

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

BERNARD BRUNET

Complétion d'un espace de recouvrement régulier

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 89, série *Mathématiques*, n° 23 (1986), p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1986__89_23_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLETION D'UN ESPACE DE RECOUVREMENT REGULIER

Bernard BRUNET

Dans ce qui suit, en introduisant la notion de filtre de Cauchy sur un espace de recouvrement, nous montrons que tout espace de recouvrement régulier possède un complété régulier. Ce résultat généralise un théorème bien connu concernant les espaces uniformes [1] et peut être considéré comme dual d'un résultat obtenu par H. HERRLICH pour les «Nearness spaces» [2].

§ 1. Structure de recouvrement sur un ensemble.

1.1. : Etant donné un ensemble X , on appellera *structure de prérecouvrement* sur X , toute partie non vide μ de $\mathcal{P}^2(X)$ satisfaisant aux axiomes suivants :

R_1 / Si \mathcal{R} appartient à μ , alors $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \neq X$.

R_2 / Si \mathcal{R} raffine \mathcal{R}' (c'est-à-dire lorsque, pour tout élément R de \mathcal{R} , il existe un élément R' de \mathcal{R}' tel que R soit inclus dans R') et si \mathcal{R} appartient à μ , alors \mathcal{R}' appartient à μ .

R_3 / Si \mathcal{R} et \mathcal{R}' appartiennent à μ , alors $\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}' = \{R \cap R'; R \in \mathcal{R}, R' \in \mathcal{R}'\}$ appartient à μ .

R_4 / Si X appartient à \mathcal{R} , alors \mathcal{R} appartient à μ .

1.2. : Etant donnée une structure de prérecouvrement μ sur X , on appellera, pour toute partie A de X , μ -intérieur de A et on notera $\text{Int}_\mu A$, l'ensemble des éléments x de X tels que $\{A, \bigcap \{x\}\}$ appartienne à μ , et on dira que μ est une *structure de recouvrement* lorsque l'axiome suivant est satisfait :

R_5 / Si \mathcal{R} appartient à μ , alors $\{\text{Int}_\mu R ; R \in \mathcal{R}\}$ appartient à μ .

Le couple (X, μ) est alors appelé espace de recouvrement (R-espace en abrégé).

1.3. : Un R-espace (X, μ) sera dit *accessible*, si et seulement si, pour tout couple de points distincts x et y , $\{\{x\}, \bigcap \{y\}\}$ appartient à μ .

1.4. : Etant donnés deux R-espaces (X, μ) et (X', μ') , on dira qu'une application f de X dans X' est une *R-application* si et seulement si, pour tout μ' -recouvrement \mathcal{R}' de X' , $f^{-1}(\mathcal{R}')$ est un μ -recouvrement de X .

1.5. : **Topologie associée à une structure de recouvrement.**

. Si μ est une structure de recouvrement sur X , alors $\{A/A = \text{Int}_\mu A\}$

est l'ensemble des ouverts d'une topologie $\tau(\mu)$ sur X .

Pour toute partie A de X , on a $\text{Int}_{\tau(\mu)} A = \text{Int}_\mu A$.

La topologie $\tau(\mu)$ est accessible si et seulement si (X, μ) est accessible.

Remarque : Pour toute structure de recouvrement μ sur X et toutes parties A et B de X ,

$$\{A, \bigcap B\} \in \mu \Rightarrow \text{Adh}_{\tau(\mu)} B \subset \text{Int}_{\tau(\mu)} A.$$

En effet, d'après l'axiome R_5 , $\{\text{Int}_{\tau(\mu)} A, \text{Int}_{\tau(\mu)} \bigcap B\}$ appartient à μ ,

et par suite, d'après l'axiome R_1 , $(\text{Int}_{\tau(\mu)} A) \cup (\bigcap \text{Adh}_{\tau(\mu)} B) = X$,

d'où le résultat.

1.6 : **R-espaces topologiques.**

Soit T une topologie sur un ensemble X .

L'ensemble $\mu_T = \{\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X) / \bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Int}_T R = X\}$ est alors une structure de

recouvrement sur X .

Si T est accessible, $T = \tau(\mu_T)$ et par suite (X, μ_T) est accessible.

De plus, si f est une application continue d'un espace accessible (X, T) dans un autre (X', T') , f est une R-application de (X, μ_T) dans $(X', \mu_{T'})$.

On peut donc plonger la catégorie des espaces topologiques accessibles dans la catégorie des espaces de recouvrement accessibles.^(*)

Un R-espace accessible (X, μ) sera alors dit *topologique* si et seulement s'il existe une topologie accessible T sur X telle que $\mu = \mu_T$, c'est-à-dire lorsque, pour toute partie \mathcal{R} de $\mathcal{P}(X)$, \mathcal{R} appartient à μ si et seulement si $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Int}_\mu R = X$.

1.7. R-espaces uniformes.

Soit \mathcal{U} une structure uniforme sur X [1].

Posons, pour tout entourage U , $\mathcal{R}_U = \{U(x) ; x \in X\}$ et, désignons par $\mu_{\mathcal{U}}$ l'ensemble des parties \mathcal{R} de $\mathcal{P}(X)$ pour lesquelles il existe un entourage U tel que \mathcal{R}_U raffine \mathcal{R} .

$\mu_{\mathcal{U}}$ est alors une structure de recouvrement sur X telle que la topologie associée soit la topologie associée à \mathcal{U} . (Notons que les $\mu_{\mathcal{U}}$ -recouvrements sont les recouvrements uniformes de J.W. TUKEY [5]).

De plus, si f est une application uniformément continue de (X, \mathcal{U}) dans (X', \mathcal{U}') , f est une R-application de $(X, \mu_{\mathcal{U}})$ dans $(X', \mu_{\mathcal{U}'})$.

On peut donc plonger la catégorie des espaces uniformes dans celle des R-espaces.

Un R-espace (X, μ) sera alors dit *uniforme* lorsqu'il existe une structure uniforme \mathcal{U} sur X telle que $\mu = \mu_{\mathcal{U}}$, c'est-à-dire, lorsque tout μ -recouvrement possède un étoile-raffinement [5].

(*) et plus généralement, celle des espaces de convergence prétopologiques accessibles dans celle des espaces de prérecouvrement accessibles.

§ 2. R espaces complets.

1/ Filtres de Cauchy sur un R-espace.

Etant donné un R-espace (X, μ) , on dira qu'un filtre \mathcal{F} sur X est un *filtre de Cauchy* de (X, μ) , si et seulement si, pour tout μ -recouvrement \mathcal{R} sur X , $\mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ n'est pas vide, soit encore, si et seulement si $\bigcap \mathcal{F}$ n'est pas un μ -recouvrement.

Il en résulte alors de cette définition que :

- 2.1. : Tout filtre convergeant pour $\tau(\mu)$ est de Cauchy de (X, μ) .
- 2.2. : Si (X, μ) est un R-espace topologique, un filtre est de Cauchy de (X, μ) si et seulement s'il converge pour $\tau(\mu)$.
- 2.3. : Si $(X, \mu_{\mathcal{U}})$ est un R-espace uniforme, un filtre est de Cauchy de $(X, \mu_{\mathcal{U}})$ si et seulement s'il est de Cauchy pour la structure uniforme \mathcal{U} sur X .

De plus 2.4. : Si (X, μ) est un R-espace, alors pour tout élément x de X , le filtre des voisinages de x pour $\tau(\mu)$ est un filtre de Cauchy minimal de (X, μ) .

2/ R-espaces complets.

On dira qu'un R-espace (X, μ) est *complet* si et seulement si tout filtre de Cauchy minimal de (X, μ) converge pour la topologie $\tau(\mu)$.

Il résulte alors :

- de 2.2., que tout R-espace topologique est complet.
- de 2.3. et du fait que dans un espace uniforme, pour tout filtre de Cauchy, il existe un filtre de Cauchy minimal moins fin que lui ([1], chap. II, § 3, n° 2, Proposition 5, page 199), qu'un R-espace uniforme $(X, \mu_{\mathcal{U}})$ est complet si et seulement si l'espace uniforme (X, \mathcal{U}) est complet.

§ 3. R-espaces réguliers.

Notations : Soit (X, μ) un R-espace.

Pour toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(X)$, on pose :

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{A}} &= \{B \mid \exists A \in \mathcal{A}, \{A, B\} \in \mu\} \\ \hat{\mathcal{A}} &= \{B \mid \exists A \in \mathcal{A}, \{B, A\} \in \mu\} \end{aligned}$$

Remarquons que si, pour toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(X)$, on désigne par $\mathcal{S}\mathcal{A}$ son supplémentaire,

c'est-à-dire l'ensemble des parties Y de X telles que $\bigcap Y$ appartienne à \mathcal{B} , on a $S\check{\mathcal{A}} = (S\mathcal{A})^\wedge$, autrement dit $\hat{\mathcal{A}} = S(S\mathcal{A})^\vee$.

Définition :

On dira qu'un R -espace (X, μ) est *régulier* si et seulement s'il est accessible et si de plus, pour tout μ -recouvrement \mathcal{R} sur X , $\check{\mathcal{R}}$ est un μ -recouvrement sur X .

Proposition 3.1. : *Si (X, μ) est un R -espace régulier, alors, pour tout filtre de Cauchy ϕ de (X, μ) , $\hat{\phi}$ est l'unique filtre de Cauchy minimal de (X, μ) moins fin que ϕ .*

- $\hat{\phi}$ est de façon simple un filtre moins fin que ϕ .

- Montrons que $\hat{\phi}$ est de Cauchy.

Soit \mathcal{R} un μ -recouvrement sur X . $\check{\mathcal{R}}$ est alors un μ -recouvrement sur X et par suite, $\check{\mathcal{R}} \cap \phi$ n'est pas vide. Il existe donc un élément F de ϕ et un élément R de \mathcal{R} tels que $\{R, \bigcap F\}$ appartienne à μ , ce qui entraîne que R appartient à $\hat{\phi} \cap \mathcal{R}$ d'où le résultat.

- Soit alors Ψ un filtre de Cauchy moins fin que ϕ et soit A un élément de $\hat{\phi}$. Il existe un élément F de ϕ tel que $\{A, \bigcap F\}$ appartienne à μ . Comme Ψ est de Cauchy, et comme $\bigcap F$ n'appartient pas à ϕ , donc à Ψ , A appartient à Ψ , et par suite $\hat{\phi}$ est moins fin que Ψ .

$\hat{\phi}$ est donc l'unique filtre de Cauchy minimal moins fin que ϕ .

Corollaire 3.2. : *Un R -espace régulier est complet si et seulement si tout filtre de Cauchy converge.*

Proposition 3.3. : *Si (X, μ) est un R -espace régulier, l'espace topologique $(X, \tau(\mu))$ est régulier.*

Soit ϕ un filtre convergeant vers x . Comme (X, μ) est régulier, il résulte de 3.1. et 2.4. que $\hat{\phi}$ est le filtre des voisinages de x . Par suite, pour tout voisinage ouvert V de x , il existe un élément F de ϕ tel que $\{V, \bigcap F\}$ appartienne à μ , ce qui implique, d'après

1.5., que V contienne $\text{Adh}_{\tau(\mu)}F$. Il en résulte que le filtre $\bar{\phi}$ de base $\{\text{Adh}_{\tau(\mu)}F; F \in \phi\}$ converge vers x , d'où le résultat puisque $(X, \tau(\mu))$ est accessible.

Proposition 3.4. : *Tout R-espace uniforme accessible est régulier.*

Soit \mathcal{R} un $\mu_{\mathcal{Q}}$ -recouvrement sur X . Il existe alors un entourage U tel que, pour tout élément x de X , il existe un élément R_x de \mathcal{R} tel que $U(x)$ soit inclus dans R_x .

Soit V un entourage symétrique tel que V^3 soit inclus dans U .

Alors, pour tout élément x de X :

- i) $V(x)$ est inclus dans R_x .
- ii) Comme de façon simple « $\forall y \in X, V(x) \cap V(y) \neq \emptyset \Rightarrow V(y) \subset U(x) \subset R_x$ »,

$\{R_x, \bigcup V_x\}$ appartient à $\mu_{\mathcal{Q}}$ et par suite $V(x)$ appartient à $\check{\mathcal{R}}$.

$\check{\mathcal{R}}$ est par suite un $\mu_{\mathcal{Q}}$ -recouvrement.

Proposition 3.5. : *Si (X, μ) est un R-espace régulier et si ϕ est un filtre de Cauchy minimal de (X, μ) , tout élément de ϕ a un intérieur qui appartient à ϕ .*

Soit A un élément de ϕ . Comme (X, μ) est régulier et ϕ minimal, $\phi = \hat{\phi}$.

Par suite, il existe un élément F de ϕ tel que $\{A, \bigcup F\}$ appartienne à μ ,

donc tel que, d'après 1.5., $\text{Int}_{\tau(\mu)}A \supset \text{Adh}_{\tau(\mu)}F$, d'où le résultat.

4/ Complétion d'un R-espace régulier.

Notations : (X, μ) étant un R-espace, on désigne par :

- X^* l'ensemble des filtres de Cauchy minimaux de (X, μ) .
- j l'application de X dans X^* qui à x associe le filtre des voisinages de x pour $\tau(\mu)$.

et on pose :

- pour toute partie A de X , $A^* = \{\varphi \in X^* \mid A \in \varphi\}$
- pour toute partie \mathcal{R} de $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}^* = \{R^* \mid R \in \mathcal{R}\}$

$$\cdot \mu^* = \left\{ \Omega \in \mathcal{P}^2(X^*) \mid \exists \mathcal{R} \in \mu \text{ tel que } \mathcal{R}^* \text{ raffine } \Omega \right\}.$$

Théorème :

Si (X, μ) est un R-espace régulier, alors :

1/ (X^*, μ^*) est un R-espace régulier complet.

2/ j est un plongement de (X, μ) dans (X^*, μ^*) tel que

$$\text{Adh}_{\tau(\mu^*)} j(X) = X^*.$$

3/ Pour tout R-espace régulier complet (Y, ν) et toute R-application f de (X, μ)

dans (Y, ν) , il existe une unique R-application g de (X^*, μ^*) dans (Y, ν)

telle que $f = g \circ j$.

Faisons tout d'abord quelques remarques :

(1) Pour toutes parties A et B de X , $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$.

En effet, pour tout filtre φ sur X , $A \cap B$ appartient à φ si et seulement si A et B appartiennent à φ .

(2) Pour tout μ -recouvrement \mathcal{R} sur X , $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R^* = X^*$.

En effet, pour tout filtre de Cauchy φ sur X , $\varphi \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$.

(3) Pour toute partie A de X , $(\text{Int}_{\tau(\mu)} A)^* = A^*$.

En effet, d'après 3.5., pour tout filtre de Cauchy minimal φ sur X , A appartient à φ si et seulement si $\text{Int}_{\tau(\mu)} A$ appartient à φ .

Démonstration du théorème :

1/ a) μ^* est une structure de recouvrement sur X^*

$\cdot \mu^*$ est de façon simple une structure de prérecouvrement, compte tenu des remarques (1) et (2) précédentes.

Montrons que μ^* satisfait R_5 .

Remarque : Si A et B sont deux parties de X telles que $\{A, B\}$ appartienne à μ ,

alors $B^* \subset \text{Int}_{\tau(\mu^*)} A^*$.

Soit φ un élément de B^* . Comme $\{A^*, ([B]^*)\}$ appartient à μ^* et raffine $\{A^*, [\{\varphi\}]\}$, $\{A^*, [\{\varphi\}]\}$ appartient à μ^* , d'où le résultat.

Soit alors \mathcal{R} un μ -recouvrement sur X . Comme (X, μ) est régulier, $\mathcal{J} = \check{\mathcal{R}}$ appartient à μ et par suite \mathcal{J}^* appartient à μ^* . Comme, d'après la remarque précédente, \mathcal{J}^* raffine $\{\text{Int}_{\tau(\mu^*)} R^*; R \in \mathcal{R}\}$, ce dernier ensemble appartient à μ^* d'où $R_5/$.

b) (X^*, μ^*) est accessible

Soient φ et ψ deux éléments distincts de X^* . Comme $\varphi \cap \psi$ n'est pas un filtre de Cauchy de (X, μ) , il existe un μ -recouvrement \mathcal{R} de X tel que $\mathcal{R} \cap (\varphi \cap \psi) = \emptyset$.

Par suite, pour tout élément R de \mathcal{R} , R n'appartient pas à φ ou pas à ψ . \mathcal{R}^* raffine donc $\{[\{\varphi\}], [\{\psi\}]\}$, ce qui entraîne que $\{[\{\varphi\}], [\{\psi\}]\}$ appartient à μ^* .

c) (X^*, μ^*) est régulier

Soit \mathcal{R} un μ -recouvrement sur X et soit $\mathcal{J} = \check{\mathcal{R}}$. Alors \mathcal{J}^* raffine $(\mathcal{R}^*)^\vee$.

En effet, si S appartient à \mathcal{J} , il existe un élément R de \mathcal{R} tel que $\{R, [S]\}$ appartienne à μ . $\{R^*, ([S]^*)\}$ appartient alors à μ^* . Comme $\{R^*, ([S]^*)\}$ raffine $\{R^*, [S^*]\}$

(puisque $\varphi \in ([S]^*) \Rightarrow [S \in \varphi \Rightarrow S \not\subset \varphi \Rightarrow \varphi \in [S^*])$

$\{R^*, [S^*]\}$ appartient à μ^* et par suite S^* appartient à $(\mathcal{R}^*)^\vee$.

d) (X^*, μ^*) est complet

Soit Φ un filtre de Cauchy de (X^*, μ^*) et soit $\varphi = \{A \subset X / A^* \in \Phi\}$.

φ est de façon simple un filtre sur X . C'est de plus un filtre de Cauchy de (X, μ) .

En effet, pour tout μ -recouvrement \mathcal{R} de X , $\mathcal{R}^* \cap \Phi$ n'est pas vide et par suite,

$\mathcal{R} \cap \varphi$ n'est pas vide. Soit alors ψ le filtre de Cauchy minimal de (X, μ) moins fin

que φ ($\psi = \hat{\varphi}$). Montrons que Φ converge pour $\tau(\mu^*)$ vers ψ .

Soit \mathcal{V} un voisinage pour $\tau(\mu^*)$ de ψ . $\{\mathcal{V}, [\{\psi\}]\}$ est alors un

μ^* -recouvrement de X^* . Il existe donc un μ -recouvrement \mathcal{R} de X tel que \mathcal{R}^* raffine $\{\mathcal{V}, [\{\psi\}]\}$. Comme ψ est de Cauchy de (X, μ) , il existe un élément R de \mathcal{R} tel que R appartienne à ψ , donc à φ , et par suite tel que R^* appartienne à ϕ . Comme R^* n'est pas contenu dans $[\{\psi\}]$ et comme \mathcal{R}^* raffine $\{\mathcal{V}, [\{\psi\}]\}$, R^* est contenu dans \mathcal{V} , ce qui entraîne que \mathcal{V} appartient à ϕ , d'où le résultat.

2/ a) j est injective puisque, (X, μ) étant régulier, l'espace topologique $(X, \tau(\mu))$ est régulier (3.3), donc séparé.

b) j est une R -application de (X, μ) dans (X^*, μ^*)

Soit \mathcal{R} un μ -recouvrement sur X et soit $\mathcal{J} = j^{-1}(\mathcal{R}^*)$

Comme, pour tout R de \mathcal{R} , $j^{-1}(R^*) = \{x \mid R \in j(x)\} = \text{Int}_{\tau(\mu)} R$,

\mathcal{J} est, d'après l'axiome $R_{5/}$ un μ -recouvrement sur X .

c) j est un plongement de (X, μ) dans (X^*, μ^*)

Montrons pour cela que, pour tout μ -recouvrement \mathcal{R} sur X , il existe un

μ^* -recouvrement \mathcal{J} sur X^* tel que $\mathcal{R} = j^{-1}(\mathcal{J})$.

Soit \mathcal{R} un μ -recouvrement et soit $\mathcal{J} = \{R^* \cup j(R) \mid R \in \mathcal{R}\}$.

Comme, pour tout élément R de \mathcal{R} , $j^{-1}[R^* \cup j(R)] = R \cup \text{Int}_{\tau(\mu)} R = R$,

$j^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{R}$. Comme d'autre part, \mathcal{R}^* raffine \mathcal{J} , \mathcal{J} est un μ^* -recouvrement, d'où le résultat.

d) $\text{Adh}_{\tau(\mu^*)} j(X) = X^*$

Soit U un ouvert non vide de la topologie $\tau(\mu^*)$.

Soit φ^* un élément de U . $\varphi^* = \{A^* \mid A \in \varphi\}$ est alors (1/d) une base de filtre de Cauchy de (X^*, μ^*) qui converge vers φ^* . Il existe donc un élément A de φ tel que A^* soit contenu dans U . Comme, d'après 3.5, $\text{Int}_{\tau(\mu)} A$ appartient à φ , il existe un élément x de X tel que A appartienne à $j(x)$; et donc, tel que $j(x)$ appartienne à A^* et par suite à U . $U \cap j(X)$ est donc non vide.

3/ *Universalité de (X^*, μ^*)*

Soit φ un élément de X^* . Comme f est une R -application, $f(\varphi)$ est de façon simple base d'un filtre de Cauchy de (Y, ν) . Comme (Y, ν) est régulier complet (ce qui implique, d'après 3.3, que l'espace topologique $(Y, \tau(\nu))$ est régulier, donc séparé), $f(\varphi)$ converge vers un unique élément de Y .

Soit alors g l'application de X^* dans Y définie par $g(\varphi) = \lim_{\tau(\nu)} f(\varphi)$.

a) De façon immédiate $g \circ j = f$.

b) g est une R -application de (X^*, μ^*) dans (Y, ν) . En effet :

Soit \mathcal{J} un ν -recouvrement de Y . Comme (Y, ν) est régulier, $\check{\mathcal{J}}$ est également un ν -recouvrement de Y et par suite, puisque f est une R -application,

$\mathcal{R} = f^{-1}(\check{\mathcal{J}})$ est un μ -recouvrement de X .

Montrons que \mathcal{R}^* raffine $g^{-1}(\mathcal{J})$, ce qui impliquera le résultat cherché.

Soit R un élément de \mathcal{R} . Il existe un élément B de $\check{\mathcal{J}}$ tel que $R = f^{-1}(B)$.

Soit A l'élément de \mathcal{J} tel que $\{A, \{B\}\}$ appartienne à ν . Montrons que R^*

est inclus dans $g^{-1}(A)$, ce qui impliquera que \mathcal{R}^* raffine $g^{-1}(\mathcal{J})$.

Soit φ un élément de R^* . R appartient alors à φ et par suite, $g(\varphi) = \lim_{\tau(\nu)} f(\varphi)$ appartient à $\text{Adh}_{\tau(\nu)} f(R)$, donc à $\text{Adh}_{\tau(\nu)} B$. Il en résulte (1.5), puisque $\{A, \{B\}\}$ appartient à ν , que $g(\varphi)$ appartient à A .

c) L'unicité de l'application g découle du fait que $j(X)$ est dense dans $(X^*, \tau(\mu^*))$ et du fait que $(Y, \tau(\nu))$ est séparé.

Corollaire (H. HERRLICH) : *Tout «Nearness space» régulier possède un complété régulier.*

Soit (X, ξ) un «Nearness space» régulier.

$\mu = \{ \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X) \mid \{ \{ R ; R \in \mathcal{R} \} \notin \xi \}$ est alors une structure de recouvrement régulière sur X . Comme on peut identifier ξ -fermetures et filtres de Cauchy minimaux, le complété de (X, μ) est alors celui de (X, ξ) .

REFERENCES

- [1] N. BOURBAKI : «*Topologie générale*» , Fasc. II, chap. I et II, 4ème Edition, 1965, Hermann, Paris.
- [2] H. HERRLICH : «*A concept of Nearness*» . Général Topology 5 (1974). 191. 212.
- [3] H. HERRLICH : «*On the extendibility of continuous functions*». Général Topology 5 (1974). 213-215.
- [4] H. HERRLICH : «*Topological structures*». Mathematical Centre tracts, 52, (1974), 59-122.
- [5] J.W. TUKEY : «*Convergence and Uniformity in Topology*». Ann. Math. Stud 2, (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. , 1940).

Avec tous mes remerciements à L. HADDAD pour ses précieuses remarques,

à Clermont-Ferrand, le 15 octobre 1985.

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

Adresse personnelle : 55, Avenue Thermale, D., 63400 Chamalières, France.