

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARIO DE SALVO

Iperanelli ed ipercorpi

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, n° 22 (1984), p. 89-107

[<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_89_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_89_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IPERANELLI ED IPERCORPI

Mario DE SALVO

Universita de MESSINA

Sommario :

Gli iperanelli (e ipercorpi), nell'accezione usata in questo lavoro, introdotti in [4], generalizzano nel modo più naturale la nozione di anello (e corpo rispettivamente). Una definizione più restrittiva era stata quella, usata in [24], degli ipercorpi valutati, ripresa successivamente in [25], [26]. In questo lavoro, le strutture di iperanello e di ipercorpo sono analizzate soprattutto in relazione con quella di semi-ipergruppo completo. Si danno criteri per la costruzione di iperanelli completi e si mettono in luce proprietà degli iperideali.

Summary :

In this paper we consider hyper-rings (resp. hyper-skewfield) as a natural generalization of

the concept of ring (resp. skewfield). Here, hyper-rings are different from those used in [24], [25], [26]. The structures of hyper-rings and hyper-skewfield are considered here in relation to the definition of complete semi-hypergroups. We give ways of constructing complete hyper-rings and we prove some properties of hyper-ideals.

$$\begin{array}{c} * \\ * \quad * \end{array}$$

Ricordiamo alcune definizioni :

Sia A una parte non vuota di un semi-ipergruppo $\langle H, \circ \rangle$;

A si dice *completa* se $\circ \Pi x_i \cap A \neq \emptyset \rightarrow \circ \Pi x_i \subset A$.

Si dice *chiusura completa* di A in H e si denota con $\mathcal{C}_H(A)$, l'intersezione delle parti di H che sono complete e contengono A .

Se $A = \{x\}$ si scrive $\mathcal{C}_H(x)$ al posto di $\mathcal{C}_H(\{x\})$.

H si dice *completo* se $\forall (x, y) \in H^2 \quad x \circ y = \mathcal{C}_H(x \circ y)$.

Si denota con β_H^* , la chiusura transitiva della relazione β_H così definita :

$$x \beta_H y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (z_1, z_2, \dots, z_n) \in H^n : \{x, y\} \subset \circ \Pi z_i.$$

Si dimostra ([23]) che la relazione $x \mathcal{C}_H y \iff x \in \mathcal{C}_H(y)$ è una equivalenza e che si ha :

$$x \mathcal{C}_H y \iff x \beta_H^* y.$$

Si indica con $\varphi : H \rightarrow H/\beta_H^*$ la proiezione canonica ;

se H è un ipergruppo, H/β_H^* è un gruppo e in tal caso si definisce il *cuore* di H come nucleo di φ e lo si denota con ω_H .

Un ipergruppo H è *regolare* se ha almeno una identità bilatera e ogni elemento ha almeno un inverso bilatero. ([4])

Definizione 1.

Diciamo che $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un iperanelloide se nell'insieme H sono definite due operazioni binarie multivoche, cioè due funzioni

$$\circ: H \times H \rightarrow \mathcal{P}(H)$$

$$\square: H \times H \rightarrow \mathcal{P}(H)$$

ove $\mathcal{P}(H)$ è l'insieme delle parti non vuote di H .

Definizione 2.

Diciamo che un iperanelloide $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un iperanello se soddisfa alle condizioni

(1) $\langle H, \circ \rangle$ è un ipergruppo abeliano ;

(2) $\langle H, \square \rangle$ è un semi-ipergruppo ;

(3) $\forall (x, y, z) \in H^3 \quad (x \circ y) \square z = (x \square z) \circ (y \square z)$
 $z \square (x \circ y) = (z \square x) \circ (z \square y) ;$

(4) $\forall x \in H, \forall u \in \omega_{\langle H, \circ \rangle} \quad x \square u \subset \omega_{\langle H, \circ \rangle} \supset u \square x .$

H si dice commutativo se inoltre soddisfa alla condizione

(5) $\forall (x, y) \in H^2 \quad x \square y = y \square x .$

Nota 1.

Nel seguito denoteremo con ω il cuore di $\langle H, \circ \rangle$ e con H^* l'insieme $H - \omega$.

Definizione 3.

Un iperanello (commutativo) $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ si dice ipercorpo (ipercampo) se $H^* \neq \emptyset$ e vale la condizione

(6) $\langle H^*, \square \rangle$ è un ipergruppo.

Nota 2.

Se H è un ipercorpo, indichiamo con ω^* il cuore di $\langle H^*, \square \rangle$.

Definizione 4.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello ;

allora se $\langle H, \circ \rangle$ è completo, H si dice o-completo, se $\langle H, \square \rangle$ è completo,

H si dice $\square$ -completo, se $\langle H, \circ \rangle$ e $\langle H, \square \rangle$ sono completi, H si dice completo.

Definizione 5.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello (ipercorpo) e sia K un sottoinsieme di H . Diciamo che K è sottoiperanello (sottoipercorpo) di H se soddisfa alle condizioni

- (i) $\langle K, \circ \rangle$ è sottoipergruppo di $\langle H, \circ \rangle$;
- (ii) $\langle K, \square \rangle$ è sottosemi-ipergruppo di $\langle H, \square \rangle$
- $(\langle K^*, \square \rangle \text{ è sottoipergruppo di } \langle H^*, \square \rangle)$.

Definizione 6.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello e sia I un sottoinsieme di H . Diciamo che I è un iperideale sinistro (destro) di H se soddisfa alle condizioni

- (I) $\langle I, \circ \rangle$ è sottoipergruppo di $\langle H, \circ \rangle$;
- (II) $\forall x \in I, \forall a \in H \quad a \square x \subset I \quad (x \square a \subset I)$.

I è un iperideale se è contemporaneamente iperideale sinistro e iperideale destro.

Osservazione 1.

In ogni iperanello H esistono sempre due iperideali banali :

l'iperideale ω e l'intero iperanello H . $\square$

Alcuni esempi.

1) Tutti gli anelli (corpi) sono evidentemente esempi di iperanelli (ipercorpi). Un iperanello (ipercorpo) che non ha struttura di anello (corpo) si dice *proprio*.

2) L'iperanelloide $H = \langle \{a, b\}, \circ, \square \rangle$ definito dalle seguenti tabelle

$\circ$	a	b
a	a	a,b
b	a,b	a,b

$\square$	a	b
a	a	a,b
b	a	a,b

è un iperanello proprio.

3) L'iperanelloide $H = \langle \{a, b, c, d, e\}, \circ, \square \rangle$ definito dalle seguenti tabelle

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	b,c	b,c	d	e
b	b,c	d	d	e	a
c	b,c	d	d	e	a
d	d	e	e	a	b,c
e	e	a	a	b,c	d

$\square$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b,c	b,c	d	e
c	a	b,c	b,c	d	e
d	a	d	d	a	d
e	a	e	e	d	b,c

è un iperanello completo commutativo, ma non è un ipercorpo.

Il sottoinsieme $\{a, d\}$ è un esempio di *iperideale* di H .

4) L'iperanelloide $H = \langle \{a, b, c, d\}, \circ, \square \rangle$ con le seguenti tabelle di definizione

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a,b	c,d	c,d
b	a,b	a,b	c,d	c,d
c	c,d	c,d	a,b	a,b
d	c,d	c,d	a,b	a,b

$\square$	a	b	c	d
a	a,b	a,b	a,b	a,b
b	a,b	a,b	a,b	a,b
c	a,b	a,b	c,d	c,d
d	a,b	a,b	c,d	c,d

è un ipercampo $\square$ -completo.

Osservazione 2.

Non esistono ipercorpi propri con cardinalità minore di tre.

Dimostrazione.

Sia $H = \langle \{a, b\}, \circ, \square \rangle$ un ipercorpo. Dalla definizione 3 segue $|\omega| = 1$. Posto $\omega = \{a\}$, si ha : $a \circ a = \{a\}$, $a \circ b = b \circ a = \{b\}$, $b \circ b = \{a\}$. Inoltre si ha $H^* = \{b\}$ e pertanto risulta $b \square b = \{b\}$ e per la condizione (4) della definizione 2, $a \square a = a \square b = b \square a = \{a\}$. In definitiva H coincide con il campo Z_2 . $\square$

Proposizione 1.

Un iperanelloide $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ avente $\langle H, \square \rangle$ come ipergruppo totale è un iperanello se, e solo se, $\langle H, \circ \rangle$ è un ipergruppo commutativo e $\omega = H$.⁽¹⁾

Dimostrazione.

Sia H un iperanello. Allora $\omega \square H \subset \omega$, ma essendo $\langle H, \square \rangle$ l'ipergruppo totale, si ha $\omega \square H = H$ e pertanto $\omega = H$. Analogamente si prova il viceversa. $\square$

Definizione 7.

Un iperanello $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ si dice *intero o di integrità* se $\forall (x, y) \in H^2$ tale che $x \square y \subset \omega$, segue che $x \in \omega$ oppure $y \in \omega$.

Proposizione 2.

Gli ipercorpi $\square$ -completi sono interi.

Dimostrazione.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un ipercorpo $\square$ -completo.

Sia $x \square y \subset \omega$ e $y \notin \omega$ (*). Essendo $\langle H, \square \rangle$ un semi-ipergruppo completo si possono presentare due casi :

$$\mathcal{C}_{\langle H, \square \rangle}(x) = \{x\} \quad (i)$$

$$\exists (u, v) \in H^2 \text{ tale che } \mathcal{C}_{\langle H, \square \rangle}(x) = u \square v \quad (ii).$$

Nel caso (i), poichè $\langle H^*, \square \rangle$ è un ipergruppo, si ha che $x \notin H^*$ e quindi $x \in \omega$.

Nel caso (ii), si ha $\{u, v\} \cap \omega \neq \emptyset$, perchè da $\{u, v\} \subset H^*$ seguirebbe

$x \square y \subset (u \square v) \square y \subset H^* \square y = H^*$ in contraddizione con (*). Pertanto da $\{u, v\} \cap \omega \neq \emptyset$, discende $u \square v \subset \omega$ e quindi $x \in \omega$. $\square$

Proposizione 3.

Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un ipercorpo $\square$ -completo, allora $\langle H, \square \rangle$ è estensione di $\langle H^*, \square \rangle$

(1) Si chiama ipergruppo totale (sull'insieme H), l'ipergruppo $\langle H, \circ \rangle$ tale che $\forall (x, y) \in H^2$,

$$x \circ y = H.$$

$$e \quad \forall x \in H^* \quad \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (x) = \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle} (x). \quad (2)$$

Dimostrazione.

Certamente $\forall x \in H^*$, esiste $(u,v) \in H^* \times H^*$ tale che $\mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle} (x) = u \square v$, da cui per la *proposizione 2* di [20] si ha $u \square v = \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (u \square v)$. Per il *lemma 3* di [20] si ha $\forall x \in u \square v$, $\mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (x) = \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (u \square v)$, e quindi $\mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (x) = \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle} (x)$. $\square$

Corollario 1.

Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un ipercorpo $\square$ -completo, allora $\langle H^*, \square \rangle$ è un ipergruppo completo.

Dimostrazione.

Dalla *proposizione 3* e dal *lemma 3* di [20] segue :

$$\begin{aligned} & \forall (a,b) \in H^* \times H^* \quad \forall u \in a \square b \\ & a \square b = \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle} (a \square b) = \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle} (u) = \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (u) = \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle} (a \square b). \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione 4.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un ipercorpo $\square$ -completo ; allora $\forall (a,b,c) \in H^3$ si ha :

$$a \square b = a \square c, \quad a \notin \omega \rightarrow \{b,c\} \subset \omega \quad \text{oppure} \quad b \beta_{\langle H, \square \rangle}^* c \quad (t)$$

$$b \square a = c \square a, \quad a \notin \omega \rightarrow \{b,c\} \subset \omega \quad \text{oppure} \quad b \beta_{\langle H, \square \rangle}^* c \quad (t').$$

Dimostrazione.

Si possono verificare due casi :

- (1) $\{b,c\} \cap \omega \neq \emptyset$;
- (2) $\{b,c\} \cap \omega = \emptyset$.

-
- (2) Ricordiamo che un semi-ipergruppo $\langle K, \square \rangle$ è *estensione* di un semi-ipergruppo $\langle H, \circ \rangle$ se $H \subsetneq K$ e $\forall (x,y) \in H^2 \quad x \circ y = x \square y$. (vedi [20], *definizione 3*).

- (1) Sia $b \in \omega$, allora $a \square b \subset \omega$ e quindi $a \square c \subset \omega$, da cui per la *proposizione 2*, segue $c \in \omega$.
- (2) Per il *corollario 1* $\langle H^*, \square \rangle$ è un ipergruppo completo, ma ogni ipergruppo completo è regolare (vedi *proposizione 13* di [10]) e pertanto se a' è un inverso di a in $\langle H^*, \square \rangle$ si ha $a' \square a \square b = a' \square a \square c$ da cui $\omega^* \square b = \omega^* \square c$. Allora $\mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle}(b) = \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle}(c)$ (3), da cui per la *proposizione 3* si ha $\mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(b) = \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(c)$. Analogamente si prova (t').

Nota 3.

Nel seguito considereremo iperanelli (ipercorpi) soddisfacenti alla condizione seguente :

$$(\Delta) \quad \forall u \in \omega, \quad \forall v \in H \quad u \square v = v \square u = \omega.$$

Essi verranno chiamati Δ -iperanelli (Δ -ipercorpi).

Osservazione 3.

Per il punto (4) della *definizione 2* e poichè in un semi-ipergruppo completo due prodotti aventi intersezione non vuota coincidono, si può affermare che ogni iperanello $\square$ -completo è un Δ -iperanello se, e solo se, esiste $(u, v) \in (\omega \times H) \cup (H \times \omega)$ tale che $u \square v = \omega$. $\square$

Ossevato che nei Δ -iperanelli $\square$ -completi, ω è una classe di equivalenza modulo $\beta^*_{\langle H, \square \rangle}$, segue facilmente dalla *proposizione 4* il seguente corollario.

Corollario 2.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un Δ -ipercorpo $\square$ -completo ; allora $\forall (a, b, c) \in H^3$ si ha :

$$a \square b = a \square c, a \notin \omega \rightarrow b\beta^*_{\langle H, \square \rangle} c ;$$

$$b \square a = c \square a, a \notin \omega \rightarrow b\beta^*_{\langle H, \square \rangle} c. \quad \square$$

(3) Si utilizza la *proposizione 14* di [23] :

Se $\langle H, \circ \rangle$ è un ipergruppo, $\forall B \subseteq H \quad \mathcal{E}_H(B) = \omega \circ B = B \circ \omega$.

Proposizione 5.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un Δ -iperanello $\square$ -completo, tale che $\forall (a, b, c) \in H^3$ valgono le implicazioni seguenti :

$$(t) \quad a \square b = a \square c, \quad a \notin \omega \rightarrow b \beta_{\langle H, \square \rangle}^* c ;$$

$$(t') \quad b \square a = c \square a, \quad a \notin \omega \rightarrow b \beta_{\langle H, \square \rangle}^* c ;$$

allora H è integro.

Dimostrazione.

Sia $a \square b = \omega, a \notin \omega$. $\forall u \in \omega$ si ha : $a \square b = a \square u = \omega$, da cui per (t),

$$b \beta_{\langle H, \square \rangle}^* u, \text{ cioè } b \in \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(u) = \omega \quad . \quad \square$$

Osservazione 4.

(I) Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un iperanello tale che $|\omega| = 1$, allora H è un Δ -iperanello.

(II) Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello tale che $\omega = H$; allora H è un Δ -iperanello se, e solo se, $\langle H, \square \rangle$ è totale. $\square$

Costruzione di iperanelli completi.

In [7] P. Corsini ha illustrato un metodo che consente di costruire semi-ipergruppi (ipergruppi) completi a partire da semigrupp (gruppi). Mostriamo come tale metodo può essere utilizzato, con le opportune modifiche, per la costruzione di iperanelli completi a partire da anelli.

Sia $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ un anello e sia $\{A(g)\}_{g \in R}$ una famiglia di insiemi non vuoti tali che :

$$(i) \quad \forall (g, g') \in R^2, \quad g \neq g' \rightarrow A(g) \cap A(g') = \emptyset ;$$

$$(ii) \quad g \notin R \cdot R \rightarrow |A(g)| = 1.$$

Poniamo $H_R = \bigcup_{g \in R} A(g)$ e definiamo in H_R le iperoperazioni $\circ, \square$:

$$\forall (a, b) \in H_R^2, \text{ esiste } (g, g') \in R^2 \text{ tale che } a \in A(g), b \in A(g') ; \text{ poniamo}$$

$$a \circ b = A(g + g') ; a \square b = A(g \cdot g').$$

In [7] P. Corsini ha dimostrato che $\langle H_R, \circ \rangle$ e $\langle H_R, \square \rangle$ hanno rispettivamente struttura di ipergruppo commutativo completo e di semi-ipergruppo completo.

Alla dimostrazione che H_R è un iperanello, premettiamo il seguente lemma, che discende subito dalle definizioni di $\circ$ e $\square$.

Lemma 1.

$$\forall (g, g') \in R^2 \quad \forall (u, v) \in A(g) \times A(g') \text{ si ha :}$$

$$(I) \quad u \circ v = A(g + g') = A(g) \circ A(g') ;$$

$$(II) \quad u \square v = A(g \cdot g') = A(g) \square A(g') . \quad \square$$

Theorema 1.

H_R è un Δ -iperanello completo.

Dimostrazione.

Per quanto detto prima basta verificare la distributività e la condizione (4) della *definizione 2*.

Sia $(x, y, z) \in (H_R)^3$, e sia $x \in A(g)$, $y \in A(g')$, $z \in A(g'')$;

$$\text{allora } (x \circ y) \square z = A(g + g') \square z = \bigcup_{u \in A(g + g')} u \square z = (\text{per il lemma 1}) = A[(g + g') \cdot g''] ;$$

$$\begin{aligned} \text{inoltre } (x \square z) \circ (y \square z) &= A(g \cdot g'') \circ A(g' \cdot g'') = (\text{per il lemma 1}) = A(g \cdot g'' + g' \cdot g'') = \\ &= A[(g + g') \cdot g''] . \end{aligned}$$

Pertanto $(x \circ y) \square z = (x \square z) \circ (y \square z)$; analogamente si prova l'altra legge distributiva.

Dal punto 7) di § 1 in [7], $\omega = A(O_R)$, e perciò $\forall u \in \omega$, $\forall x \in H_R$ si ha $u \square x = x \square u = A(O_R) = \omega$. Così H_R è un Δ -iperanello completo. $\square$

GLI (H, R) -Iperanelli.

Presentiamo ora un modo per ottenere nuovi iperanelli a partire da altri iperanelli. Tale costruzione generalizza quella già nota degli (H, G) -ipergruppi. (vedi [15]).

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello, e sia $\{A_i\}_{i \in R}$ una famiglia di insiemi non vuoti tali che :

(1) $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ sia un anello ;

(2) $A_{O_R} = H$;

(3) $\forall (i, j) \in R^2 \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.

Sia $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ e definiamo in K le seguenti iperoperazioni :

$$\forall (x, y) \in H^2 \quad \begin{aligned} x \oplus y &= x \circ y \\ x \odot y &= H \end{aligned} ;$$

$$\forall (x, y) \in A_i \times A_j \neq H \times H \quad \begin{aligned} x \oplus y &= A_k \text{ se } i + j = k \\ x \odot y &= A_m \text{ se } i \cdot j = m. \end{aligned}$$

E' di routine la dimostrazione delle condizioni (1), (2), (3) della *definizione 2*. Inoltre, dal *lemma 4* di [15], si ha $\omega = H$, e pertanto si ottiene $H \odot K = H = K \odot H$, cioè K è un iperanello. Nel seguito K verrà denotato come (H, R) -iperanello e porremo $R^* = R - \{O_R\}$.

Osservazione 5.

Se K è un (H, R) -iperanello, allora K è commutativo se, e solo se, R è commutativo. $\square$

Lemma 2.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello ; allora K è integro se, e solo se, R è un anello di integrità.

Dimostrazione.

Sia $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ e sia R un anello di integrità. Sia $x \in A_i, y \in A_j$ e $x \odot y = \omega = H$.

Allora dalla definizione di $\odot$ segue $i = O_R$ oppure $j = O_R$, e quindi $x \in H$ oppure $y \in H$, cioè K è integro. Analogamente si prova il viceversa. $\square$

Teorema 2.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello ; allora se R è un corpo (campo), K è un ipercorpo (ipercampo).

Dimostrazione.

Bisogna provare che $\langle K^*, \odot \rangle$ è un ipergruppo.

Siano $\{x, y\} \subset K^*$, allora esistono $\{i, j\} \subset R^*$ tali che $x \in A_i, y \in A_j$. Dal *lemma 2*, essendo R intero, segue $x \odot y \subset K^*$, e quindi K^* è moltiplicativamente chiuso.

Inoltre esiste $p \in R^*$ tale che $i = j.p$. Se $z \in A_p$, allora $y \odot z = A_i \ni x$.

Analogamente esiste $w \in K^*$ tale che $x \in w \odot y$. Così K è un ipercorpo. Infine, per l'osservazione 5, se R è un campo, K è un ipercampo. $\square$

Si dimostra facilmente, per induzione su n , il lemma seguente.

Lemma 3.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello, di sostegno $K = \bigcup_{i \in R} A_i$, allora

$\forall n \in N^* - \{1\}, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, si possono presentare i seguenti casi :

$$\exists j \in R : \oplus \prod x_i = A_j ;$$

$$\exists B \in \mathcal{P}(H) - \{\emptyset\} : \oplus \prod x_i = B ;$$

$$\exists p \in R : \odot \prod x_i = A_p. \quad \square$$

Facile conseguenza del *lemma 3* è il lemma seguente.

Lemma 4.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello, di sostegno $K = \bigcup_{i \in R} A_i$, allora $\forall i \in R$ A_i

è parte completa di $\langle K, \oplus \rangle$ e di $\langle K, \odot \rangle$. $\square$

Il lemma che segue discende subito dal *lemma 2* di [15] e dal *lemma 4*.

Lemma 5.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello di sostegno $K = \bigcup_{i \in R} A_i$, allora si ha :

$$\forall i \in R \quad \forall a \in A_i \quad \langle a \rangle = A_i ;$$

$$\begin{aligned} & \forall p \in R \text{ tale che } p \in R.R \quad \forall b \in A_p \quad \mathcal{E}_{\langle K, \odot \rangle}(b) = A_p ; \\ & \forall s \in R \text{ tale che } s \notin R.R \quad \forall c \in A_s \quad \mathcal{E}_{\langle K, \odot \rangle}(c) = \{c\} . \end{aligned}$$

Osservazione 6.

Per la definizione di $\odot$ e per i *Lemmi* 3 e 4, possiamo affermare che ogni (H,R) -iperanello è un Δ -iperanello $\odot$ -completo . $\square$

Lemma 6.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H,R) -iperanello ; allora se K è un ipercorpo si ha :

- (1) $\langle K^*, \odot \rangle$ è un ipergruppo completo ;
- (2) $\omega^* = A_u$ con $u = 1_R$.

Dimostrazione.

(1) Segue subito dall'osservazione 6 e dal *corollario* 1.

(2) Sia $\alpha \in \omega^*$. Certamente esiste $(v,w) \in (K^*)^2$ tale che $\alpha \in v \odot w$. Per il *lemma* 3, esiste $u \in R$ tale che $v \odot w = A_u$. Per il *lemma* 5, si ha $\mathcal{E}_{\langle K, \odot \rangle}(\alpha) = A_u$, da cui, per la *proposizione* 3, discende $\omega^* = A_u$. E' noto (vedi [10]) che ω^* è l'insieme delle identità bilatere di $\langle K^*, \odot \rangle$ è pertanto $\forall i \in R, \forall a \in A_i, \forall e \in A_u$ si ha $a \odot e \ni a$ e quindi $a \odot e = A_i$; ed analogamente $e \odot a = A_i$. Dalla definizione di $\odot$ segue $u = 1_R$. $\square$

Teorema 3.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H,R) -iperanello ; allora K è un ipercorpo (ipercampo) se, e solo se, R è un corpo (campo).

Dimostrazione.

Per il *Teorema* 2, basta provare una sola implicazione.

Sia K un ipercorpo. Per il *Lemma* 6, R è un anello con identità, pertanto basta provare che ogni elemento di R^* possiede un unico inverso moltiplicativo. Per il *Lemma* 6, $\langle K^*, \odot \rangle$ è un

ipergruppo completo e quindi regolare. Dalla regolarità di K^* , si ha che $\forall i \in R^*$ e

$\forall a \in A_i$, esiste $j \in R^*$ ed esiste $a' \in A_j$ tali che $a \odot a' = a' \odot a = \omega^*$.

Per il Lemma 6, $\omega^* = A_u$ con $u = 1_R$; allora dalla definizione di $\odot$ segue

$i \cdot j = j \cdot i = 1_R$. Per assurdo, supponiamo che esista $m \in R^*$, $m \neq j$ tale che

$m \cdot i = i \cdot m = 1_R$. Dalla Osservazione 6, dalla Proposizione 2, e dal Lemma 2, discende che R

è un anello di integrità, e pertanto $i \cdot m = 1_R = i \cdot j$ implica, per la legge di cancellazione

$j = m$. $\square$

Lemma 7.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un Δ -ipercorpo $\square$ -completo, e sia I un iperideale di H . Allora I è proprio se, e solo se, $I \cap \omega^* = \emptyset$.

Dimostrazione.

Se $I \cap \omega^* = \emptyset$, evidentemente $I \subsetneq H$.

Viceversa sia I proprio e sia per assurdo $x \in \omega^* \cap I$. Allora $\forall u \in H$, vi sono due possibilità :

(i) $u \in \omega$;

(ii) $u \in H^*$.

Nel caso (i), dalla condizione (Δ) segue $u \square x = \omega$ e poichè I è iperideale,

$u \square x \subset H \square I \subset I$, da cui $u \in I$.

Nel caso (ii), si ha :

$$u \square x = u \square \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle}(x) = u \square \omega^* = \mathcal{E}_{\langle H^*, \square \rangle}(u) \ni u.$$

Ma $u \square x \subset I$ e perciò $u \in I$. $\square$

Proposizione 6.

Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un Δ -ipercorpo $\square$ -completo, ω è l'unico suo iperideale proprio.

Dimostrazione.

Supponiamo che H possieda un iperideale I diverso da ω e sia $x \in I - \omega$. Per l'ipotesi di completezza, esiste x' inverso di x in H^* , tale che $x \square x' = \omega^*$. Poichè I è un iperideale

$x \square x' \subset I \square H \subset I$. Pertanto $\omega^* \cap I \neq \emptyset$, il che contraddice quanto provato nel Lemma 7. $\square$

Lemma 8.

Sia R un anello con identità « u », e sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello. Allora posto $E(\langle K, \odot \rangle) = \{e \in K / \forall x \in K, x \in e \odot x \cap x \odot e\}$ si ha $E(\langle K, \odot \rangle) = A_u$.

Dimostrazione.

Sia $y \in A_u$, allora $\forall x \in K$ se $x \in A_i$ si ha $x \odot y = y \odot x = A_i \ni x$.

Pertanto $y \in E(\langle K, \odot \rangle)$. Viceversa sia $e \in E(\langle K, \odot \rangle)$, allora esiste $j \in R^*$ tale che $e \in A_j$. Sia $z \in A_u$; si ha $z \in z \odot e = e \odot z = A_j$ e quindi $A_u \cap A_j \neq \emptyset$ da cui $A_u = A_j$. $\square$

Lemma 9.

Sia $K = \langle K, \circ, \square \rangle$ un iperanello e sia $x \in K$; allora posto $I = K \square x$, si ha che I è un iperideale sinistro di K se, e solo se, $I \circ y = I = y \circ I \quad \forall y \in I$.

Dimostrazione.

Siano $\{u, v\} \subset I$, allora esistono $\{a, b\} \subset K$ tali che $u \in a \square x$, $v \in b \square x$.

Si ha $u \circ v \subset (a \square x) \circ (b \square x) = (a \circ b) \square x \subset K \square x$; quindi I è sottosemi-ipergruppo di $\langle K, \circ \rangle$. Inoltre $K \square I = K \square (K \square x) = (K \square K) \square x \subset K \square x = I$. $\square$

Proposizione 7.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello e sia $x \in K$; allora l'insieme $(K \odot x)$ è un iperideale sinistro di K .

Dimostrazione.

Per il Lemma 9, basta provare che $(K \odot x)$ è riproducibile in $\langle K, \oplus \rangle$. Se $x \in H$, allora

$K \odot x = H = \omega$ e ω è iperideale di K . Sia $x \in K \setminus H$, con $x \in A_1$. Siano

$\{u, v\} \subset K \odot x$, allora esistono $\{h_1, h_2\} \subset K$ tali che $u \in h_1 \odot x$, $v \in h_2 \odot x$.

Sono possibili due casi : (i) $(h_1, h_2) \in H^2$;
(ii) $(h_1, h_2) \in A_j \times A_m \neq H \times H$.

(i) In questo caso si ha $\{u, v\} \subset H$, per cui esiste $t \in H$ tale che $u \in v \circ t = v \oplus t$.
Ma $K \odot x \supset H \odot x = H$ e quindi $t \in K \odot x$.

(ii) Sia $j.i = k$ e $m.i = p$; allora $u \in A_k$ e $v \in A_p$.

Sia $s = k.p$ e sia $t \in A_s$; certamente $u \in v \oplus t = A_k$.

Inoltre, preso $z \in A_{j.m}$ si ha $z \odot x = A_s$ e quindi $t \in K \odot x$.

Analogamente si prova la riproducibilità a sinistra. $\square$

Teorema 4.

Sia R un anello di integrità, commutativo, con identità, e sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello ; allora K è un ipercampo se, e solo se, il solo iperideale proprio di K è ω .

Dimostrazione.

L'implicazione $\longrightarrow$ segue subito dalla *Proposizione 6* e dalla *Osservazione 6*. Viceversa, occorre provare che $\langle K^*, \odot \rangle$ è un ipergruppo. Per il *Lemma 2*, K è integro e quindi

$\forall (a, b) \in (K^*)^2$ $a \odot b \subset K^*$. Sia $x \in K^*$. Per la *Proposizione 7*, $K \odot x$ è iperideale di K . Per il *Lemma 8*, $K \odot x \ni x$. Poichè $x \notin \omega$, segue dalle ipotesi, che $K \odot x = K$,
 $\forall x \in K^*$. Sia $a \in K^*$, allora esiste $b \in K$ tale che $a \in b \odot x$. Per definizione di $\odot$,
 $b \in K^*$. $\square$

Dai *Teoremi 3 e 4*, discende facilmente il

Corollario 3.

Sia R un anello di integrità, commutativo, con identità, e sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ un (H, R) -iperanello ; allora le condizioni che seguono sono equivalenti :

- (i) K è un ipercampo ;
- (ii) R è un campo ;
- (iii) il solo iperideale proprio di K è ω . $\square$

Proposizione 8.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello completo, tale che $\beta^*_{\langle H, \circ \rangle} = \beta^*_{\langle H, \square \rangle}$; allora $\forall x \in H$, $H \square x$ è iperideale sinistro di H .

Dimostrazione.

Per il Lemma 9, basta provare la riproducibilità di $(H \square x)$ in $\langle H, \circ \rangle$. Siano

$\{u, v\} \subset H \square x$, allora esistono $\{h_1, h_2\} \subset H$ tali che $u \in h_1 \square x, v \in h_2 \square x$. Sia h'_2 un inverso di h_2 in $\langle H, \circ \rangle$ e sia $t \in (h'_2 \circ h_1) \square x$, allora

$$\begin{aligned} v \circ t &\subset (h_2 \square x) \circ [(h'_2 \circ h_1) \square x] = [h_2 \circ (h'_2 \circ h_1)] \square x = (\omega \circ h_1) \square x = \\ &= \mathcal{E}_{\langle H, \circ \rangle}(h_1) \square x = \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(h_1) \square x. \end{aligned}$$

Pertanto $(v \circ t) \cap [\mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(h_1) \square x] \neq \emptyset$. (Γ)

Mostriamo che $(v \circ t)$ è parte completa di $\langle H, \square \rangle$; sia $\square \prod z_i \cap (v \circ t) \neq \emptyset$, allora

esiste $\alpha \in \square \prod z_i, \alpha \in v \circ t$; sia $\gamma \in \square \prod z_i$, pertanto $\alpha \beta^*_{\langle H, \square \rangle} \gamma$ da cui,

per ipotesi, $\alpha \beta^*_{\langle H, \circ \rangle} \gamma$; poichè $\mathcal{E}_{\langle H, \circ \rangle}(\alpha) = v \circ t$, si ha $\gamma \in v \circ t$ e

quindi $(v \circ t)$ è parte completa di $\langle H, \square \rangle$. Inoltre esiste $(r, s) \in H^2$ tale che

$$\mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(h_1) = r \square s. \text{ Perciò da } (\Gamma) \text{ si ottiene } \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(h_1) \square x = (r \square s) \square x \subset v \circ t$$

poichè $u \in \mathcal{E}_{\langle H, \square \rangle}(h_1) \square x$, resta provata la riproducibilità a destra di $(H \square x)$.

Analogamente si prova la riproducibilità a sinistra. $\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. BONANSINGA - Sugli ipergruppi quasicanonici - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina - (in corso di stampa).
- [2] P. BONANSINGA P. CORSINI - Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi - Boll. Un. Mat. It. (1982).
- [3] R. H. BRUCK - A survey of binary systems - Springer (1966).
- [4] P. CORSINI - Hypergroupes réguliers et hypermodules - Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat. Vol. XX, 121 - 135 (1975).
- [5] P. CORSINI - Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux - Atti Convegno su Sistemi Binari e loro Applicazioni - Taormina . (1978).
- [6] P. CORSINI - Sur les Semi-hypergroupes - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina. (1979).
- [7] P. CORSINI - Sur les Semi-hypergroupes Completes et les Groupoides - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina. (1979).
- [8] P. CORSINI - Contributo alla teoria degli ipergruppi - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina. (1980).
- [9] P. CORSINI - Feebly canonicol and l-hypergroups - Acta Universitatis Carolinae (Math. et Phjs.) - (1982).
- [10] P. CORSINI - Recenti risultati in teoria degli ipergruppi - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1983).
- [11] P. CORSINI - G. ROMEO - Hypergroupes Completes et $\mathcal{C}$ -Groupoides - Atti Convegno su Sistemi Binari e loro Applicazioni - Taormina. (1978).
- [12] M. DE SALVO - Omomorfismi di sd-ipergruppi - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina - (1979).
- [13] M. DE SALVO - Sugli ipergruppi completi finiti - Rivista Matematica dell'Università di Parma - (1980).
- [14] M. DE SALVO - I K_H ipergruppi - Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena - (1982).

- [15] M. DE SALVO - Gli (H,G) -ipergruppi - Rivista Matematica dell'Università di Parma (1983).
- [16] M. DE SALVO - D. FRENI - Semi-ipergruppi e ipergruppi ciclici - Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (1981).
- [17] M. DE SALVO - D. FRENI - Sugli ipergruppi ciclici e completi - Rivista «Le Matematiche» Catania - (1980).
- [18] M. DRESHER - O. ORE - Theory of multigroups - Amer. J. Math. 60 - (1938).
- [19] D. FRENI - Semi-ipergruppi e equivalenze regolari - Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena . (1981)
- [20] D. FRENI - Su gli r -ipergruppi e gli ampliamenti - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1982).
- [21] D. FRENI - Ipergruppi ciclici e la torsione negli ipergruppi - Rivista «Le Matematiche» Catania - (1980).
- [22] T. KEPKA - A note on the associativity hypergroups of quasigroups and loops - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1982).
- [23] M. KOSKAS - Groupoides, Demi-hypergroupes et Hypergroupes - J. Math. pures et appl. 49 (1970).
- [24] M. KRASNER - Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristiques 0 - Actes du Colloque d'Algèbre, C.B.R.M., Bruxelles (1956).
- [25] J. MITTAS - Sur les hyperanneaux et les hypercorps - Mathematica Balkanica, 3 (1973) 368-382.
- [26] J. MITTAS - Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés - (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 623-626, 13-10-69, série A).
- [27] Y. SUREAU - Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Clermont II - (1980).