvent dans $A_P[X]$ car P est de corps résiduel infini [5]

- Considérons les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de \mathfrak{M}

A) A/\mathfrak{M} est infini : alors $A_{B(n)} = A[X]$ [5]

B) A/\mathfrak{M} est fini.

1) S'il n'y a pas d'idéaux premiers juste sous \mathfrak{M} : alors $\mathfrak{M} \notin \text{Ass}_f(K/\Lambda)$,

Car $\text{Ann}_A\left(\frac{\bar{1}}{x}\right) \subset \mathfrak{M}$ entraîne $x \in \mathfrak{M} = \bigcup_{P \subset \mathfrak{M}} P$ donc $x \in P_0$ et $\text{Ann}_\Lambda\left(\frac{\bar{1}}{x}\right) \subset P_0$.

P premier

D'après [5] $A_{B(n)} = A[X]$.

2) S'il existe P premier juste sous \mathfrak{M} . Alors $\mathfrak{M} \in \text{Ass}_f(K/\Lambda)$.

Car si x est dans \mathfrak{M} et pas dans P , l'idéal \mathfrak{M} est un premier minimal contenant $\text{Ann}_A\left(\frac{\bar{1}}{x}\right)$.

a) Si \mathfrak{M} non principal, alors $\mathfrak{M} \notin \text{Ass}(K/\Lambda)$ et d'après [5] $A_{B(n)} = A[X]$

b) Si \mathfrak{M} est principal, alors il vérifie (P_3) et d'après les résultats précédents la fibre des idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de \mathfrak{M} est de dimension 1.

2e exemple : Soient B un anneau intègre de corps des fractions K , K' une extension transcendante pure non triviale de K , V un anneau de valuation discrète v d'idéal maximal \mathfrak{M} tel que $V/\mathfrak{M} = K'$ et de corps des fractions Σ .

On appellera *anneau de Seidenberg* l'anneau A :

$$A = \{x \in V / \bar{x} \in B\}$$

où \bar{x} est la classe de x dans $V/\mathfrak{m} = K'$. Il est clair que K est le corps des fractions de A, que A est local d'idéal maximal \mathfrak{m} et n'est pas noethérien. Si t est une uniformisante de v, P un idéal premier non nul de A et $n > 0$ le premier entier tel que $t^n \in P$, on a :

$$\mathfrak{m}^2 \subset A t; \quad A_P = A + \frac{A}{t} + \dots + \frac{A}{t^{n-1}}$$

Si B est de type (n,m), alors A est de type (n+1, m+2) [10]. L'anneau A vérifie les propriétés (P₁) et (P₃). Par ailleurs, on a les équivalences

$$\begin{aligned} A \text{ est int\`egralement clos} &\iff B \text{ est int\`egralement clos} \\ A \text{ v\`erifie } (P_2) &\iff B \text{ v\`erifie } (P_2) \end{aligned}$$

On a donc l'exemple d'anneau A qui vérifie (P₂) et n'est pas int\`egralement clos d\`es que B vérifie (P₂) et n'est pas int\`egralement clos. Il suffit de prendre par exemple :

$$B = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \text{ } d \equiv 1 \pmod{8} \text{ [6], } K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}), K' = K(X)$$

$$\Sigma = K'((T)); V = K'[[T]]; A = \{a_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_s T^s + \dots / a_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \alpha_i \in K'\}$$

Comme $A/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus d'un idéal premier de A se retrouvent dans $A_P[X]$.

Résumé :

Si A est un anneau int\`egre vérifiant des conditions plus faibles que noethérien, int\`egralement clos, on montre que pour l'étude du spectre d'anneaux de polynômes à valeurs entières dans A, on peut se ramener au cas local. On détermine alors le spectre des anneaux de polynômes à valeurs entières sur A, dans le cas où A est un anneau de Seidenberg ou un anneau de valuation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ARNOLD - Krull dimension in power series rings. Transactions of the American Mathematical society, vol. 177 March 1973.
- [2] D. BARSKY - Bull. Soc. Math France 101 (1973) pp. 397-411.
- [3] N. BOURBAKI - Algèbre commutative (Paris Hermann).
- [4] P.J. CAHEN - Polynômes et dérivées à valeurs entières - Ann. Sci. Univ. Clermont - 1975. pp. 27-43.
- [5] P.J. CAHEN et J.-L. CHABERT - Coefficients et valeurs d'un polynôme Bull. Sci. Math. 95 (1971) pp. 295-304.
- [6] P.-J. CAHEN - Anneaux presque intégralement clos (A paraître).
- [7] J.L. CHABERT - Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières. Journal für die reine und angewandte Mathematik (1977) pp. 275-283.
- [8] Y. HAOUAT et F. GRAZZINI - Polynômes de Barsky - Ann. Sci. Univ. Clermont II Soc. Math. Fasc. 18, 1979 pp. 65-81.
- [9] A. SEIDENBERG : A note on the dimension theory of rings. Pacific J. Math 3 (1953) 505-512.
- [10] A. SEIDENBERG - On the dimension theory of rings II. Pacific J. Math 4 (1954) 603-614.

Youssef HAOUAT
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
Campus Universitaire d'EL MENZAH
Tunisie