

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

DOMENICO FRENI

**Structure des hypergroupes quotients et des hypergroupes de type U**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 82, série *Mathématiques*, n° 22 (1984), p. 51-77

[<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1984\\_\\_82\\_22\\_51\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_51_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## STRUCTURE DES HYPERGROUPES QUOTIENTS ET DES HYPERGROUPES DE TYPE U

Domenico FRENÍ

*Université de CLERMONT II*

### Summary :

*A few results are given concerning hypergroups of type C on the right, then a new class of hypergroups is defined : the hypergroups of type U on the right, which forms a more general class than the hypergroups of type C on the right ; these latter can be considered as quotients of an hypergroup of type U by one of its subhypergroupe ultra-clos on the right.*

*Then we study the structures of the quotients  $H/h$  of an hypergroup  $H$  modulo one of its subhypergroups,  $h$ , bi-ultra-clos or conjugable , and, in that last case, we characterize the core  $\omega_{H/h}$  of  $H/h$ .*

*At last, a requisite condition is determined so that an hypergroup quotient,  $H/h$  of an hypergroup  $H$  modulo one of its subhypergroups  $h$ , may be a commutative hypergroup. We are driven to definite the derived subhypergroup  $D(H)$  of  $H$ . We particularly analyse the structure of  $D(H)$  in the case  $H$  would be of type C on the right.*

### Introduction :

On donne quelques résultats sur les hypergroupes de type C à droite, puis on définit une nouvelle classe d'hypergroupes : les hypergroupes de type U à droite ; qui constitue une classe plus générale que les hypergroupes de type C à droite ; ces derniers pouvant être considérés comme des quotients d'un hypergroupe de type U par un de ses sous-hypergroupes ultra-clos à droite.

Ensuite, on étudie les structures des quotients  $H/h$  d'un hypergroupe  $H$  modulo un de ses sous-hypergroupes,  $h$ , bi-ultra-clos ou conjugable et, dans ce dernier cas, on caractérise le coeur  $\omega_{H/h}$  de  $H/h$ .

Enfin, on détermine une condition nécessaire pour qu'un hypergroupe quotient,  $H/h$ ,

d'un hypergroupe  $H$  modulo un de ses sous-hypergroupes  $h$ , soit un hypergroupe commutatif. On est conduit à définir le sous-hypergroupe dérivé  $D(H)$  de  $H$ . En particulier, on analyse la structure de  $D(H)$  dans le cas où  $H$  est de type C à droite.

Je tiens à remercier ici Monsieur Y. SUREAU de tous les conseils qu'il m'a prodigués pour mener à bien ce travail et pour l'aide qu'il m'a apportée pour sa rédaction.

### Notations et rappels.

Dans tout ce travail,  $H$  et  $H'$  représentent des hypergroupes multiplicatifs,  $h$  et  $h'$  des sous-hypergroupes de  $H$  et  $H'$  respectivement.

Pour toute partie  $A$  de  $H$ , on note  $H-A$  le complémentaire de  $A$  dans  $H$ .

$H$  est dit REGULIER s'il a au moins une unité bilatère,  $e$  (i.e., pour tout  $x \in H$ ,  $x \in x e \cap e x$ ), et si chaque élément  $x \in H$  possède un inverse bilatère  $x'$  (i.e.  $e \in x x' \cap x' x$ ).

On dit que  $H$  est REVERSIBLE à droite (resp. gauche) s'il est régulier et si pour tout  $(x, y, z) \in H^3$  tel que  $x \in yz$ , il existe un inverse  $z'$  de  $z$  (resp.  $y'$  de  $y$ ) vérifiant  $y \in xz'$  (resp.  $z \in y'x$ ).

On rappelle que  $h$  est clos si  $h(H-h) = (H-h)h = H-h$ , qu'il est INVERSIBLE à droite (resp. gauche) dans  $H$ , si, pour tout couple  $(x, y) \in H^2$ ,  $x \in y h$  (resp.  $x \in h y$ ) équivaut à  $y \in x h$  (resp.  $y \in h x$ ). Dans ce dernier cas, l'ensemble  $H/h$  (resp.  $h \backslash H$ ) des classes à droite  $x h$  (resp. gauche  $h x$ ) est alors muni d'une structure d'hypergroupe, en posant  $(x h)(y h) = \{z h ; z \in x h y\}$ . (resp.  $(h x)(h y) = \{h z ; z \in x h y\}$ ).

Le sous-hypergroupe  $h$  de  $H$  est dit ULTRA-CLOS à droite (resp. gauche) dans  $H$  si pour tout  $x \in H$  on a  $x h \cap x(H-h) = \emptyset$  (resp.  $h x \cap (H-h)x = \emptyset$ ). Enfin, il est dit CONJUGABLE (on dit aussi  $H$ -conjugable) s'il est clos et si pour tout  $x \in H$  il existe  $x' \in H$ , tel que  $xx' \subset h$ .

On appelle COEUR de  $H$ , et l'on note  $\omega_H$  l'intersection de tous les sous-hypergroupes conjuguables de  $H$ .

On dit que  $h$  est INFRA-INVARIANT dans  $H$  si pour tout  $x \in H$ , on a  $h x h \subset x h \cup h x$ ; on le dit SEMI-INVARIANT à droite (resp. gauche) si  $x h \subset h x$  (resp.  $h x \subset x h$ ) et INVARIANT si  $h x = x h$ .

Pour les propriétés attachées à ces notions, on renvoie à [5], [7] et [8].

Les MORPHISMES d'hypergroupes de  $H$  dans  $H'$  que nous considérons ici sont des applications  $f : H \rightarrow H'$  vérifiant, pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $H$ ,  $f(xy) \subset f(x)f(y)$ . Si l'on a l'égalité  $f(xy) = f(x)f(y)$ , on dit que  $f$  est BON. Un ISOMORPHISME est un morphisme bon bijectif.

On utilisera fréquemment les résultats suivants :

$h$  est inversible à droite dans  $H$  si et seulement si la famille  $\{xh\}_{x \in H}$  est une partition de  $H$ .

Si  $h$  est ultra-clos à droite dans  $H$ , alors  $h$  est inversible à droite et clos dans  $H$ .

$H/h$  est un groupe si et seulement si  $h$  est conjugable et invariant dans  $H$ .

Si  $h$  et  $k$  sont deux sous-hypergroupes inversibles de  $H$ , tels que  $k \subset h$ , alors  $H/k/h/k$  est isomorphe à  $H/h$ .

$h$  est ultra-clos à droite dans  $H$  si et seulement si l'ensemble des identités partielles à droite<sup>(\*)</sup> de  $H/h$  est réduit à  $h/h$ .

---

(\*) Un élément  $a \in H$  est une identité partielle à droite de  $H$  s'il existe  $x \in H$  vérifiant  $x \in xa$ .

### §1. Rappels et compléments sur les hypergroupes de types C.

On dit que  $H$  est de type C à droite s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

*C1) il existe  $\varepsilon \in H$  tel que, pour tout  $x \in H$ , on ait  $x\varepsilon = x$  (i.e.  $\varepsilon$  est unité scalaire à droite).*

*C2) pour tout triplet  $(x, y, z) \in H^3$ ,  $xy \cap xz \neq \emptyset$  implique  $\varepsilon y = \varepsilon z$ .*

Si  $H$  est de type C à droite, il vérifie les propriétés suivantes (cf. [9]) énoncées pour tout  $(x, y, z) \in H^3$  et tout  $\bar{x} \in H$  tel que  $\varepsilon \in x\bar{x}$  :

- 1)  $x \in \varepsilon x$
- 2)  $x \in xy$  implique  $y = \varepsilon$
- 3)  $\varepsilon \in xy$  si et seulement si  $\varepsilon \in yx$
- 4)  $\varepsilon \in xy$  si et seulement si  $\varepsilon\bar{x} = \varepsilon y$
- 5) Si  $\bar{x} \in H$  vérifie  $\varepsilon \in \bar{x}\bar{x}$ , alors  $\varepsilon x = \varepsilon\bar{x}$  (et donc  $\bar{x}\bar{x} = \bar{x}x$ )
- 6)  $\varepsilon x = \varepsilon y$  si et seulement si  $\varepsilon\bar{x} = \varepsilon\bar{y}$
- 7) Si  $z \in xy$ , alors  $x \in z\bar{y}$  et  $y \in \varepsilon\bar{x}z$
- 8) Si  $x \in x_1 x_2 \dots x_n$ , alors  $\varepsilon\bar{x} \subset \varepsilon\bar{x}_n \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1$  (où  $x_i \in H, \bar{x}_i \in H, \varepsilon \in x_i \bar{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ )
- 9)  $\varepsilon$  appartient à tout sous-hypergroupe de  $H$
- 10) Tout sous-hypergroupe de  $H$  est ultra-clos à droite et inversible dans  $H$
- 11)  $x \in h$  si et seulement si  $\bar{x} \in h$
- 12)  $h$  et  $H/h$  sont de type C à droite
- 13) Les conditions suivantes sont équivalentes :
  - i)  $H$  est un groupe
  - ii)  $\varepsilon$  est scalaire à gauche
  - iii)  $H$  est aussi de type C à gauche.

On va démontrer maintenant quatre propositions qui donnent quelques résultats complémentaires sur les hypergroupes de type C à droite.

**Proposition 1.1.**

*Si  $H$  est de type  $C$  à droite, son coeur  $\omega_H$  est l'intersection de ses sous-hypergroupes contenant  $A = \bigcup_{x \in H} x \bar{x}$ .*

Notons  $\langle A \rangle$  l'intersection de tous les sous-hypergroupes contenant  $A^{(*)}$ . Pour tout  $x \in H$  on a  $x \bar{x} \subset \omega_H$  et donc  $\langle A \rangle \subset \omega_H$ . D'autre part, pour tout  $x \in H$ , il existe  $y \in \varepsilon \bar{x}$  vérifiant  $xy \subset \langle A \rangle$ , donc  $\langle A \rangle$  est conjugué et  $\omega_H \subset \langle A \rangle$ .

**Proposition 1.2.**

*Si  $H$  est de type  $C$  à droite, une condition nécessaire et suffisante pour que  $h$  soit ultra-clos à gauche dans  $H$  est qu'il soit conjugué.*

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

Soient  $x \in H$  et  $y$  et  $z$  deux éléments de  $H$  vérifiant  $z \in xy \cap h$ . Alors on a  $x \in z\bar{y}$  et donc  $x \in h\bar{y}$ ; si, de plus,  $xy \cap (H-h) \neq \emptyset$ , par un raisonnement analogue, on obtient  $x \in (H-h)\bar{y}$ , ce qui contredit l'hypothèse d'ultra-clôture à gauche de  $h$  dans  $H$ . Donc on a  $xy \subset h$ , d'où la conjugabilité de  $h$ .

**Proposition 1.3.**

*Si  $H$  est de type  $C$  à droite, alors  $h$  est semi-invariant à gauche dans  $H$ , si et seulement s'il est invariant dans  $H$ .*

Supposons  $h$  semi-invariant à gauche dans  $H$  et soient  $x \in H$ , et  $u \in xh$ ; il existe  $v \in h$  tel que  $u \in xv$ , et l'on a  $\bar{u} \in \varepsilon \bar{v} \bar{x} \subset \varepsilon h \bar{x} = h \bar{x} \subset \bar{x} h$ ; d'où l'existence de  $w \in h$  vérifiant  $\bar{u} \in \bar{x} w$ , et par suite,  $u \in \varepsilon \bar{w} x \subset \varepsilon h x = hx$ . Ainsi  $xh \subset hx$  et, comme, par hypothèse  $hx \subset xh$ ,  $h$  est invariant dans  $H$ .

---

(\*) On sait que  $\langle A \rangle$  est un sous-hypergroupe car c'est l'intersection d'une famille de sous-hypergroupes ultra-clos à droite de  $H$  (cf. [8]).

**Proposition 1.4.**

*Si  $H$  est de type C à droite, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $h$  est réflexif<sup>(\*)</sup>*
- ii)  $h$  est semi-invariant à droite*
- iii) pour tout  $x \in H$ , on a  $hx = \varepsilon xh$ .*

*i) implique ii).*

Soient  $x \in H$  et  $z \in xh$  ; il existe  $u \in h$  tel que  $z \in xu$ . Alors on a  $u \in \varepsilon \bar{x}z$  et  $\varepsilon \bar{x}z \cap h \neq \emptyset$  ; d'où l'existence de  $v \in \bar{x}z$  vérifiant  $\varepsilon v \cap h \neq \emptyset$ , et donc aussi  $v \in \varepsilon h \cap h \neq \emptyset$ . Il s'ensuit  $\bar{x}z \cap h \neq \emptyset$ , et  $z\bar{x} \cap h \neq \emptyset$ . Ainsi, pour tout  $v \in z\bar{x} \cap h$ , on a  $z \in v\bar{x} = vx \subset hx$ , d'où  $xh \subset hx$ .

*ii) implique iii).*

Pour tout  $x \in H$ , l'inclusion  $xh \subset hx$  implique  $\varepsilon xh \subset \varepsilon hx = hx$ . Réciproquement, si  $u \in hx$ , alors il existe  $v \in h$  tel que  $u \in vx$  et donc  $\bar{u} \in \varepsilon \bar{x}\bar{v} \subset \varepsilon \bar{x}h \subset \varepsilon h\bar{x} = h\bar{x}$ , d'où l'existence de  $w \in h$  vérifiant  $\bar{u} \in w\bar{x}$  ; on a alors  $u \in \varepsilon x\bar{w} \subset \varepsilon xh$  et il en résulte  $hx \subset \varepsilon xh$ .

*iii) implique i).*

Soient  $(x,y) \in H^2$  tel que  $xy \cap h \neq \emptyset$  et  $u \in xy \cap h$  ; on a  $x \in u\bar{y} \cap h\bar{y}$  et, puisque  $h$  est inversible dans  $H$ , on a  $\bar{y} \in hx$ , d'où  $\bar{y} \in \varepsilon xh$ . Ainsi il existe  $a \in h$  vérifiant  $\bar{y} \in \varepsilon xa$ , et alors  $\varepsilon \bar{y} \subset \varepsilon \bar{a}\bar{x}$ , soit  $\varepsilon y \subset \varepsilon \bar{a}\bar{x}$ , donc  $y \in \varepsilon \bar{a}\bar{x}$  et, si  $v \in \varepsilon \bar{a}$  est tel que  $y \in v\bar{x}$ , on a  $v \in h$ ,  $v \in yx$  et donc  $yx \cap h \neq \emptyset$ .

---

(\*) Un sous-ensemble non vide  $A$  de  $H$  est dit réflexif si pour tout  $(x,y) \in H^2$ , on a  $xy \cap A \neq \emptyset$  si et seulement si  $yx \cap A \neq \emptyset$ .

## § 2. Quelques résultats sur les morphismes d'hypergroupes.

Dans tout ce paragraphe,  $f$  désigne un morphisme d'hypergroupes de  $H$  dans  $H'$ .

### Proposition 2.1.

- 1) Si  $h'$  est clos dans  $H'$  et  $f^{-1}(h') \neq \emptyset$  alors  $f^{-1}(h')$  est un sous-hypergroupe clos de  $H$ .
- 2) Si  $h'$  est ultra-clos à droite (resp. gauche) alors  $f^{-1}(h')$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite (resp. gauche) de  $H$ .
- 3) Si  $h'$  est conjuguable alors  $f^{-1}(h')$  est un sous-hypergroupe conjuguable de  $H$ .

Pour la démonstration de 1) on renvoie à l'article [ 1 ] de P. BONANSINGA - P. CORSINI

2) Démontrons tout d'abord que  $f^{-1}(h')$  est non vide :

Pour tout  $u \in H$ , il existe  $v \in H$  tel que  $u \in uv$  et donc  $f(u) \in f(u)f(v)$  ; il s'ensuit, puisque  $h'$  est ultra-clos à droite dans  $H$ ,  $f(v) \in h'$  soit  $v \in f^{-1}(h')$ . Ainsi  $f^{-1}(h')$  est non vide et, d'après 1), c'est un sous-hypergroupe clos de  $H$ .

Mais, tout  $x \in H$  vérifie  $f(xf^{-1}(h') \cap x(H-f^{-1}(h'))) \subset f(x)h' \cap h(x)(H-h')$  et, le deuxième membre de l'inclusion étant vide, il vérifie aussi  $x f^{-1}(h') \cap x(H - f^{-1}(h')) = \emptyset$ .

3) Si  $h'$  est conjuguable, on a  $\omega_{H'} \subset h'$  et donc  $f^{-1}(\omega_{H'}) \subset f^{-1}(h')$ . Or, d'après la proposition 3 de [ 1 ] on sait que  $f(\omega_h) \subset \omega_{H'}$  ; il s'ensuit les inclusions  $\omega_h \subset f^{-1}(\omega_{H'}) \subset f^{-1}(h')$  et, en appliquant la proposition 2.6 de [ 8 ] on conclut que  $f^{-1}(h')$  est conjuguable.

### Proposition 2.2.

Si  $h'$  est ultra-clos à droite dans  $H'$ , pour tout couple  $(x,y) \in H^2$  on a  $y \in xf^{-1}(h')$  si et seulement si  $f(y) \in f(x)h'$ .

Il est évident que  $y \in xf^{-1}(h')$  implique  $f(y) \in f(x)h'$ . Montrons l'implication inverse :

Soit  $z \in H$  tel que  $y \in xz$ , alors  $f(y) \in f(x)f(z)$  et si  $f(z) \in H'-h'$  on a  $f(y) \in f(x)h' \cap f(x)(H'-h') = \emptyset$ , ce qui est absurde, donc  $f(z) \in h'$ , d'où  $z \in f^{-1}(h')$  et, en définitive,  $y \in xf^{-1}(h')$ .



On remarquera (cf. Proposition 2.1) que  $f^{-1}(h')$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de  $H$ .

**Corollaire 2.1.**

*Si  $h'$  est ultra-clos infra-invariant (resp. invariant) dans  $H'$ , il en est de même de  $f^{-1}(h')$  dans  $H$ .*

La proposition 2.1 établit que  $f^{-1}(h')$  est un sous-hypergroupe ultra-clos et donc inversible de  $H$ , d'où l'inclusion

$$x f^{-1}(h') \cup f^{-1}(h')x \subset f^{-1}(h') x f^{-1}(h').$$

Inversement, soit  $u \in f^{-1}(h')x f^{-1}(h')$ , alors on a  $f(u) \in h' f(x)h' = h'f(x) \cup f(x)h'$  et, par la proposition 2.2,  $u \in f^{-1}(h')x \cup x f^{-1}(h')$ , d'où l'on déduit l'égalité  $f^{-1}(h')x f^{-1}(h') = f^{-1}(h')x \cup x f^{-1}(h')$ .

La démonstration concernant le cas invariant se fait de façon analogue.

**§ 3. Une nouvelle classe d'hypergroupes.**

On dira que  $H$  est un hypergroupe de type  $U$  à droite si les conditions suivantes sont satisfaites :

*U1) Il existe  $\varepsilon \in H$  tel que pour tout  $x \in H$  on ait  $x\varepsilon = x$  (i.e.  $\varepsilon$  est unité scalaire à droite).*

*U2) Pour tout  $(x,y) \in H^2$ ,  $x \in xy$  implique  $y = \varepsilon$ .*

On définit corrélativement les hypergroupes de type  $U$  à gauche.

**Exemples.**

1) Les hypergroupes de type  $C$  à droite sont des hypergroupes de type  $U$  à droite.

2) Soit l'hypergroupe défini par l'ensemble  $\{\varepsilon, y, z, t, w\}$  muni de l'hyperproduit commutatif donné par la table suivante (\*)

.....  
 (\*) Cet exemple a été construit par une méthode indiquée dans le contre-exemple 3 du travail de P. CORSINI-Y. SUREAU précédemment cité.

|            | $\epsilon$ | $y$                 | $z$                 | $t$                 | $w$                 |
|------------|------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\epsilon$ | $\epsilon$ | $y$                 | $z$                 | $t$                 | $w$                 |
| $y$        | $z$        | $\epsilon, z, t, w$ | $\epsilon, t, w$    | $\epsilon, z, w$    | $\epsilon, z, t$    |
| $z$        | $z$        | $\epsilon, t, w$    | $\epsilon, y, t, w$ | $\epsilon, y, w$    | $\epsilon, y, t$    |
| $t$        | $t$        | $\epsilon, z, w$    | $\epsilon, y, w$    | $\epsilon, y, z, w$ | $\epsilon, y, z$    |
| $w$        | $w$        | $\epsilon, z, t$    | $\epsilon, y, t$    | $\epsilon, y, z$    | $\epsilon, y, z, t$ |

Cet hypergroupe est de type U à gauche et à droite mais n'est pas de type C.

(Sinon ce serait un groupe !)

3) Si  $h$  est inversible à droite, l'ensemble des identités partielles à droite de  $H/h$  est réduit à  $h/h$  si et seulement si  $H/h$  vérifie U2 et donc (cf. Rappels )  $h$  est ultra-clos à droite dans  $H$  si et seulement si  $H/h$  est de type U à droite.

On donne maintenant quelques propriétés des hypergroupes de type U à droite :

Si  $H$  est de type U à droite et si  $\epsilon$  est son unité scalaire à droite, alors

- 1)  $\epsilon$  appartient à tout sous-hypergroupe de  $H$ .
- 2)  $\epsilon$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de  $H$ .
- 3)  $h$  est clos à droite si et seulement s'il est ultra-clos à droite.
- 4) Si  $H'$  est de type U à droite d'unité scalaire à droite  $\epsilon'$  et si  $f : H \rightarrow H'$  est un morphisme d'hypergroupes, alors :
  - I)  $f(\epsilon) = \epsilon'$
  - II)  $f^{-1}(\epsilon')$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de  $H$ .
  - III)  $x \in y f^{-1}(\epsilon')$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$ .
  - IV)  $f$  est injectif si et seulement si  $f^{-1}(\epsilon') = \epsilon$
  - V) Si  $h$  est ultra-clos à droite et contenu dans  $f^{-1}(\epsilon')$  et si  $p : H \rightarrow H/h$  est la surjection canonique, alors il existe un unique morphisme  $g : H/h \rightarrow H'$  tel que le

diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & H' \\ p \downarrow & & \nearrow g \\ H/h & & \end{array}$$

et tel que l'on ait

a)  $\text{Im} g = \text{Im} f$

b)  $g^{-1}(\varepsilon') = f^{-1}(\varepsilon')/h = p(f^{-1}(\varepsilon'))$

c) Si  $f$  est un morphisme bon alors  $g$  l'est aussi.

VI) Si  $H'$  est de type  $U$  à droite et à gauche, alors  $f^{-1}(\varepsilon')$  est un sous-hypergroupe invariant de  $H$ .

#### Démonstrations.

1) Pour tout  $x \in h$ , il existe  $y \in h$  tel que  $x \in xy$  et donc, par U2,  $y = \varepsilon$ .

2) Il est évident que  $\varepsilon$  est un sous-hypergroupe de  $H$  car c'est une unité scalaire à droite. Si, pour un élément  $x \in H$  on a  $x \in \varepsilon \cap x(H - \varepsilon) \neq \emptyset$  alors  $x \in x(H - \varepsilon)$  et, par U2,  $\varepsilon \in H - \varepsilon$  ce qui est absurde. Donc  $\varepsilon$  est ultra-clos à droite dans  $H$ .

3) Si  $h$  est ultra-clos à droite, on sait qu'il est clos (cf. Proposition 1.1 de [8]). Réciproquement, supposons  $h$  clos à droite et  $A = xh \cap x(H - h) \neq \emptyset$ . Soit  $y \in A$ , par la reproductibilité de  $H$ , il existe  $u \in H$  tel que  $x \in yu$  et donc  $x \in xhu$  d'où, par U2,  $\varepsilon \in hu$  et, puisque  $\varepsilon \in h$ , et  $h$  est clos à droite, on a  $u \in h$ . Ainsi,  $y \in x(H - h) \subset yu(H - h) \subset yh(H - h) = y(H - h)$ ; il s'ensuit (par U2)  $\varepsilon \in H - h$ , ce qui est absurde. Donc  $A$  est vide et  $h$  est ultra-clos à droite dans  $H$ .

4-I)  $f(\varepsilon) = f(\varepsilon\varepsilon) \subset f(\varepsilon)f(\varepsilon)$  d'où  $f(\varepsilon) = \varepsilon'$ .

4-II) On sait (cf. 2)) que  $\varepsilon'$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite dans  $H'$ . Donc (Proposition 2.1)  $f^{-1}(\varepsilon')$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de  $H$ .

4-III) Si  $x \in y f^{-1}(\varepsilon')$  on a  $f(x) \in f(y) \varepsilon' = f(y)$  soit  $f(x) = f(y)$ .

Réciproquement,  $f(x) = f(y) = f(y) \varepsilon'$  implique, par la proposition 2.2,  $x \in y f^{-1}(\varepsilon')$ .

4-IV) Si  $x \in f^{-1}(\varepsilon')$  alors  $f(x) = f(\varepsilon') = f(\varepsilon)$  et si  $f$  est injectif alors  $x = \varepsilon = f^{-1}(\varepsilon')$ .

Réciproquement, supposons  $\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon')$  et  $f(x) = f(y)$  alors (cf. 4-III)  $x \in yf^{-1}(\varepsilon') = y$  et  $f$  est injectif.

4-V) On définit  $g : H/h \rightarrow H'$  en posant, pour tout  $p(x) \in H/h$ ,  $g(p(x)) = f(x)$ . Puisque  $h$  est contenu dans  $f^{-1}(\varepsilon') (\neq \emptyset)$ , pour tout  $x \in H$ , on a  $f(xh) \subset f(x)f(h) \subset f(x)\varepsilon' = f(x)$  d'où  $f(xh) = f(x)$ . Il s'ensuit, si  $p(x) = p(y)$ , que l'on a  $g(p(x)) = f(x) = f(xh) = f(yh) = f(y) = g(p(y))$ ;  $g$  est donc bien défini.

D'autre part, on a  $g(p(x)p(y)) = g(p(p^{-1}(p(x)p(y)))) = f(p^{-1}(p(x)p(y))) = f(p^{-1}(p(x))p^{-1}(p(y))) = f(xhyh) \subset f(xh)f(yh) = f(x)f(y) = g(p(x))g(p(y))$ .

Ce qui prouve que  $g$  est un morphisme d'hypergroupe.

Remarquons que si  $f$  est bon, on a  $f(xhyh) = f(xh)f(yh)$  d'où  $g(p(x)p(y)) = g(p(x))g(p(y))$  et  $g$  est donc lui aussi un morphisme bon.

Par construction,  $g$  est unique et vérifie  $\text{gop} = f$  et  $\text{Img} = \text{Imf}$ . De plus on a  $g^{-1}(\varepsilon') = \{p(x) \in H/h ; g(p(x)) = \varepsilon'\} = \{p(x) \in H/h ; f(x) = \varepsilon'\} = p(f^{-1}(\varepsilon')) = f^{-1}(\varepsilon')/h$ .

4-VI) Si  $H'$  est de type  $U$  à gauche et à droite,  $\varepsilon'$  est une unité scalaire bilatère, c'est donc un sous-hypergroupe invariant de  $H$  et, par le corollaire 1,  $f^{-1}(\varepsilon')$  est invariant.

### **Théorème 3.1.**

*Si  $H$  et  $H'$  sont de type  $U$  à droite d'identité scalaire  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  respectivement, alors  $H \times H'$  est de type  $U$  à droite d'unité scalaire  $(\varepsilon, \varepsilon')$ . De plus  $H \times H' / \varepsilon \times H'$  est isomorphe à  $H$  et  $H \times H' / H \times \varepsilon'$  est isomorphe à  $H'$ .*

Pour démontrer ce théorème, il nous faut le lemme technique suivant :

### **Lemme 3.1.**

*Si  $H$  et  $H'$  admettent respectivement  $h$  et  $h'$  comme sous-hypergroupe ultra-clos à droite alors  $h \times H'$  et  $H \times h'$  sont des sous-hypergroupes ultra-clos à droite de  $H \times H'$ .*

On sait que  $h \times H'$  et  $H \times h'$  sont des sous-hypergroupes de  $H \times H'$ . Montrons, par exemple, que  $h \times H'$  est ultra-clos à droite dans  $H \times H'$ .

Pour tout couple  $(x, y) \in H \times H'$  on peut écrire

$$\begin{aligned} (x, y)(h \times H') \cap (x, y) [(H \times H') \cdot (h \times H')] &= (x, y)(h \times H') \cap (x, y) [(H \cdot h) \times H'] = \\ (xh, yH') \cap (x(H \cdot h), yH') &= (xh, H') \cap (x(H \cdot h), H') = \emptyset \\ (\text{car } xh \cap x(H \cdot h) &= \emptyset \text{ pour tout } x \in H). \end{aligned}$$

De façon analogue, on montre l'ultra-clôture à droite de  $H \times h'$  dans  $H \times H'$ .

Revenons maintenant à la démonstration du théorème.

Il est trivial que  $(\varepsilon, \varepsilon')$  est une unité scalaire à droite. D'autre part, pour  $(x, y)$  et  $(a, b)$  de  $H \times H'$ , si  $(x, y) \in (x, y)(a, b)$  alors  $x \in xa$  et  $y \in yb$ , d'où  $a = \varepsilon$  et  $b = \varepsilon'$ ; donc  $H \times H'$  est de type U à droite.

L'application  $f : H \times H' \longrightarrow H \times \varepsilon'$  définie par  $f((x, y)) = f(x, y) = (x, \varepsilon')$  est surjective et c'est trivialement un morphisme bon vérifiant  $f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon \times H'$ . Ainsi d'après la propriété 4-V, il existe un unique morphisme  $g$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H \times H' & \xrightarrow{f} & H \times \varepsilon' \\ p \downarrow & \nearrow g & \\ H \times H' / \varepsilon \times H' & & \end{array}$$

et  $\text{Im} f = \text{Im} g$ ,  $g^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = p(f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon'))$  et  $g$  est bon. Mais alors, puisque  $f$  est surjectif,  $g$  l'est aussi et comme  $f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon \times H'$  on a  $g^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = p(\varepsilon \times H')$ , il s'ensuit, d'après la propriété 1, que  $g$  est injectif. Ainsi  $g$  est un isomorphisme d'hypergroupes.

Enfin, l'application  $t : H \times \varepsilon' \longrightarrow H$  telle que  $t(x, \varepsilon') = x$  ( $\forall x \in H$ ) est trivialement un isomorphisme d'hypergroupes. Le composé  $t \circ g$  nous donne l'isomorphisme cherché entre  $H \times H' / \varepsilon \times H'$  et  $H$ .

De façon analogue, on établit un isomorphisme entre  $H \times H' / H \times \varepsilon'$  et  $H'$ .

#### Remarque :

L'hypergroupe quotient,  $G/g$ , des classes à droite d'un groupe  $G$  modulo un de ses sous-groupes,  $g$ , est un hypergroupe de type C à droite. Mais tout hypergroupe de type C à droite n'est pas nécessairement isomorphe à un hypergroupe quotient  $G/g$  (cf. Y. UTUMI [10]).

Ici, le théorème 3.1 permet d'affirmer que tout hypergroupe,  $H$ , de type C à droite, d'unité scalaire à droite  $\varepsilon$ , est quotient d'un hypergroupe de type U à droite par un de ses sous-hypergroupes ultra-clos à droite. En effet, si  $K$  est un hypergroupe de type U à droite,  $H \times K$  en est un admettant  $\varepsilon \times K$  comme sous-hypergroupe ultra-clos à droite et  $H \times K / \varepsilon \times K$  est isomorphe à  $H$ .

**Proposition 3.1.**

*Si  $H$  est de type U à droite, d'identité scalaire à droite  $\varepsilon$ , il y a équivalence des conditions suivantes :*

- i)  $\varepsilon$  est unité à gauche
- ii)  $H$  est régulier et réversible à droite.

**Démonstration :**

i)  $\Rightarrow$  ii) :  $\varepsilon$  est donc unité bilatère. Soit  $z \in H$ , il existe  $z' \in H$  tel que  $\varepsilon \in z'z$  et alors  $z' \in \varepsilon z' \subset (z'z)z' = z'(zz')$  donc, par U2,  $\varepsilon \in zz'$ ; ainsi  $z'$  est inverse bilatère de  $z$  et  $H$  est régulier.

Soient  $x \in yz$  et  $z'' \in H$  tels que  $y \in xz''$ ; on a  $x \in (xz'')z = x(z''z)$  soit, par U2,  $\varepsilon \in z''z$  et, comme le montre la première partie de la démonstration,  $z''$  est inverse bilatère de  $z$ . Donc  $H$  est réversible à droite.

ii)  $\Rightarrow$  i) :  $H$  étant régulier, il existe au moins une unité bilatère  $\varepsilon'$ . En particulier  $\varepsilon'$  est une unité à droite et, par U2,  $\varepsilon = \varepsilon'$ ; donc  $\varepsilon$  est aussi une unité à gauche.

**Remarque :**

Dans l'exemple (3) on a vu que l'hypergroupe quotient,  $H/h$ , de  $H$  modulo un de ses sous-hypergroupes,  $h$ , ultra-clos à droite et inversible à gauche est un hypergroupe de type U à droite. Aussi, puisque  $h/h$  est une unité à gauche de  $H/h$ , la proposition 3.1 démontre que  $H/h$  est régulier et réversible à droite.

Dans la proposition suivante, on caractérise les inverses de  $H/h$ .

**Proposition 3.2.**

*Si  $h$  est ultra-clos à droite et inversible à gauche dans  $H$ , alors :*

- 1) pour tout couple  $(x, x')$  d'éléments de  $H$  tel que  $xx' \cap h \neq \emptyset$ ,  $x'h$  est inverse bilatère de  $xh$  dans  $H/h$ .*
- 2) Si  $h$  est semi-invariant à droite dans  $H$ , pour tout  $(x, x') \in H^2$  on a  $xx' \cap h \neq \emptyset$  si et seulement si  $x'h$  est inverse bilatère de  $xh$  dans  $H/h$ .*

1) Supposons  $xx' \cap h \neq \emptyset$  ;  $h$  étant inversible, on a,  $x \in xh$  et donc  $xx' \subset xhx'$  ; il s'ensuit pour tout  $u \in xx' \cap h$ , l'appartenance  $u \in xhx'$ , d'où  $h = uh \subset xhx'h$ . Ainsi  $x'h$  est inverse à droite de  $xh$ .

Mais l'inversibilité de  $h$  implique aussi l'appartenance  $x \in hx$ , d'où l'inclusion  $xh \subset h x h$  et donc  $xh \subset (x h x' h) x h = x h (x' h x h)$ . Or  $x' h x h$  n'est pas inclus dans  $H \cdot h$  sinon on aurait  $xh \subset xh(x' h x h) \subset xh(H \cdot h) = x(H \cdot h)$ . Ce qui contredit l'ultra-clôture à droite de  $h$  ; ainsi  $x' h x h \cap h \neq \emptyset$ .

En définitive, on a  $h \subset x'h x h \cap x h x' h$ , ce qui établit que  $x'h$  est inverse bilatère de  $xh$  dans  $H/h$ .

2) La condition est nécessaire d'après 1). Montrons qu'elle est suffisante. Puisque  $x'h$  est inverse bilatère de  $xh$  dans  $H/h$  on a  $h \subset x h x' h$  et donc  $x h x' \cap h \neq \emptyset$ . Mais, par hypothèse, on a  $xh \subset hx$ , d'où  $h x x' \cap h \neq \emptyset$  et,  $h$  étant clos,  $xx' \cap h \neq \emptyset$ .

**§ 4. Structure des hypergroupes de doubles classes.**

L'ensemble  $h \backslash H / h$  des doubles classes  $h x h$  ( $x \in H$ ) de  $H$  modulo  $h$ , où  $h$  est supposé inversible, est muni d'une structure d'hypergroupe par l'hyperproduit  $(h x h)(h y h) = \{ h z h ; z \in x h y \}$ . Cet hypergroupe de doubles classes a déjà été étudié par M. DRESHER et O. ORE (cf. [ 5 ] ) et M. KRASNER (cf. [ 7 ] ). On donne ici un théorème dans le cas où  $h$  est ultra-clos dans  $H$ .

**Théorème 4.1.**

*Si  $h$  est ultra-clos dans  $H$ , alors  $h \backslash H / h$  est un hypergroupe régulier et réversible.*

Il est évident que  ${}_h \backslash h /_h$  est une unité bilatère de l'hypergroupe  ${}_h \backslash H /_h$ . Soit  $h x h \in {}_h \backslash H /_h$ , il existe  $h \bar{x} h$  tel que  $h \in (h x h)(h \bar{x} h)$ ; il s'ensuit  $x h \bar{x} \cap h \neq \emptyset$  et donc  $h \subset x h \bar{x} h$ .

Si l'on suppose  $\bar{x} h x \subset H \cdot h$ , alors on a

$x h \subset h x h \subset (x h \bar{x} h) x h = x h (\bar{x} h x) h \subset x h (H \cdot h) h = x (H \cdot h)$ , ce qui contredit l'ultra-clôture à droite de  $h$  dans  $H$ ; ainsi  $\bar{x} h x \cap h \neq \emptyset$  et  $h \in (h \bar{x} h)(h x h)$ . On a donc démontré l'existence d'un inverse bilatère,  $h \bar{x} h$ , de  $h x h$  et par là-même, que  ${}_h \backslash H /_h$  est régulier.

Montrons maintenant la réversibilité à gauche. Pour cela considérons  $h x h \in (h z h)(h y h)$ . Il existe  $w \in z h y$  et  $t \in h y$  tels que  $h x h = h w h$  et  $w \in z t$  et, puisque  $h$  est inversible dans  $H$ , on a  $h t h = h y h$ . Mais la reproductibilité de  $H$  implique l'existence de  $z' \in H$  vérifiant  $t \in z' w$  et donc  $t \in z' h w$ ; il s'ensuit  $h t h = h y h \in (h z' h)(h w h) = (h z' h)(h x h)$  soit  $h y h \in (h z' h)(h x h)$ . Il reste à prouver que  $h z' h$  est un inverse bilatère de  $h z h$  dans  ${}_h \backslash H /_h$ , or  $w \in z t$  et  $t \in z' w$  impliquent  $t \in (z' z) t$  et  $w \in (z z') w$  d'où, puisque  $h$  est ultra-clos,  $z' z \cap h \neq \emptyset$  et  $z z' \cap h \neq \emptyset$  donc  $z' h z \cap h \neq \emptyset$  et  $z h z' \cap h \neq \emptyset$  et l'on conclut à  $h \in (h z' h)(h z h) \cap (h z h)(h z' h)$ ; c'est-à-dire que  $h z' h$  est inverse bilatère de  $h z h$ .

Corrélativement, on démontre la réversibilité à droite de  ${}_h \backslash H /_h$ .

#### Remarque :

La proposition 3.1 permet d'affirmer qu'un hypergroupe de type U à droite et à gauche est régulier et réversible. Or,  ${}_h \backslash H /_h$  admet une identité scalaire bilatère,  ${}_h \backslash h /_h$ , et, comme il est régulier à gauche et à droite, on pourrait penser qu'il est de type U à gauche et à droite; mais il n'en est rien comme le montre le contre-exemple suivant :

#### Contre-exemple 4.1.

Soit  $G$  le groupe non commutatif d'ordre 10; il est engendré par deux éléments  $a$  et  $b$ , d'ordres respectifs 5 et 2, vérifiant la relation  $ba = a^4 b$ . Le sous-groupe  $g = \{1, b\}$  n'est pas normal dans  $G$  et les doubles classes de  $G$  modulo  $g$  sont :

$$e = g 1 g = g b g = \{1, b\}$$

$$x = g a g = g a^4 g = g a b g = g a^4 b g = \{a, a^4, ab, a^4 b\}$$

$$y = g a^2 g = g a^3 g = g a^2 b g = g a^3 b g = \{a^2, a^3, a^2 b, a^3 b\}$$



Enfin, la table de l'hyperproduit (ici commutatif) de  ${}_g\backslash G/g$  est la suivante :

|            | $\epsilon$ | $x$           | $y$           |
|------------|------------|---------------|---------------|
| $\epsilon$ | $\epsilon$ | $x$           | $y$           |
| $x$        | $x$        | $\epsilon, y$ | $x, y$        |
| $y$        | $y$        | $x, y$        | $\epsilon, x$ |

et de toute évidence  ${}_g\backslash G/g$  n'est pas un hypergroupe de type U ni à gauche ni à droite.

#### § 5. Structure des hypergroupes quotients, $H/h$ , de $H$ modulo un de ses sous-hypergroupes, $h$ , bi-ultra-clos ou conjuguable.

Les sous-hypergroupes bi-ultra-clos constituent une classe de sous-hypergroupes intermédiaire entre celle des sous-hypergroupes ultra-clos et celle des sous-hypergroupes conjuguables; ils furent introduits pour la première fois par P. CORSINI et Y. SUREAU dans [4] .

##### Définition 5.1.

On dit que  $h$  est un sous-hypergroupe bi-ultra-clos de  $H$  si et seulement si pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $H$  on a

$$xhy \cap x(H-h)y = \emptyset.$$

##### Théorème 5.1.

Si  $h$  est bi-ultra-clos dans  $H$ , alors  $H/h$  est un hypergroupe de type C à droite.

Remarquons tout d'abord que,  $h$  étant bi-ultra-clos dans  $H$ , il est ultra-clos, et donc inversible, dans  $H$ .

De toute évidence,  $h$  est identité scalaire à droite dans  $H/h$ .

Considérons  $x, y$  et  $z$ , trois éléments de  $H$ , tels que  $xhy \cap xzhz \neq \emptyset$ . Il existe  $u \in xhy$  et  $v \in xzhz$  vérifiant  $uh \cap vh \neq \emptyset$  soit  $uh = vh$ . Ainsi il y a un élément  $w \in h$  pour lequel  $u \in vw$  et alors  $u \in vw \subset xhzw$  ; d'où l'existence de  $a \in zw$  tel que  $u \in xha$ . Mais il existe  $b \in H$  vérifiant  $a \in by$  et donc  $u \in xhby$ . Si  $b \in H-h$ , on a

$u \in xhby \subset xh(H-h)y = x(H-h)y$  et, comme  $u \in xhy$ ,  $xhy \cap x(H-h)y \neq \emptyset$ , ce qui contredit l'hypothèse de bi-ultra-clôture. Donc on a  $b \in h$  soit  $a \in hy$ , d'où  $zw \cap hy \neq \emptyset$ ; il s'ensuit  $zh \cap hy \neq \emptyset$  et par conséquent  $hzh \cap hyh \neq \emptyset$ , donc  $hzh = hyh$ .

En définitive,  $xhyh \cap xhzh \neq \emptyset$  implique  $hyh = hzh$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

### **Théorème 5.2.**

*Si  $h$  est conjuguable, alors :*

- 1)  $H/h$  est un hypergroupe de type C à droite
- 2) Le plus petit sous-hypergroupe clos et invariant contenant  $h$  existe et, si on le note  $I_N(h)$ , on a  $\omega_{H/h} = I_N(h)/h$ .

La première partie du théorème résulte du théorème 5.1 précédent puisque tout sous-hypergroupe conjuguable de  $H$  est bi-ultra-clos dans  $H$ .

Pour démontrer la deuxième partie du Théorème, remarquons tout d'abord que tout sous-hypergroupe clos de  $H$  contenant  $h$  est conjuguable (cf. proposition 2.6 de [ 8 ] ) et que l'intersection  $I_N(h)$  de la famille  $\{ K_i \}_{i \in I}$  de tous les sous-hypergroupes conjuguables et invariants de  $H$  contenant  $h$  est aussi un sous-hypergroupe de  $H$  conjuguable (donc clos) (cf. proposition 2.5 de [ 8 ] ) et invariant (en effet, pour tout  $x$  de  $H$ , on a

$$x(H \cdot I_N(h)) = \bigcup_{i \in I} x(H \cdot K_i) = \bigcup_{i \in I} (H \cdot xK_i) = \bigcup_{i \in I} (H \cdot K_i x) = (H \cdot I_N(h))x \text{ et,}$$

comme  $I_N(h)$  est ultra-clos, on a  $xI_N(h) = I_N(h)x$ ). Ainsi l'existence de  $I_N(h)$  est démontrée.

Notons  $p : H \rightarrow H/h$  la surjection canonique. Puisque  $\omega_{H/h}$  est conjuguable et invariant dans  $H/h$ , il en est de même de  $p^{-1}(\omega_{H/h})$  dans  $H$  d'après la proposition 2.1 et le corollaire 2.1, et, comme  $h$  est contenu dans  $p^{-1}(\omega_{H/h})$  on a  $I_N(h) \subset p^{-1}(\omega_{H/h})$ , d'où  $I_N(h)/h = p(I_N(h)) \subset \omega_{H/h}$ .

Inversement,  $I_N(h)$  étant conjuguable et invariant, on sait que  $H/I_N(h)$  est un groupe (cf. Théorème 3.1 de [ 8 ] ) et, puisque  $H/h/I_N(h)/h$  est isomorphe à  $H/I_N(h)$

il s'ensuit (par le même théorème cité ci-dessus) que  $I_N(h)/h$  est un sous-hypergroupe conjugué et invariant de  $H/h$ . On a donc  $\omega_{H/h} \subset I_N(h)/h$  et en définitive  $\omega_{H/h} = I_N(h)/h$ .

**Remarque :**

Le Théorème 5.1 précédent permet d'affirmer qu'en général la réciproque de la première assertion du théorème 5.2 est fautive ; c'est-à-dire que si  $H/h$  est un hypergroupe de type C à droite,  $h$  n'est pas nécessairement conjugué. En fait, il existe des contre-exemples (voir par exemple le contre-exemple 2 du travail de P. CORSINI et Y. SUREAU [4]). Mais on a la proposition suivante :

**Proposition 5.1.**

*Si  $h$  est semi-invariant à droite et inversible dans  $H$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $h$  est bi-ultra-clos dans  $H$ .
- ii)  $H/h$  est de type C à droite et  ${}_hH$  est de type U à gauche.

i) implique ii) : On sait, par le théorème 5.1, que  $H/h$  est de type C à droite. D'autre part, puisque  $h$  est ultra-clos à gauche,  ${}_hH$  est de type U à gauche (cf. exemple 3) du paragraphe 3 précédent).

ii) implique i) : Puisque  ${}_hH$  est de type U à gauche,  $h$  est ultra-clos à gauche. Supposons qu'il existe un couple  $(x,y)$  d'éléments de  $H$  vérifiant  $xhy \cap x(H-h)y \neq \emptyset$  ; alors, il existe  $u \in hy$  et  $v \in (H-h)y$  tels que  $xu \cap xv \neq \emptyset$  et donc  $xhuh \cap xhvh \neq \emptyset$ . Mais,  $H/h$  étant de type C à droite, on a  $huh = hvh$ , d'où  $huh = hvh \subset h(H-h)yh = (H-h)yh \subset (H-h)hy = (H-h)y$ . Or  $u \in hy$  implique  $huh \subset hhyh = hyh \subset hhy = hy$  ; il s'ensuit  $hy \cap (H-h)y \neq \emptyset$ , ce qui contredit l'hypothèse d'ultra-clôture à gauche faite sur  $h$  dans  $H$ . Donc on a  $xhy \cap x(H-h)y = \emptyset$  pour tout couple  $(x,y)$  d'éléments de  $H$  ; c'est-à-dire que  $h$  est bi-ultra-clos dans  $H$ .

### § 6. Condition nécessaire pour que l'hypergroupe quotient $H/h$ soit commutatif.

On définit et l'on utilise ici une notion équivalente à celle de commutateur pour les groupes.

Pour cela, on pose, pour tout couple  $(a, b) \in H^2$ ,  $a/b = \{x \in H ; a \in xb\}$  et  $b \backslash a = \{x \in H ; a \in bx\}$  et l'on étend cette définition à l'ensemble des parties non vides  $\mathcal{P}^*(H)$ , de  $H$ , en posant, pour toute paire  $(A, B)$  d'éléments de  $\mathcal{P}^*(H)$ ,  
 $A/B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a/b$  et  $A \backslash B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \backslash b$ . Enfin, on note  $D_1 = \bigcup_{(x,y) \in H^2} xy/yx$ ,  
 $D_2 = \bigcup_{(x,y) \in H^2} xy \setminus yx$  et  $D = D_1 \cup D_2$ .

#### Proposition 6.1.

*On a les propriétés suivantes :*

- 1) Si  $D_1 \subset h$  alors  $h$  est semi-invariant à droite dans  $H$ .
- 2) Si  $D_2 \subset h$  alors  $h$  est semi-invariant à gauche dans  $H$ .
- 3) Si  $D \subset h$  alors  $h$  est invariant dans  $H$ .

Démontrons 1). Soient  $x \in H$  et  $u \in xh$ , alors il existe  $y \in h$  vérifiant  $u \in xy$  et, pour tout  $v \in yx$ , il existe  $a \in H$  tel que  $u \in av$  ; donc on a  $a \in u/v \subset xy/yx \subset D_1 \subset h$ . Il s'ensuit  $u \in av \subset ayx \subset h h x = hx$ , d'où  $xh \subset hx$ .

On démontre corrélativement la propriété 2), quant à la propriété 3) elle découle de 1) et 2).

#### Théorème 6.1.

*Si  $h$  est inversible dans  $H$  et contient  $D$ , alors  $H/h$  est un hypergroupe commutatif.*

En effet,  $(x,y) \in H^2$  étant donné, pour tout  $u \in xy$ , on a  $u/yx \subset xy/yx \subset D_1 \subset h$  d'où  $u \in hyx$  et donc  $xy \subset hyx$  ; il en résulte  $hxyh \subset hyxh$ . Mais, d'après la proposition 6.1 (3) précédente,  $h$  est invariant dans  $H$  ; on conclut donc à l'inclusion  $xhyh \subset yhxh$ .

De façon analogue, on établit l'inclusion inverse  $yh \setminus xh \subset xh \setminus yh$  (en utilisant  $yx \setminus xy \subset h$ ), d'où la commutativité de l'hypergroupe  $H/h$ .

**Remarque 6.1.**

En général, la réciproque du Théorème 6.1 précédent est fausse. En effet, si  $H$  est l'hypergroupe commutatif de l'exemple 2) des hypergroupes de type  $U$  à droite, et si  $h = \varepsilon$  ( $\varepsilon$  est ultra-clos, donc inversible) on a  $H/\varepsilon \cong H$ , donc  $H/\varepsilon$  est commutatif, mais  $D \not\subset \varepsilon$ . On a seulement le résultat suivant :

**Proposition 6.2.**

*On suppose  $h$  inversible à droite (resp. gauche) dans  $H$  et tel que  $H/h$  (resp.  $h \setminus H$ ) soit commutatif.*

1) *Alors  $h$  est semi-invariant à gauche (resp. droite) dans  $H$  et pour tout  $(x,y) \in H^2$  on a  $(xy \setminus yx) \cap h \neq \emptyset$  (resp.  $(xy/yx) \cap h \neq \emptyset$ ).*

2) *Si, de plus,  $h$  est ultra-clos à droite (ou à gauche), alors  $h$  est invariant dans  $H$ , et pour tout  $(x,y) \in H^2$ , on a  $(xy/yx) \cap h \neq \emptyset$  et  $(xy \setminus yx) \cap h \neq \emptyset$ .*

**Démonstration :**

1)  $h$  étant inversible à droite, on a  $hx \subset h x h$  et, puisque  $H/h$  est commutatif,  $h x h = x h$  d'où  $h x \subset x h$ .

Pour tout  $(x,y) \in H^2$ , la commutativité de  $H/h$  et la semi-invariance à gauche de  $h$  impliquent  $xy h \cap y x h \neq \emptyset$ , d'où l'existence de  $u \in xy$  et  $v \in yx$  tels que  $uh \cap vh \neq \emptyset$ ; soit, ici,  $uh = vh$ . Ainsi on a  $v \in uh$ , donc  $(u \setminus v) \cap h \neq \emptyset$  et, par conséquent,  $(xy \setminus yx) \cap h \neq \emptyset$ .

2) Compte tenu de 1), il suffit, pour démontrer l'invariance de  $h$ , de prouver qu'il est semi-invariant à droite dans  $H$  :

pour tout  $x \in H$  on a  $xh \cap (H-h)x \subset xh \cap (H-h)hxh = xh \cap xh(H-h)h = xh \cap x(H-h) = \emptyset$ .  
Donc  $xh \subset hx$ .

Enfin, l'invariance de  $h$  dans  $H$  implique l'inversibilité à gauche de  $h$  dans  $H$  et la commutativité de  ${}_hH$  découlant alors de celle de  $H/h$  on peut appliquer 1) à gauche et à droite ; ce qui achève la démonstration de 2).

**Remarque 6.2.**

L'hypothèse d'ultra-clôture paraît nécessaire pour démontrer l'invariance de  $h$  dans  $H$ . En effet, l'inversibilité n'est pas une condition assez forte comme le montre le

**Contre- exemple 6.1.**

Soit  $H$  l'hypergroupe défini par l'ensemble  $\{x, y, z, w\}$  muni de l'hyperproduit donné par le tableau suivant :

| $\curvearrowright$ | $x$    | $y$    | $z$    | $w$    |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|
| $x$                | $x$    | $y$    | $z$    | $z, w$ |
| $y$                | $y$    | $x, y$ | $z, w$ | $z, w$ |
| $z$                | $z, w$ | $z, w$ | $x, y$ | $x, y$ |
| $w$                | $z, w$ | $z, w$ | $x, y$ | $x, y$ |

$H$  est non commutatif. Posons  $h = \{x\}$ . Il est évident que  $h$  est inversible à droite, mais non à gauche et que  $H/h$  est commutatif. En posant  $\bar{x} = xh$ ,  $\bar{y} = yh$  et  $\bar{z} = zh = wh$ , l'hyperproduit de  $H/h$  est donné par le tableau

|           | $\bar{X}$ | $\bar{Y}$          | $\bar{Z}$          |
|-----------|-----------|--------------------|--------------------|
| $\bar{X}$ | $\bar{X}$ | $\bar{Y}$          | $\bar{Z}$          |
| $\bar{Y}$ | $\bar{Y}$ | $\bar{X}, \bar{Y}$ | $\bar{Z}$          |
| $\bar{Z}$ | $\bar{Z}$ | $\bar{Z}$          | $\bar{X}, \bar{Y}$ |

il est alors trivial que  $h$  n'est pas semi-invariant à droite puisque  $zh = \{z, w\} \not\subset hz = \{z\}$ .

**Théorème 6.2.**

*Si  $h$  est inversible dans  $H$ , il y a équivalence de :*

- i)  $H/h$  est un groupe commutatif*
- ii)  $h$  est conjuguable et  $D \subset h$*
- iii)  $h \backslash H$  est un groupe commutatif.*

*i) implique ii).*

On sait que si  $H/h$  est un groupe, alors  $h$  est conjuguable et invariant dans  $H$  (cf. Théorème 3.1 de [8]). Soit  $(x,y) \in H^2$  et supposons  $(xy \setminus yx) \cap (H-h) \neq \emptyset$ ; alors,  $yx \cap xy(H-h) \neq \emptyset$ , d'où  $yxh \cap xhy(H-h) \neq \emptyset$  et, puisque  $H/h$  est commutatif,  $xhyh \cap xhy(H-h) \neq \emptyset$ . Mais,  $h$  est conjuguable ; il existe donc  $x' \in H$  tel que  $x'x \subset h$ . Il s'ensuit  $\emptyset \neq x'xhyh \cap x'xhy(H-h) = hyh \cap hy(H-h) = yh \cap y(H-h)$ , ce qui est absurde. Donc on a  $xy \setminus yx \subset h$  pour tout  $(x,y) \in H^2$ , c'est-à-dire  $D_2 \subset h$ . On démontre de même que l'on a  $D_1 \subset h$ , d'où l'inclusion  $D \subset h$ .

*ii) implique i).*

Le théorème 6.1 établit la commutativité de  $H/h$ , la proposition 6.2 (2), l'invariance de  $h$  et le théorème 3.1 de [8] permet de conclure que  $H/h$  est un groupe.

L'équivalence entre ii) et iii) se démontre de façon analogue.

**§ 7. Une notion de sous-hypergroupe dérivé.**

On garde les notations du paragraphe précédent.

Le théorème 6.2 précédent incite à poser la définition suivante :

**Définition 7.1.**

*On appelle sous-hypergroupe dérivé de  $H$ , et l'on note  $D(H)$ , le sous-hypergroupe de  $H$  obtenu par l'intersection de tous les sous-hypergroupes conjuguables de  $H$  contenant  $D$ .*

Remarquons que  $D(H)$  est un sous-hypergroupe conjugable de  $H$  contenant  $D$  et que le théorème 6.2 précédent permet d'affirmer que  $D(H)$  est l'intersection de tous les sous-hypergroupes  $h$  de  $H$  tels que  $H/h$  soit commutatif. Enfin, dans le cas où  $H$  est un groupe, on retombe sur la définition classique du sous-groupe dérivé.

**Lemme 7.1.**

*Si  $h$  est tel que  $H/h$  soit un groupe commutatif, alors on a  $D(H/\omega_H) \subset h/\omega_H$ .*

En effet,  $H/h$  étant un groupe, on sait que  $h$  est conjugable et invariant dans  $H$  (cf. théorème 3.1 de [8]) ; donc  $\omega_H$  est contenu dans  $h$ .

D'autre part,  $(H/\omega_H)/(h/\omega_H)$  et  $H/h$  sont des groupes isomorphes ; ils sont donc tous les deux commutatifs et alors  $D(H/\omega_H)$  est contenu dans  $(h/\omega_H)$ .

**Proposition 7.1.**

*On a  $D(H/\omega_H) = D(H)/\omega_H$ .*

En appliquant le lemme 7.1 à  $D(H)$ , on a l'inclusion  $D(H/\omega_H) \subset D(H)/\omega_H$ .

Mais  $D(H/\omega_H)$  est un sous-groupe de  $H/\omega_H$ , il existe donc un sous-hypergroupe  $L$  de  $H$  contenant  $\omega_H$  tel que  $D(H/\omega_H) = L/\omega_H$ . Or,  $H/L$  est un groupe isomorphe à  $H/\omega_H L/\omega_H = H/\omega_H D(H/\omega_H)$ , il est donc commutatif et  $D(H)$  est contenu dans  $L$ , d'où l'inclusion  $D(H)/\omega_H \subset L/\omega_H = D(H/\omega_H)$ .

**Proposition 7.2.**

*Soit  $D_u(H)$  l'intersection des sous-hypergroupes ultra-clos de  $H$  contenant  $D$ .*

*Si  $f : H \rightarrow H'$  est un morphisme d'hypergroupes et  $D_u(H')$  l'équivalent pour  $H'$  de  $D_u(H)$*



pour  $H$ , en notant  $p : H \rightarrow H/D_u(H)$  et  $p' : H' \rightarrow H'/D_u(H')$  les morphismes surjectifs canoniques, il existe un unique morphisme d'hypergroupes  $f^* : H/D_u(H) \rightarrow H'/D_u(H')$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad} & H' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ H/D_u(H) & \xrightarrow{\quad} & H'/D_u(H') \end{array}$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver  $f(D_u(H)) \subset D_u(H')$ .

Soit  $(x, y) \in H^2$ , alors on a  $f(xy/yx) \subset f(x)f(y)/f(y)f(x) \subset D' \subset D_u(H')$  et, analogiquement,  $f(xy \setminus yx) \subset D_u(H')$ , d'où  $f(D) \subset D_u(H')$  et donc  $D \subset f^{-1}(D_u(H'))$ . Mais, compte tenu de la proposition 2.1,  $f^{-1}(D_u(H'))$  est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de  $H$ , par conséquent, on a  $D_u(H) \subset f^{-1}(D_u(H'))$ ; il en résulte  $f(D_u(H)) \subset D_u(H')$ .

De toute évidence, il s'ensuit le

**Corollaire 7.1.**

Si  $p : H \rightarrow H/D(H)$  est le morphisme surjectif canonique, alors, pour tout groupe commutatif  $G$  et tout morphisme d'hypergroupes  $f : H \rightarrow G$ , il existe un et un seul morphisme  $\bar{f} : H/D(H) \rightarrow G$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & G \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ H/D(H) & & \end{array}$$

commute.

On va traiter maintenant

**Un cas particulier :** La structure de  $D(H)$  lorsque  $H$  est de type  $C$  à droite.

Dans la suite, on note  $\varepsilon$  l'unité scalaire à droite de  $H$ .

**Proposition 7.3.**

Si  $H$  est de type C à droite, pour tout quadruplet  $(x, y, \bar{x}, \bar{y})$  d'éléments de  $H$  vérifiant  $\varepsilon \in x\bar{x} \cap y\bar{y}$ , on a :

$$1) xy/yx = xy\bar{x}\bar{y}$$

$$2) xy \setminus \varepsilon yx = \varepsilon (\bar{x}\bar{y} / \bar{y}\bar{x})$$

$$3) xy \setminus yx \subset \varepsilon (\bar{x}\bar{y} / \bar{y}\bar{x})$$

1) Soit  $\alpha \in xy/yx$  ; il existe  $a \in xy$  et  $b \in yx$  tels que  $\alpha \in a/b$  et donc  $a \in \alpha b$ . Alors,  $H$  étant de type C à droite, on a  $\alpha \in a\bar{b}$  et  $\bar{b} \in \varepsilon \bar{b} \subset \varepsilon \bar{x}\bar{y}$  ; il s'ensuit  $\alpha \in xy\varepsilon\bar{x}\bar{y} = xy\bar{x}\bar{y}$ , d'où  $xy/yx \subset xy\bar{x}\bar{y}$ .

Inversement, soient  $\alpha \in xy\bar{x}\bar{y}$ ,  $a \in xy$  et  $b \in \bar{x}\bar{y}$  tels que  $\alpha \in ab$  ; alors on a  $a \in \alpha \bar{b}$  et, par conséquent,  $\bar{b} \in \varepsilon \bar{b} \subset \varepsilon \bar{y}\bar{x} = \varepsilon \bar{y} \varepsilon \bar{x} = \varepsilon y \varepsilon x = \varepsilon yx$  ; d'où  $a \in \alpha \varepsilon yx = \alpha yx$ . Ainsi, il existe  $c \in yx$  vérifiant  $a \in \alpha c$ , et l'on a  $\alpha \in a/c \subset xy/yx$ , d'où l'inclusion  $xy\bar{x}\bar{y} \subset xy/yx$ .

Enfin,  $x$  et  $y$  étant donnés, l'égalité  $xy/yx = xy\bar{x}\bar{y}$  est indépendante du choix de  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  vérifiant  $\varepsilon \in x\bar{x} \cap y\bar{y}$ . En effet, si  $\bar{x}'$  et  $\bar{y}'$ , éléments de  $H$ , vérifient  $\varepsilon \in x\bar{x}' \cap y\bar{y}'$ , alors  $\varepsilon \bar{x} = \varepsilon \bar{x}'$ ,  $\varepsilon \bar{y} = \varepsilon \bar{y}'$  et l'on a  $xy\bar{x}\bar{y} = xy \varepsilon \bar{x} \varepsilon \bar{y} = xy \varepsilon \bar{x}' \varepsilon \bar{y}' = xy\bar{x}'\bar{y}'$ .

2) Par une démonstration analogue à celle faite en 1), on obtient l'égalité

$$xy \setminus \varepsilon yx = \varepsilon \bar{x}\bar{y} xy. \text{ D'autre part, on a } \bar{x}\bar{y} xy = \bar{x}\bar{y} \varepsilon x \varepsilon y = \bar{x}\bar{y} \varepsilon \bar{x} \varepsilon \bar{y} = \bar{x}\bar{y} / \bar{y}\bar{x},$$

d'où  $xy \setminus \varepsilon yx = \varepsilon (\bar{x}\bar{y} / \bar{y}\bar{x})$ .

3) De l'inclusion  $yx \subset \varepsilon yx$ , on tire  $xy \setminus yx \subset xy / \varepsilon yx$ , donc, compte tenu de 2), on a  $xy \setminus yx \subset \varepsilon (\bar{x}\bar{y} / \bar{y}\bar{x})$ .

**Proposition 7.4.**

Si  $H$  est de type C à droite, alors  $D(H)$  est l'intersection de tous les sous-hypergroupes contenant  $D_1$ .

Notons  $D_1(H)$  l'intersection de tous les sous-hypergroupes de  $H$  contenant  $D_1$ .

L'inclusion  $D_1(H) \subset D(H)$  est triviale ; on va démontrer l'inclusion inverse.

On sait que le sous-hypergroupe de  $H$  est clos, donc  $D_1(H)$  est un sous-hypergroupe de  $H$  et, de plus, il est clos dans  $H$ .

D'autre part, pour tout  $(x, y) \in H^2$  et tout  $w \in y \bar{x} \bar{y}$ , on a  $xw \subset x y \bar{x} \bar{y} = xy/yx \subset D_1 \subset D_1(H)$ . Ainsi, quel que soit  $x \in H$ , il existe  $w \in H$  tel que  $xw \subset D_1(H)$  ; donc  $D_1(H)$  est conjuguable.

Enfin, en vertu de la proposition 7.3 précédente, on a  $xy \setminus yx \subset \varepsilon(\bar{x} \bar{y} / \bar{y} \bar{x}) \subset \varepsilon D_1 \subset D_1(H)$ . Il s'ensuit l'inclusion  $D_2 \subset D_1(H)$ , donc  $D \subset D_1(H)$  et, comme  $D_1(H)$  est conjuguable, on conclut que l'on a  $D(H) \subset D_1(H)$ .

**Proposition 7.5.**

*Si  $H$  est de type C à droite, alors tout sous-hypergroupe  $h$ , de  $H$  tel que  $h \cap D(H) = \{\varepsilon\}$ , est un groupe.*

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $h$ . On sait que  $\varepsilon \bar{x}$  et  $\varepsilon \bar{y}$  sont contenus dans  $h$  ; on a donc  $\varepsilon \bar{x} \bar{y} x y \subset h \cap D(H) = \{\varepsilon\}$ , soit  $\varepsilon \bar{x} \bar{y} x y = \varepsilon$ . Or  $\varepsilon$  appartient à  $y x \bar{x} \bar{y}$  ; il s'ensuit  $xy \subset \varepsilon xy \subset (yx \bar{x} \bar{y})xy = yx(\varepsilon \bar{x} \bar{y} xy) = yx\varepsilon = yx$ , d'où l'inclusion  $xy \subset yx$ . L'inclusion inverse se démontre de façon analogue. Mais alors  $\varepsilon$  est unité scalaire bilatère, et donc  $h$  est un groupe.

### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] P. BONANSINGA - P. CORSINI - Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi - Boll. Un. Mat. It. (1981).
- [ 2 ] P. CORSINI - Contributo alla teoria degli ipergruppi - Atti soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1980).
- [ 3 ] P. CORSINI - Recenti risultati in teoria degli ipergruppi - Boll. Un. Mat. It. 2 - A (1983).
- [ 4 ] P. CORSINI et Y. SUREAU - Article à paraître.
- [ 5 ] M. DRESHER - O. ORE - Theory of multigroups - Amer. J. Math. 60 (1938).
- [ 6 ] M. KOSKAS - Groupoides, Demi-hypergroupes et hypergroupes - J. Math. Pures et Appl. 49, (1970).
- [ 7 ] M. KRASNER - La loi de Jordan - Hölder dans les hypergroupes et les suites génératrices des corps de nombres  $\beta$ -adiques- Duke Math. Jour. Vd 6 (1940).
- [ 8 ] Y. SUREAU - Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Clermont-Ferrand II - (1980).
- [ 9 ] Y. SUREAU - Hypergroupes de type C - Conférence Taormine - (1983).
- [ 10 ] Y. UTUMI - On hypergroups of group right cosets - Osaka Math. Journal Vol. 1, March, 1949.

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

*Adresse personnelle : Via Palermo n° 523, 98100 Messina, Italie.*