

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GILLES LACHAUD

**Analyse spectrale et prolongement analytique : séries d'Eisenstein,
fonctions ζ et nombre de solutions d'équations diophantiennes**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE SPECTRALE ET PROLONGEMENT ANALYTIQUE :
SÉRIES D'EISENSTEIN, FONCTIONS ZETA
ET NOMBRE DE SOLUTIONS D'EQUATIONS DIOPHANTIENNES

Gilles LACHAUD

«Analyser signifie délier»

1. Les séries d'EISENSTEIN.

Ferdinand EISENSTEIN, qui est né en 1823 et mort de la tuberculose à 29 ans, a introduit dans un mémoire au journal de Crelle daté de 1847, les séries

$$\sum_{W} (x + w)^{-a}$$

où W est un réseau du plan complexe, et a un entier positif, afin d'obtenir des fonctions méromorphes doublement périodiques de x . Ces séries convergent absolument pour $a > 3$, et Eisenstein mit au point les procédés de sommation pour les cas où $a = 1$ et où $a = 2$. Lorsque $a = 2$, cette série ne diffère de la fonction ζ que WEIERSTRASS allait introduire une quinzaine d'années plus tard que par une constante. Dans l'étude des séries précédentes interviennent les séries

$$(1) \quad \sum' w^{-2k},$$

où le signe prime indique que l'on somme sur les $w \in W$ non nuls, et où $k \geq 1$.

Ensuite KRONECKER introduisit en 1863 les séries

$$(2) \quad \sum' \chi(w) |w|^{-2s},$$

où χ est un caractère du groupe additif W , qui convergent pour $\text{Re}(s) > 1$. En calculant le terme constant de la série (2) en $s = 1$, il obtint le résultat maintenant connu sous le nom de «formule-limite de KRONECKER». Ce dernier ne semble pas s'être rendu compte avant 1891, l'année de sa mort, de la liaison entre son travail et celui d'EISENSTEIN. Et pourtant, dans les années 1880, il a été amené à étudier des séries du type.

$$(3) \quad \sum' \chi(w) |w|^{-2s} w^{-2k}$$

qui convergent pour $\text{Re}(s) > 1 - k$, ce qui apparaît comme une généralisation naturelle des travaux d'EISENSTEIN. Il paraît donc justifié d'appeler «Séries d'EISENSTEIN» les séries (3), comme on le fait de nos jours. En fait, nous n'étudierons ici que le cas où $k = 0$ et où χ est le caractère unité ; cf. [4].

Un problème naturel concernant la série

$$(4) \quad \sum' |w|^{-2s}$$

est celui de son prolongement analytique. Comme on le sait depuis le début du siècle, ces séries se prolongent en des fonctions méromorphes dans tout le plan complexe et vérifient une équation fonctionnelle. Nous allons interpréter et généraliser la série (4) sous deux points de vue :

- celui des formes automorphes ;
- celui des fonctions Zêta.

2. Le point de vue des fonctions automorphes : préliminaires.

Soit (w_1, w_2) une base du réseau W , avec $z = w_2/w_1$ dans le demi-plan P des nombres de partie imaginaire positive. Il vient

$$\begin{aligned} \sum' |w|^{-2s} &= |w_1|^{-2s} \sum'_{p,q} |p + qz|^{-2s} \\ &= |w_1|^{-2s} \zeta(2s) (\text{Im } z)^{-s} E(s, z), \end{aligned}$$

où on a posé

$$(1) \quad E(s,z) = (\operatorname{Im} z)^s \sum_{\substack{\Sigma \\ (p,q) = 1}} |p + qz|^{-2s} .$$

Le groupe $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ opère sur \mathbb{P} par homographies ; si on note Γ le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et N le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures, la série (1) se réécrit

$$(2) \quad E(s,z) = \sum_{\Gamma/\Gamma \cap N} (\operatorname{Im} \gamma z)^s ;$$

elle est invariante sous Γ .

L'opérateur de LAPLACE-BELTRAMI de \mathbb{P}

$$\omega = y^2 (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$$

commute à l'action de G sur les fonctions définies sur \mathbb{P} ; il définit donc un opérateur différentiel sur l'espace $X = \mathbb{P}/\Gamma$, et la série (2) est une fonction propre de ω , de valeur propre $s(1-s)$; c'est ce que MAASS a mis en évidence en 1949.

Nous allons réécrire cette série comme une fonction sur G . Soit K le sous-groupe des rotations, A le sous-groupe des matrices diagonales, de telle sorte que $G = K A N$.

L'application $x \mapsto x^{-1}(i)$ permet d'identifier le demi-plan \mathbb{P} à $K \backslash G$. Si $a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$ est dans

A , on pose $\delta(a) = t^2$ et si $x = k a n$, on pose $\delta(x) = \delta(a)$. Alors si $z = x^{-1}(i)$, on a $\operatorname{Im} z = a(x)^{-1}$, de telle sorte que la série (2) se réécrit

$$(3) \quad E(s,x) = \sum_{\Gamma/\Gamma \cap N} \delta(x \gamma)^{-s} .$$

Mais l'opérateur de LAPLACE-BELTRAMI de \mathbb{P} est l'image de l'opérateur de Casimir de G ; les séries (3) fournissent donc des fonctions propres de l'opérateur de Casimir sur l'espace $X = K \backslash G / \Gamma$, et donc aussi de l'algèbre $L^1(G, K)$ des fonctions intégrables sur G biinvariantes sous K ; c'est cette propriété qu'on va utiliser.

3. L'analyse spectrale des formes automorphes.

C'est le sujet traité dans l'article [1].

Soit G un groupe de Lie linéaire connexe, simple, et de rang un sur un corps des nombres réels. Soient $G = K.A.N$. une décomposition d'IWASAWA de G , et $\mathbb{P} = Z(A).N$ le

parabolique associé ; on se donne un sous-groupe discret Γ de G tel que le volume de $X = K \backslash G / \Gamma$ soit fini. Le groupe P opère sur N par automorphismes intérieurs ; on note le caractère de P tel que

$$\int f(p n p^{-1}) dn = \delta(p) \int f(n) dn$$

et on l'étend à l'aide de la décomposition d'IWASAWA en une fonction sur G qui vérifie $\delta(kxn) = \delta(x)$; on retrouve la fonction introduite précédemment lorsque $G = SL(2, \mathbb{R})$.

Pour simplifier cet exposé, on supposera ici que l'espace X n'a qu'une « pointe », c'est-à-dire que X est réunion d'un compact et de l'image de l'ensemble G_t formé des $X \subset G$ pour lesquels $\delta(x) < t$, mais que X n'est pas compact.

La série d'EISENSTEIN

$$(1) \quad \underline{E}(s, x) = \sum_{\Gamma / \Gamma \cap P} \delta(x \gamma)^{-s}$$

converge pour $\text{Re}(s) > 1$ d'après un théorème de GODEMENT ; mais dans ce contexte, on ne sait plus rien de son prolongement analytique ni de son équation fonctionnelle. Or on dispose de la représentation π de l'algèbre de Banach $L^1(G, K)$ des fonctions intégrables sur G bi-invariantes sous K dans l'espace $L^2(X)$; et la série (1) est une fonction propre de cette algèbre.

En effectuant la décomposition spectrale de π , on obtient l'équation fonctionnelle et le prolongement analytique de la série (1) : c'est la démarche inverse de celle suivie par SELBERG, LANGLANDS et HARISH-CHANDRA. On obtient ainsi une nouvelle démonstration des résultats suivants :

La série (1) se prolonge analytiquement au plan complexe en une fonction méromorphe (sauf peut-être au point $1/2$) dont les pôles sont indépendants de x ; elle est holomorphe dans le demi-plan $\text{Re}(s) \geq 1/2$, mis à part un nombre fini de pôles situés sur le segment $[1/2, 1]$; le « terme constant » de la série (1) étant écrit

$$(2) \quad \int_{N/N \cap \Gamma} \underline{E}(s, xn) dn = \delta(x)^s + c(s) \delta(x)^{1-s},$$

on a l'équation fonctionnelle

$$\underline{E}(s, x) = c(s) \underline{E}(1-s, x),$$

avec

$$c(\bar{s}) \overline{c(s)} = 1.$$

Lorsque $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, on a

$$c(s) = \xi(2s) / \xi(2s) ,$$

avec

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) ,$$

où $\zeta(s)$ est la fonction Zêta de RIEMANN. On voit donc la relation étroite qui existe entre les zéros de $\zeta(s)$ et les pôles des fonctions $c(s)$ et $E(z,s)$. La relation (2) fait le lien entre la fonction $c(s)$ et les «intégrales d'entrelacement».

On emploie la méthode suivante. Si $F \in C_c(G, K)$ l'opérateur $\pi(F)$ est donné par un noyau sur $L^2(X)$; on a

$$\pi(F) f(x) = \int_X F^\Gamma(x, y) f(y) dy ,$$

où

$$F^\Gamma(x, y) = \sum_{\Gamma} F(x\gamma y^{-1}) ;$$

or, dans l'ensemble $X_t = G_t / \Gamma \cap P$, le noyau F^Γ est égal, à de petits opérateurs près, au noyau

$$F^N(x, y) = \int_N F(xny^{-1}) dn ;$$

de façon précise, il existe deux espaces de Banach \underline{X} et \underline{Y} tels que l'on ait des injections continues avec images denses

$$\underline{X} \subset L^2(X) \subset \underline{Y} ,$$

de telle sorte que $F^\Gamma - F^N$ se prolonge en un opérateur compact de \underline{Y} dans \underline{X} ; mais les noyaux F^N ne forment pas une représentation lorsqu'ils opèrent dans $L^2(X_t)$. On peut les comparer aux noyaux de WIENER-HOPF sur la droite, qui associent à une fonction continue bornée H sur \mathbb{R} l'opérateur

$$W_H f(x) = \int_{x_0}^{\infty} H(x-y) f(y) dy$$

de $L^2([x_0, \infty[)$. La comparaison entre les noyaux F^N et les opérateurs de WIENER-HOPF se fait à l'aide de la transformée de HARISH-CHANDRA de F ,

$$H_F(a) = \delta(a) \int_N F(an) dn,$$

qui applique $C_c(G,K)$ dans l'espace des fonctions paires sur A , et d'un isomorphisme de A sur la droite.

Il faut donc modifier les noyaux F^N de façon à obtenir une représentation π' de $C_c(G,K)$ dans $L^2(X_t)$, sans perdre la propriété de compacité, et dont on connaisse le développement en fonctions propres. Pour l'opérateur de WIENER-HOPF, on pose

$$H_0(x,y) = H(x-y) + H(2x_0-x-y);$$

un développement en fonctions propres de H_0 est donné par les fonctions

$$E_0(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + e^{2i\lambda x_0} e^{i\lambda x};$$

le relèvement de H_0 et E_0 à X_t fournit une représentation π' avec son développement en fonctions propres $E'(\lambda, x)$ et la transformation associée

$$E'(\lambda, f) = \int_X E'(\lambda, x) f(x) dx.$$

Notons \underline{a}_c^* le dual complexe de l'algèbre de Lie de A . Dans cet espace, le spectre de $L^1(G,K)$ s'identifie à l'espace C/W , où la croix C est la réunion de l'axe réel \underline{a}^* et du segment $[i\rho, +i\rho]$ de l'axe imaginaire, et où ρ est défini par la relation $\delta(a) = e^{2\rho(\log a)}$. Lorsque $F \in C_c(G,K)$, la transformée de Gel'fand \tilde{F} de F se prolonge en une fonction entière sur \underline{a}_c^* . Notons B la bande $|\operatorname{Im} \lambda| < \rho + \varepsilon$. Pour passer de π' à π , on procède en trois étapes :

a) on montre que quel que soit l'ouvert borné U de la bande B , il existe une fonction $F \in C_c(G,K)$ telle que la résolvante

$$R'(\lambda) = [\pi'(F) - \tilde{F}(\lambda)]^{-1}$$

définie pour $\operatorname{Im}(\lambda) > 0$, lorsqu'on la regarde comme une application de $L(X,Y)$, se prolonge en une application méromorphe dans U .

b) on utilise la relation

$$R(\lambda) = R'(\lambda) [1 + T(\lambda)]^{-1}$$

entre opérateurs de $L^2(X)$, où

$$R(\lambda) = [\pi(F) - \tilde{F}(\lambda)]^{-1},$$

$$T(\lambda) = [\pi(F) - \pi'(F)] R'(\lambda).$$

Les opérateurs $T(\lambda)$ sont compacts, et une propriété des familles holomorphes de ces opérateurs, jointe aux relations précédentes, montre que la résolvante $R(\lambda)$, considérée elle aussi comme une application de $L(X, Y)$, se prolonge en une application méromorphe définie dans U , dont les pôles sont ceux de

$$G(\lambda) = [1 + T(\lambda)]^{-1}.$$

On note Δ la réunion des pôles des fonctions G , pour toutes les fonctions F considérées ; c'est un ensemble localement fini.

c) Si $\lambda \in U - \Delta$, et si $f \in \underline{X}$, on pose

$$E(\lambda, f) = E'(\lambda, G(\lambda)f).$$

La transformation $E(\lambda, f)$ est donnée par l'intégration de f contre une fonction $E(\lambda, x)$ qui ne dépend pas de la fonction f choisie en a). Les fonctions $E(\lambda, x)$ sont méromorphes dans la bande B , sans pôles sur \underline{a}^* , et la formule de TITCHMARSH-KODAIRA montre qu'elles fournissent un développement en fonctions propres du spectre continu de la représentation π ; on a même une formule d'inversion.

Puisque les fonctions $E(\lambda, x)$ et $E(-\lambda, x)$, pour $\lambda > 0$, fournissent chacune un développement en fonctions propres de π , on en déduit une relation

$$E(\lambda, x) = c(\lambda) E(-\lambda, x)$$

avec $|c(\lambda)| = 1$; la fonction c joue le rôle de la «matrice S » en théorie de la diffusion des particules élémentaires.

On obtient ainsi les résultats suivants. Ecrivons

$$\Delta_1 = \Delta \cap \underline{a}^*, \quad \Delta_2 = \Delta \cap [-i\rho, +i\rho] \quad \Delta_3 = \Delta - C.$$

Alors :

- a) les points de $\Delta \cap C = \Delta_1 \cup \Delta_2$ sont les points du spectre ponctuel de π ;
- b) les pôles des séries d'EISENSTEIN sont inclus dans l'ensemble $\Delta_2 \cup \Delta_3$, et si $\lambda \in \Delta_3$, alors $\text{Im}(\lambda) < 0$. La relation « $\lambda \in \Delta_3 \Rightarrow \text{Im} \lambda = -\rho/2$ » est l'analogie de la

conjecture de RIEMANN ; ainsi, lorsqu'on prend $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ et $\Gamma = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, les zéros de la fonction Zêta apparaissent comme des pôles de familles d'opérateurs compacts (à savoir les $G(\lambda)$).

Voici ce qu'on peut dire à propos des solutions de l'équation

$$\omega F = (|\lambda|^2 + |\rho|^2) F$$

lorsque $F \in L^2_{\text{loc}}(X)$ et $\lambda \in B$ (la valeur absolue sur \mathfrak{a}_c^* est celle qui est définie par la forme de Killing) :

a) Si $\lambda \in \Delta$ cette équation admet un sous-espace de solutions non trivial et de dimension finie ; si $\lambda \in \Delta \cap C$ ce sont des fonctions bornées, et paraboliques de surcroît si $\lambda \in \Delta_1$.

b) Si $\lambda \notin \Delta$, l'espace des solutions de cette équation est de dimension un, engendré par la fonction $E(\lambda, x)$.

Cette dernière propriété montre que si $\rho < \text{Im } \lambda < \rho + \varepsilon$ et si on pose $2s = \rho - i\lambda$, on a

$$\underline{E}(s, x) = E(\lambda, x)$$

ce qui entraîne le prolongement analytique des séries d'EISENSTEIN (1).

4. Le point de vue des fonctions zêta.

Revenons à la série (4) du numéro 1. Si (w_1, w_2) est une base du réseau W , on peut écrire, avec des nombres a, b, c , lorsque x et y sont dans \underline{Z} ,

$$|xw_1 + yw_2|^2 = ax^2 + bxy + cy^2 = F(x, y)$$

où F est une forme quadratique définie positive ; et inversement, toute forme quadratique de ce type peut s'écrire ainsi, avec des constantes w_1 et w_2 convenables. La série (4) du numéro 1 s'écrit donc comme une fonction Zêta d'EPSTEIN

$$(1) \quad \sum' F(x, y)^{-s}$$

Cette série intervient directement dans la résolution de problèmes d'arithmétique, comme le montre par exemple la formule de CHOWLA-SELBERG. Mais elle est également reliée à deux problèmes classiques, dont l'ancêtre commun est *le problème du cercle*. Soit $r(m)$ le nombre

de solutions de l'équation $x^2 + y^2 = m$, avec x et y dans Z ; la série de DIRICHLET

$$\sum_1^{\infty} r(m)/m^s$$

(qui est égale à quatre fois la fonction Zêta du corps $\underline{Q}(i)$), s'écrit comme une fonction Zêta d'EPSTEIN (1), avec $F(x,y) = x^2 + y^2$. Ecrivons

$$N(t) = \sum_{m \leq t} r(m) = \pi t + R(t).$$

Le problème est d'estimer $R(t)$. On a à ce sujet l'évaluation de SIERPINSKI et Van Der CORPUT

$$R(t) = O(t^{1/3}).$$

Ceci dit, les problèmes auxquels je faisais allusion sont les suivants :

- *le problème des valeurs propres*. Soient U une variété compacte de dimension n et P un opérateur différentiel sur U , à coefficients C^∞ , hypoelliptique positif et de degré d . Le spectre de l'opérateur auto-adjoint que définit P dans $L^2(U)$ est discret : notons (λ_n) la suite de ses valeurs propres. La trace de la fonction Zêta de MINAKSHISUNDARAM-PLEIJEL de P est la série

$$(2) \quad \sum_n \lambda_n^{-s}.$$

Lorsqu'on prend pour U le tore $\underline{\mathbb{R}}^2/\underline{\mathbb{Z}}^2$, et pour P l'opérateur

$$(-1/(4\pi^2)) \left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

on retrouve la série (2) précédente. De façon générale, si P est elliptique, le nombre $N(t)$ de valeurs propres $\leq t$ satisfait à l'estimation de WEYL :

$$(3) \quad N(t) = t^{n/d} + O(t^{(n-1)/d}).$$

- *l'équation de MAHLER*. Soit F une forme binaire irréductible sur \underline{Q} de degré $d \geq 3$, et $M = (p_1, \dots, p_k)$ un ensemble fini de nombres premiers. On note $\underline{\mathbb{Z}}^2(M)$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \underline{\mathbb{Z}}^2$ tels que $(x,y,p) = 1$ pour tout $p \in M$. MAHLER a démontré en 1933 que le nombre $\chi(m)$ de multiplats $(x,y, u_1, \dots, u_k) \in \underline{\mathbb{Z}}^2(M) \times \underline{\mathbb{N}}^k$ tels que

$$F(x,y) = \prod_{p \in M} p_1^{u_1} \dots p_k^{u_k}$$

où $(m,p) = 1$ pour $p \in M$, est fini. En posant

$$F_M(x,y) = |F(x,y)|_0 \prod_{p \in M} |F(x,y)|_p,$$

où $|x|_p$ est la valeur absolue p -adique d'un $x \in \mathbb{Q}$, on a

$$v(m) = \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2(M) \mid F_M(x,y) = m\}.$$

MAHLER a donné une formule asymptotique pour

$$N(t) = \sum_{\substack{m < t \\ (m,p) = 1}} v(m) = \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2(M) \mid F_M(x,y) \leq t\}$$

ce qui lui a permis de prolonger la fonction

$$Z_M(s,F) = \sum_{\mathbb{Z}^2(M)} F_M(x,y)^{-s}$$

qui converge pour $\text{Re}(s) > 2/d$, jusqu'à la droite $\text{Re}(s) > 1/(d-1)$.

Dans l'article [2], on se place dans les hypothèses suivantes. Soit M un ensemble fini de nombres premiers, et F un polynôme à n variables quasi-homogène, c'est-à-dire vérifiant la relation

$$F(T_1^{k_1} X_1, \dots, T_n^{k_n} X_n) = T^k F(X_1, \dots, X_n).$$

On suppose que F est anisotrope sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Q}_p pour tout $p \in M$, et on pose

$$F_M(x) = |F(x)|_0 \prod_{p \in M} |F(x)|_p$$

pour $x \in \mathbb{Q}^n$. Alors la série

$$(4) \quad Z_M(s,F) = \sum_{\mathbb{Z}^n(M)} F_M(x)^{-s}$$

converge pour $\text{Re}(s) > \kappa = (k_1 + \dots + k_n)/k$, et se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe avec un unique pôle en $s = \kappa$.

On obtient ce résultat par la méthode de RIEMANN en passant de la fonction Zêta

à la *série thêta*

$$(5) \quad \theta_M(t, F) = \sum_{x \in \underline{Z}^n(M)} \exp(-tF_M(x))$$

par une transformation de Mellin. La série (5) admet le développement limité à l'origine

$$(6) \quad \theta_M(t, F) = \kappa t^{-\kappa} V_M + o(t^N)$$

où N est un entier quelconque, avec une constante V_M convenable. Enfin, dans l'article [3] on montre que la fonction

$$N_M(t) = \# \{x \in \underline{Z}^n(M) \mid F_S(x) \leq t\}$$

admet le développement asymptotique

$$(7) \quad N_M(t) = V_M t^{n/d} + o(t^{(n-\theta)/d}),$$

avec $\theta > 1$. La constante V_M est définie comme suit :

on pose

$$V_0 = \int_{F(x) < 1} dx,$$

et si $p \in M$,

$$V_p = \int_{\|x\|_p = 1} |F(x)|^{n/d} dx;$$

alors

$$V_M = V_0 \prod_{p \in M} V_p.$$

Lorsque $M = \emptyset$, la série (4) est la fonction Zêta de l'opérateur semi-elliptique

$P\left(\frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x}\right)$, et la série (5) la solution fondamentale de l'équation de la chaleur correspondante.

La formule (7) est dans ce cas un analogue amélioré de l'estimation de WEYL (3).

Ces résultats s'appliquent aussi dans le contexte suivant :

Soit $K = \underline{Q}(\zeta)$ le corps des racines q -ièmes de l'unité, où ζ est une racine primitive.

On peut prendre pour F la forme

$$F(x,y) = N_K(x^a + c \zeta y^b)$$

où a, b, c sont des entiers ; l'ensemble M doit être composé de premiers vérifiant $p \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Par exemple, si

$$F(x,y) = y^2 + x^4,$$

alors on trouve, sans prendre de places ultramétriques,

$$N(t) \sim \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{2\sqrt{2}\pi} t^{3/4};$$

on peut aussi l'appliquer avec

$$F(x,y) = x^d + y^d$$

où d est pair. Alors si par exemple $p \equiv 3 \pmod{4}$ pour $p \in M$, il vient

$$N(t) = \frac{1}{d} B\left(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\right) \prod_{p \in M} (1 - p^{-2/d} + o(t^{(2/d)-(1/d-1)})).$$

On notera la coïncidence : lorsque F est une forme biquadratique, on peut distinguer les premiers p pour lesquels F est anisotrope sur Q_p en faisant usage de la loi de réciprocité d'EISENSTEIN !

La méthode utilisée est la transformation de FOURIER adélique. Par exemple, pour démontrer la formule (7) on applique la formule de Poisson à la fonction caractéristique τ de l'ensemble $\{F_M(x) \leq t\}$ dans \underline{A}^n . La relation

$$\sum_{\underline{Q}^n} \chi(t, x) = \sum_{\underline{Q}^n} \hat{\tau}(t, \xi)$$

se réécrit

$$(8) \quad N(t) = V_M t^{n/d} + \sum_{\xi \neq 0} \hat{\tau}(t, \xi)$$

avec

$$\hat{\tau}(t, \xi) = \int_{F(\xi) \leq t} \exp(-2i\pi \langle x, \xi \rangle) dx$$

lorsque $M = \emptyset$. Par exemple, dans le problème du cercle, on a, en notant J_1 la fonction de BESSEL usuelle,

$$\hat{t}(t, \xi) = |\xi|^{-1} \sqrt{t} J_1(2\pi |\xi| t),$$

et la formule (8) n'est autre que la formule de VORONOI (utilisée par HARDY et LANDAU). En fait, ces calculs sont formels et il faut régulariser convenablement.

La fonction

$$(9) \quad I(\xi) = \int_{F(x)=1} \exp(-2i \langle x, \xi \rangle) d\sigma(x),$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface vérifiant $d\sigma \wedge dF = dx$, satisfait à une estimation du type

$$I(\xi) \ll \|\xi\|^{-\alpha}$$

lorsque ξ tend vers l'infini. La constante α dépend de la géométrie de l'hypersurface $F = 1$;

on sait que l'on a toujours $\alpha > 0$, et si l'hypersurface en question est convexe, on a

$\alpha = \frac{n-1}{2}$. La fonction $I(\xi)$ est à peu de choses près la dérivée de $\hat{t}(t, \xi)$; la relation

(8) implique alors (7) avec $\theta = n/(n-\alpha)$. Dans le cas convexe, on retrouve dans ce cadre

l'estimation de SIERPINSKI - Van der CORPUT.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LACHAUD, G., Analyse spectrale des formes automorphes et séries d'Eisenstein, *Inventiones Math.*, 46, 39-79 (1978).
- [2] LACHAUD, G., Le prolongement analytique d'un type de fonctions Zêta généralisées, *Astérisque* 61, 109-119 (1979).
- [3] LACHAUD, G., Variations sur un thème de Mahler, *Inventiones Math.*, 52, 149-162 (1979).
- [4] WEIL, A., Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker, (*Ergebnisse d. Mathematik Bd. 88*), Heidelberg, Springer, 1976.

On trouvera également dans ces articles des références bibliographiques complètes sur les sujets abordés ici.

(48, rue Monsieur le Prince, 75006 - PARIS)