ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. ACQUAVIVA

Mesures aléatoires localement finies

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, nº 20 (1982), p. 25-40

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_25_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MESURES ALEATOIRES LOCALEMENT FINIES

A. ACQUAVIVA

Faculté des Sciences et Techniques de BREST

RESUME :

Soit X un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathbb{B}$. On note $\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B})$ l'ensemble des mesures localement finies c'est-à-dire finies au voisinage de tout point. On étudie dans cet article la topologie faible de $\mathcal{M}_e$, ses parties compactes et on étend les théorèmes classiques de convergence des mesures aléatoires.

INTRODUCTION :

On trouve dans la littérature de nombreux résultats sur les espaces de mesures finies ainsi que finies à distance finie sur les espaces métriques ([4], [3] et [5] pour les mesures signées, par exemple). L'ensemble $\mathcal{M}_e$ des mesures localement finies est apparu lors de l'étude des mesures aléatoires. On sait en effet construire une loi sur $(\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B}), \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ où $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$ est la tribu sur $\mathcal{M}_e$ engendrée par les applica- $\{\omega(B)\ B \in \mathbb{B}\}$ dont les distributions marginales sont fixées à l'avance et ce dans le cas où X est polonais (en fait, même si X est Souslinien régulier). On sait également que toute loi sur $(\mathcal{M}_e, \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ est tendue ce qui justifie l'intérêt pour les parties compactes. Le problème de la convergence des lois sur $\mathcal{M}_e$ est enfin étudié à l'aide de la fonctionnelle génératrice de probabilité

$$\phi(f) = \int_{\mathcal{M}_e} e^{-\int f d\omega} P(d\omega)$$

I Soit donc X espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathbb{B}$. On note $\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B})$ l'ensemble des mesures sur $(X,\mathbb{B})$ telles que pour tout ω de $\mathcal{M}_e$ et tout x de X il existe une boule ouverte de centre x et de rayon r (r dépendant de x et de ω) telle que $\omega(B(x,r)) < \infty$.

On pose alors $R(x,\omega) = \operatorname{Sup}\{r : \omega(B(x,r)) < \infty\}$ et pour $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_e$

$R(x,\mathcal{D}) = \operatorname{Sup}_r\{r>0 : \operatorname{Sup}_{\omega\in\mathcal{D}} \omega(B(x,r) < \infty\}$ si $\{r : \operatorname{Sup}_{\omega\in\mathcal{D}} \omega(B(x,r)) < \infty\} \neq \emptyset$ et 0 sinon.

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des réunions finies de boules ouvertes : un élément de $\mathcal{G}$ s'écrira par exemple : $A_I = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)$ ($I \subset \mathbb{N}$ I fini)

puis $\mathcal{G}_\omega = \{A_I = \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i) \in \mathcal{G} : \omega(\partial A_I) = 0\ r_i < R(x_i,\omega) \forall i \in I\}$

I <u>Définition 1</u>. a - Un ensemble $B \in \mathbb{B}$ sera dit ω-borné s'il existe $A_I \in \mathcal{G}_\omega$ tel que $B \subseteq A_I$

b - Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}_e$: un ensemble $B \in \mathbb{B}$ sera dit $\mathcal{P}$-borné si $B \subseteq \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ $I \subset \mathbb{N}$ I fini et

$0 < r_i < R(x_i, \mathcal{P})$ $\forall i \in I$

Par analogie avec la topologie des mesures finies ([8]) on introduit l définition suivante

I Définition 2. On appelle topologie faible sur $\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B})$ la topologie ayant pour sous-base la famille $V(\omega)$ définie par

$V(\omega)=\{ \nu : \nu(A_I)>\omega(A_I)-\varepsilon \quad ; \quad \nu(\bar{A}_I) <\omega(\bar{A}_I) + \varepsilon ; A_I \in \mathcal{G}_\omega$ et A_I ν-borné$\}$

Les deux lemmes suivants sont simples, donnés sans démonstration

I Lemme 1. Le filet ω_α converge faiblement vers ω si et seulement si on a les deux relations suivantes

a - Pour tout ouvert U : $\omega(U) \leqslant \varliminf_\alpha \omega_\alpha(U)$

b - Pour tout fermé F ω-borné : $\varlimsup_\alpha \omega_\alpha(F) \leqslant \omega(F)$

I Lemme 2. L'ensemble $\mathcal{M}_d$ des mesures discrètes$\{ \sum_{i \in I} c_i \delta_{x_i}$ $I \subset \mathbb{N}$ I fini $c_i \in \mathbb{Q}$ $x_i \in D$ dense dans X$\}$ est dense dans $\mathcal{M}_e$ pour la topologie faible qui est à base dénombrable.

On montre en effet que la famille $U_J(d)=\{\nu:\nu(A_J) >d(A_J)-\varepsilon ; \nu(\bar{A}_J) <d(\bar{A}_J)+\varepsilon ; A_J \nu\text{-borné}$ avec $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ $d \in \mathcal{M}_d$ et où les A_J sont des réunions finies de boules ouvertes à rayons rationnels et centrés appartenant à D, est une sous-base dénombrable génératrice pour la topologie faible. $V(\omega)$ est une base de voisinage de ω .

I Lemme 3. La topologie faible est métrisable.

Preuve : Il est clair que la topologie faible est séparée ; étant à base dénombrable il suffit de montrer la régularité ou ce qui est équivalent, l'existence d'une base de voisinage de ω constitué d'ensembles fermés (cf [8])

soit $V(\omega) = \{\nu : \nu(A) > \omega(A)-\varepsilon ; \nu(\bar{A}) < \omega(\bar{A})+\varepsilon ; A\ \nu\text{-borné}\}$ $A=\bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i) \in \mathcal{G}_\omega$

et donc $r_i < R(x_i,\omega)$. Les rayons de continuité (c'est-à-dire les r tels que $(\omega(\partial B(x,r)) = 0)$ sont denses sur $]0,R(x_i,\omega)[$, on peut donc en gardant les centres trouver A_0 et $A_1 \in \mathcal{G}_\omega$ tels

que $A_0 \subset A \subset \bar{A} \subset A_1$ avec $\omega(A) - \omega(A_0) < \delta$ et $\omega(A_1) - \omega(\bar{A}) < \delta$ et $\delta < \varepsilon/2$

Soit $W(\omega) =\{\nu : \omega(A_i) -\varepsilon/2 < \nu(A_i) \leqslant \nu(\bar{A}_i) < \omega(\bar{A}_i) + \varepsilon/2 \quad i = 0,1$

A_1 ν-borné $\}$

Soit $\nu \in \overline{W}(\omega)$. La topologie étant à base dénombrable on peut se ramener aux suites : Soit donc $\nu_k \in W(\omega)$ telle que ν_k converge vers ν .

$$\nu(A_1) \leqslant \frac{\lim}{k} \nu_k(A_1) < \omega(A_1) + \varepsilon/2 < \infty$$

on peut donc trouver, par densité des rayons, B_0 et $B_1 \in \mathcal{G}_\nu$ tels que

$A_0 \subset B_0 \subset A \subset \bar{A} \subset B_1 \subset A_1$

on a alors : $\omega(A) - \varepsilon < \omega(A_0) + \delta - \varepsilon < \frac{\lim}{k} \nu_k(A_0) \leqslant \lim_k \nu_k(B_0) = \nu(B_0) \leqslant \nu(A)$

et $\nu(\bar{A}) \leqslant \nu(B_1) = \lim_k \nu_k(B_1) \leqslant \overline{\lim_k} \nu_k(\bar{A}_1) \leqslant \omega(A_1) + \varepsilon/2 < \omega(\bar{A}) + \delta + \frac{\varepsilon}{2}$

$< \omega(A) + \varepsilon$

d'où le lemme.

Cependant une expression simple de la métrique n'apparaît pas contrairement au cas des mesures finies à distance finie où Harris ([4]) a défini une extension de la distance de Levy-Prohorov. Nous verrons enfin au paragraphe III la relation entre la tribu borélienne engendrée par la topologie faible et la tribu $\mathcal{Z}_B$.

II Ensembles relativement compacts de $\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B})$.

Nous montrons dans cette partie, ou nous supposons de plus que X est complet, qu'un sous-ensemble de $\mathcal{M}_e$ est relativement compact si et seulement si il est localement relativement compact*. Nous utiliserons, à cette fin, la définition de la compacité relative en terme de filets pour pouvoir utiliser la notion de filet universel ([2], [9]) ; un filet $\varphi(\alpha)$ sur un espace $\mathfrak{X}$ est universel si pour toute partie A de $\mathfrak{X}$ on a $\varphi(\alpha) \in A$ ou $\varphi(\alpha) \in \complement A$ (pour tout α à partir d'un certain rang). Dans un espace topologique régulier une partie A est relativement compacte si et seulement si tout filet admet un sous-filet convergeant ou si tout filet universel converge. Si $Y \subseteq X$ on note $\mathcal{M}_b(Y, Y \cap \mathbb{B})$ l'ensemble des mesures bornées définies sur $(Y, Y \cap \mathbb{B})$ et on utilisera le résultat classique de Prohorov suivant lequel un ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}(Y, Y \cap \mathbb{B})$ est relativement compact si et seulement si pour tout ε, il existe un compact K_ε de Y tel que $\sup_{\mu \in \mathcal{N}} \mu(Y - K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ Avec les notations de la partie précédente (déf. I -1) on peut énoncer la proposition suivante

I Pro osition 1 Soit un sous-ensemble $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B})$ relativement compact alors :

a - Pour tout x de X : $R(x, \mathcal{P}) > 0$

b - Pour tout fermé F $\mathcal{P}$-borné $\mathcal{P}_F = \{\omega_{|F}$ restriction de $\omega \in \mathcal{P}$

* et satisfaisant certaines conditions

à F $\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{M}_b(F, F\cap\mathbb{B})$

Preuve.

a - Soit $x \in X$ et supposons que $R(x,\mathcal{P}) = 0$. Il existe alors une suite ω_n d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\omega_n[B(x,\frac{1}{n})] > n$.
$\mathcal{P}$ étant relativement compacte on peut extraire une sous-suite, notée encore ω_n, convergente vers $\omega \in \mathcal{M}_\ell$. Si r est tel que $\omega(B(x,r)) < \infty$ et $\omega(\partial B(x,r)) = 0$ alors $\omega_n(B(x,r))$ converge vers $\omega(B(x,r))$ ce qui implique $\omega_n(B(x,r)) < \infty$ pour tout n à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

b - Soit F un fermé $\mathcal{P}$-borné : il en existe de non triviaux d'après ce qui précède. On a donc, par définition $\mathcal{P}_F \subset \mathcal{M}_b(F, F\cap\mathbb{B})$. Soit alors $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_{\alpha|F}$ un filet sur $\mathcal{P}_F$ et montrons qu'il contient un sous-filet convergent. Puisque ω_α est un filet sur $\mathcal{P}$ il existe un sous-filet universel, noté ω_{α_β} et qui converge vers $\omega \in \mathcal{M}_\ell$.
Par hypothèse on a $F \subset U = \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ avec $0<r_i<R(x_i,\mathcal{P})$. Choisissons ε_i tel que $r_i + \varepsilon_i < R(x_i,\mathcal{P})$ l'ouvert $V = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i+\varepsilon_i)$ est encore $\mathcal{P}$-borné et la convergence de ω_{α_β} vers ω implique $\omega(V) < \infty$. La densité des rayons de continuité pour les mesures bornées implique qu'il existe $G \in \mathcal{G}_\omega$ tel que $F \subset U \subset G \subset \bar{G} \subset V$ et donc $\lim_\beta \omega_{\alpha_\beta}(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$ d'où $\omega_{\alpha_\beta|\bar{G}}$ converge vers $\omega|\bar{G}$ dans $\mathcal{M}_b(\bar{G}, \bar{G}\cap\mathbb{B})$. Il existe alors un compact K_ε de $\bar{G}$ tel que
$\forall_\beta : \omega_{\alpha_\beta}(\bar{G} - K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et donc, en posant $K_{o,\varepsilon} = K_\varepsilon \cap F$
$\forall_\beta : \omega_{\alpha_\beta}(F - K_{o,\varepsilon}) \leq \varepsilon$.

Plaçons-nous sur $\mathcal{M}_b(F, F\cap\mathbb{B})$: $\tilde{\omega}_{\alpha_\beta}$ est encore un filet universel sur $\mathcal{P}_F$ et par conséquent si $\sup_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(B) < \infty$ $(B \in F\cap\mathbb{B})$ alors $\lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(B)$ existe et est finie. Sur la famille $\mathcal{U}_F$ des ouverts de F on peut définir une fonction d'ensemble λ en posant $\lambda(u) = \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u)$: λ est monotone fortement additive et finie donc d'après Topsöe ([9]) il existe une plus grande mesure t-régulière, notée δ_F, telle que

$\delta_F(u) \leq \lambda(u)$ pour tout u de $\mathcal{U}_F$, δ_F étant définie par $\delta_F(B) = \sup_{K \subset B} \inf_{U \supset K} \lambda(u)$ pour $B \in F \cap \mathbb{B}$. Il reste à voir que le sous filet $\tilde{\omega}_{\alpha_F}$ converge vers δ_F dans $\mathcal{M}_b(F, F \cap \mathbb{B})$.

Par construction on a $\delta_F(u) \leq \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u)$ pour tout ouvert u de F et donc en particulier $\delta_F(F) \leq \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(F)$ mais

$\lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(F) \leq \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(K_{o,\varepsilon}) + \varepsilon \leq \inf_{u \supset K_{o,\varepsilon}} \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u) + \varepsilon$

$\leq \sup_{K \subset F} \inf_{U \supset K} \lambda(u) + \varepsilon \leq \delta(F) + \varepsilon$ et ce pour tout ε donc, à la limite on a : $\lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(F) = \delta_F(F)$ ce qui avec $\delta_F(u) \leq \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u)$ $\forall u \in \mathcal{U}_F$ équivaut à la convergence de $\tilde{\omega}_{\alpha_\beta}$ vers δ_F dans $\mathcal{M}_b(F, F \cap \mathbb{B})$.

Une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}_\ell$ possédant les deux propriétés de l'énoncé sera dite localement relativement compacte. Introduisons la notion suivante : une boule ouverte $B(x,r)$ sera dite de continuité pour le filet $\{\omega_\alpha\}$ si on a :

$$\lim_{r' \downarrow r} \underline{\lim}_\alpha \omega_\alpha [B(x,r')] = \lim_{r'' \uparrow r} \overline{\lim}_\alpha \omega_\alpha [\bar{B}(x,r'')] \text{ et } 0 < r < R(x;\{\omega_\alpha\})$$

Son appellation est justifiée par le fait que, quelque soit $\{\omega_{\alpha_\beta}\}$ sous-filet universel convergeant vers une limite ω, $B(x,r)$ est une boule de continuité pour ω (c'est-à-dire $\omega(\partial B) = 0$). Il est simple de voir que pour tout filet $\{\omega_\alpha\}$ extrait de $\mathcal{P}$ relativement compact, pour toute boule $B(x,r)$ $\mathcal{P}$-bornée il existe une sous-boule $B(x,r')$ de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$; il suffit pour cela de prendre $B(x,r')$ boule de $\mathcal{G}_\omega$ de continuité pour la limite ω d'un sous-filet universel. Dans le cas où $\mathcal{P}$ est relativement compact on peut donc construire un recouvrement de X de voisinage fini (X paracompact) par des boules $B_i = B(x_i, r_i)$ qui soient $\mathcal{P}$-bornées et de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$: la partition associée $\{A_i = B_i - \bigcup_{j<i} B_j\}$ sera dite alors partition de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$ et si $\{\omega_{\alpha_\beta}\}$ est un sous-filet universel et donc convergeant vers ω les boules B_i étant de continuité pour ω on a $\omega(\partial B_i) = 0$ pour tout i et donc aussi $\omega(\partial A_i) = 0$. Si $u \in \mathcal{G}_\omega$ on peut donc écrire :

$$\underline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha(\bar{u}) \leqslant \lim_{\beta}\ \omega_{\alpha_\beta}(\bar{u}) = \omega(\bar{u}) = \sum_i \omega(\bar{u}\cap A_i) = \sum_i \lim_{\beta}\ \omega_{\alpha_\beta}(\bar{u}\cap A_i) \leqslant \sum_i \overline{\lim_{\alpha}}\ \omega_\alpha(\bar{u}\cap A_i) \leqslant \omega(\bar{u}) < \infty$$

Toutes les conditions nécessaires sont maintenant réunies et nous allons montrer qu'elles sont aussi suffisantes. Dans ce qui suit on pose $\mathcal{U}_\varepsilon = \{x : d(x,u) < \varepsilon\}$ où d est une métrique pour la topologie de X. Avec les notations ainsi introduites, on a :

II <u>Proposition 2</u> Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{M}_\ell$ localement relativement compacte satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a- Pour tout filet $\{\omega_\alpha\}$ extrait de $\mathcal{P}$, toute boule ouverte $\mathcal{P}$-bornée possède une sous-boule ouverte de même centre et de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$

b- Pour toute partition de continuité $\{A_i\ i \in N\}$ pour $\{\omega_\alpha\}$ (~~qui soit de voisinage fini~~) et pour tout ouvert u de $\mathcal{G}$ tel qu'il existe ε vérifiant $\sum_i \overline{\lim_{\alpha}}\ \omega_\alpha\ (u_\varepsilon \cap A_i) < \infty$ on ait $\underline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha\ (\bar{u}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lim_{\alpha}}\ \omega_\alpha\ (\bar{u}\cap A_i)$ alors $\mathcal{P}$ est relativement compacte pour la topologie faible de $\mathcal{M}_\ell$

<u>Preuve</u> Soit $\{\omega_\alpha\}$ un filet extrait de $\mathcal{P}$ que l'on peut supposer être universel. $\mathcal{P}$ étant localement relativement compacte $\omega_{\alpha|\bar{A}_i}$ converge vers $\delta_{\bar{A}_i}$ dans $\mathcal{M}_b(\bar{A}_i, \bar{A}_i \cap \mathcal{B})$. Si $r' > r_i^*$ on a $\bar{A}_i \subset B(x_i,r') - \bigcup_{j<i} B_j \cap B_i$ donc $\delta_{\bar{A}_i}(\bar{A}_i) = \overline{\lim_{\alpha}}\ \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leqslant \lim_{\alpha}\ \omega_\alpha(B(x_i,r')) - \lim_{\alpha}\ \omega_\alpha(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i)$ en utilisant le fait que ω_α étant universel la fonction d'ensemble $\lambda(A) = \lim_{\alpha}\ \omega_\alpha\ (A)$ est additive et monotone sur l'anneau des parties $\mathcal{P}$-bornées. L'inégalité ci-dessus est vraie quelque soit r' donc se conserve à la limite et le fait que $B(x_i,r_i)$ soit de continuité

* r' étant tel que $\mathcal{B}(x_i,r')$ soit encore $\mathcal{P}$-bornée.

pour $\{\omega_\alpha\}$ implique

$$\delta_{\bar{A}_i}(\bar{A}_i) = \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim_{r''\uparrow r_i} \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{B}(x_i,r'')) - \lim_\alpha \omega_\alpha(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i)$$

$$\leq \lim_{r''\uparrow r_i} \lim_\alpha \left[\omega_\alpha(\bar{B}(x_i,r'')) - \omega_\alpha(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i)\right]$$

d'où $\lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim_{r''\uparrow r_i} \lim_\alpha \omega_\alpha\left[(\bar{B}(x_i,r'') - \bigcup_{j<i} B_j \cap \bar{B}(x_i,r'')\right]$

soit $C_{i,r''} = \bar{B}(x_i,r'') - \bigcup_{j<i} B_j \cap B(x_i,r'') = \bar{B}(x_i,r'') - \bigcup_{j<i} B_j \subset A_i \subset \bar{A}_i$

$C_{i,r''}$ est donc un fermé de $\bar{A}_i$ contenu dans A_i d'où

$\lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim_{r''\uparrow r_i} \delta_{\bar{A}_i}(\bar{B}(x_i,r'') - \bigcup_{j<i} B_j) = \delta_{\bar{A}_i}(A_i)$ et on a aussi

la majoration $\lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim_\alpha \omega_\alpha(A_i)$ puisque $C_{i,r''} \subset A_i \ \forall r''$

on a donc les égalités $\delta_{\bar{A}_i}(\bar{A}_i) = \delta_{\bar{A}_i}(A_i) = \lim_\alpha \omega_\alpha(A_i) = \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i)$ (**R**)

On peut alors poser pour tout A de B : $\omega(A) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(A \cap A_i)$ et montrons que ω_α converge vers ω dans $\mathcal{M}_e$

d'abord ω appartient à $\mathcal{M}_e$ car par hypothèse la partition est de voisinage fini : tout x possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de A_i et donc pour un tel voisinage la série ci-dessus se réduit à une somme finie.

Soit ensuite $\mathcal{U}$ appartenant à $\mathcal{G}_\omega$: il existe donc ε tel que

$\omega(\bar{u}_\varepsilon) < \infty$ et on a : $\omega(\bar{u}_\varepsilon) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u}_\varepsilon \cap A_i) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u}_\varepsilon \cap \bar{A}_i)$

et donc $\sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(u_\varepsilon \cap A_i) \leq \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u}_\varepsilon \cap \bar{A}_i) \leq \sum \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u}_\varepsilon \cap \bar{A}_i) < \infty$

on peut donc appliquer les hypothèses et écrire compte tenu des relations (**R**)

$$\omega(u) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(u \cap A_i) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(u \cap \bar{A}_i) \leq \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(u \cap \bar{A}_i) = \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(u \cap A_i)$$

$$\leq \lim \omega_\alpha(u) < \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u}) \leq \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u} \cap A_i) = \sum \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u} \cap \bar{A}_i)$$

$$\leq \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u} \cap \bar{A}_i) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u} \cap A_i) = \omega(\bar{u})$$

d'où la proposition

Le corollaire suivant donne un critère plus simple de compacité relative en montrant qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}_e$ peut - être relativement compacte si elle est suffisamment "imbriquée" dans l'ensemble des mesures finies à distance finie.

II <u>Corollaire</u> Avec les notations de la proposition précédente supposons que tout filet extrait de $\mathcal{P}$ possède la propriété suivante : il existe un sous-filet ω_{α_β} tel que pour toute boule ouverte $B = B(x,r)$ on ait :

$$\sum_i \sup_\beta \omega_{\alpha_\beta} (B \cap A_i) < \infty$$

$\mathcal{P}$ est alors relativement compacte.

<u>Preuve</u> Il s'agit simplement de voir que la condition b) de la proposition précédente est automatiquement satisfaite pour tout élément u de $\mathcal{G}$. Soit en effet $u \in \mathcal{G}$ donc contenu dans une boule ouverte $B(x,r)$ pour r assez grand et soit ω_{α_β} le sous-filet de ω_α possédant la propriété de l'énoncé. On a alors

$$\overline{\lim_\alpha}\, \omega_\alpha (\bar{u}) \leqslant \overline{\lim_\alpha}\, \omega_{\alpha_\beta} (\bar{u}) \leqslant \lim_\beta\, \omega_{\alpha_\beta} (\bar{u}) = \overline{\lim_\beta} \sum_i \omega_{\alpha_\beta} (\bar{u} \cap A_i)$$

or $\omega_{\alpha_\beta}(\bar{u} \cap A_i) \leqslant \omega_{\alpha_\beta}(B \cap A_i) \leqslant \alpha_i$ avec $\sum_i \alpha_i < \infty$ on peut donc appliquer le lemme de Fatou : $\overline{\lim_\beta} \sum_i \omega_{\alpha_\beta}(\bar{u} \cap A_i) \leqslant \sum_i \overline{\lim_\beta}\, \omega_{\alpha_\beta} (\bar{u} \cap A_i)$

$$< \sum_i \overline{\lim_\alpha}\, \omega_\alpha (\bar{u} \cap A_i)$$

d'où le corollaire.

[II <u>Convergence des mesures aléatoires localement finies</u>

Soit P une loi de probabilité sur $(\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B}), \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ où X est un espace métrique complet séparable. On considère sur X un criblage c'est-à-dire une famille dénombrable de partitions emboitées $\{A_{i,n} : \forall_n \quad X = \sum_i A_{i,n} \quad A_{i,n} = \sum_j A_{j,n+1}\}$ constituée d'ensembles mesurables de diamètre tendant vers zéro quand n augmente indéfi-

niment. Par définition de $\omega \in \mathcal{M}_e$ pour tout x de X il va exister un premier couple (i,n) pour le préordre $(i,n) \leqslant (j,m)$ si $n < m$ ou $n = m$ et $i < j$, tel que $\omega(A_{i,n}) < \infty$. On peut associer ainsi à chaque mesure ω une partition formée d'éléments du criblage la rendant σ-finie et telle que si on l'énumère sous la forme $\{A_{n,\omega}\}$ l'application de $\mathcal{M}_e$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\omega \to \omega(A_{n,\omega})$ soit mesurable [la preuve de la mesurabilité est purement technique, nous ne la donnerons pas ici].

On peut donc poser $\rho_P(A) = \int_{\mathcal{M}_e} \sum_n \frac{\omega(A_{n,\omega} \cap A)}{2^n(1+\omega(A_{n,\omega})} \, dP$ et obtenir sur $(X, \mathbb{B})$ une mesure bornée ayant la propriété suivante : $\rho_P(N) = 0$ implique $\omega(N) = 0$ P. ps.* Nous pouvons alors établir la relation entre la tribu borélienne engendrée par la topologie faible et la tribu $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$.

III <u>Lemme 1</u> | Soit P une loi de probabilité sur $(\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B}), \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ où $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$ est la tribu engendrée par les variables $\varphi_B(\omega) = \omega(B)$ pour $B \in \mathbb{B}$. Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne définie par la topologie faible. L'indice P désignant la complétion, on a

$$\mathcal{L}_{\mathbb{B}}^P = \mathcal{B}^P$$

Preuve : Il est clair que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{B}}$. Inversement, l'existence de ρ_P implique que $P\{\omega : \omega(B) > \alpha\} = P\left[\lim_i \uparrow \{\omega : \omega(K_i) > \alpha\}\right]$ où K_i compact et $\rho_P(\lim_i \uparrow K_i) = \rho_P(B)$. Or si K est compact, $\{\omega : \omega(\bar{u}) < \delta\}$ est ouvert si $u \in \mathcal{G}$ et $\{\omega : \omega(K) < \delta\} = \lim_i \{\omega(\bar{u}_i) < \delta\}$ avec $u_i \in \mathcal{G}$ implique $\varphi_K(\omega)$ est $\mathcal{B}$ mesurable et $\varphi_B(\omega)$ est $\mathcal{B}^P$ mesurable d'où le lemme.

On ne distinguera donc plus, par la suite, les deux tribus.

Introduisons les notations suivantes : $D(x,P) = \{ r \in \mathbb{R}_+ : r \neq R(x,\omega)$ pour (P) presque tout $\omega\}$ et $\mathcal{G}^P = \{u \in \mathcal{G} \; u = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \;\; \omega(\partial u) = 0$ P.ps $r_i \in D(x_i, P) \;\; \forall i \in I \;\; I$ partie finie de $\mathbb{N}\}$. Pour x fixé dans X on voit que $R(x,\omega)$ est mesurable - $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$, puisque semi-continue inférieurement

* Dans la suite, telle mesure sera appelée localement dominante

et que $\{\omega : R(x\ \omega) \in [\alpha\ \beta\ [\} = \sum_{\alpha \leqslant r < \beta} \}\omega : R(x,\omega) = r\}$ implique que $P\{R(x,\omega) = r\} = 0$ sauf pour une infinité dénombrable au plus ce qui montre que $D(x,P) = \mathbb{R}_+ - D_x$ où D_x est dénombrable. Dans ce qui suit, la définition de la convergence de P_α vers P est celle de Parthasarathy puisqu'on se place sur l'espace métrique $(\mathcal{M}_e, (X, \mathbb{B}), \mathcal{B})$

III <u>Proposition 1</u> Une condition nécessaire et suffisante pour que $P_\alpha \Rightarrow P$ est que la loi du vecteur $(\omega(u_1)\ldots\omega(u_k))$ pour P_α converge vers la loi pour P sur $\mathbb{R}_+^k$, où chaque u_i appartient à $\mathcal{J}^P$.

<u>Preuve</u> : Supposons d'abord que P_α converge vers P et montrons que $P_\alpha\ \{\omega : \omega(\bar{u}_i) < a_i\ \ i=1\ldots k\}$ converge vers $P\{\omega : \omega(\bar{u}_i) < a_i\ \ i=1\ldots k\}$ pour des a_i de $P\text{-}\omega(u_i)$ continuité c'est-à-dire $P\{\omega(\bar{u}_i) = a_i\} = 0$ et pour des éléments u_i appartenant à $\mathcal{J}^P$. D'après la définition, il existe $N_1 \ldots N_k$ négligeables, tels que pour tout $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{k} N_i = N$ on ait $R(x_j,\omega) \neq r_j$ pour tous les centres et tous les rayons correspondants intervenant dans la définition des u_i. Soit l'ouvert $A = \{\omega : \omega(\bar{u}_i) < a_i\ \ i=1\ldots k\}$ et considérons ω_o appartenant à $\bar{A} - N$: Si $\omega_o(u_i) = \infty$ il existerait $K_i \subset u_i$ tel que $\omega_o(K_i) > a_i$ et donc aussi $\omega_o(G_i) > a_i$ ou $G_i \in \mathcal{G}_{\omega_o}$ et $K_i \subset G_i \subset u_i$; or il existe $\omega_\alpha \in A$ et $\omega_\alpha \Rightarrow \omega_o$ donc $\omega_o(G_i) \leqslant \varliminf_\alpha \omega_\alpha(G_i) \leqslant a_i$ ce qui est contradictoire. Donc $\omega_o(u_i) < \infty$ et $\omega_o \notin N$ implique $u_i \in \mathcal{G}_{\omega_o}$ et donc $\omega_o(\bar{u}_i) = \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u}_i) \leqslant a_i$.

d'où $\bar{A} - N \subset \{\omega : \omega(\bar{u}_i) \leqslant a_i\ \ i=1\ldots k\}$ et par définition

Ceci implique $P[\partial A] = 0$ et donc $P_\alpha(A) \to P(A)$,

inversement, à l'aide de la mesure bornée ρ_P on construit une sous-famille de $\mathcal{J}^P$. Soit en effet une boule $B(x,r)$ fixée et

$r_1 < r < r_2$: on a $\rho_P(\partial B(x,s)) = 0$ pour tout $s \in]r_1, r_2[- D_x$ qui est dénombrable ce qui, associé à la propriété de densité de $D(x,P)$ permet d'approcher tout élément $u \in \mathcal{G}$ par deux suites $u_{i,1} \underset{i}{\uparrow} u$ et $u_{i,2} \underset{i}{\downarrow} u$ éléments de $\mathcal{G}^P$. Il s'en suit que la famille $\{ \omega : |d(u) - \omega(u)| < \alpha \}$ où les éléments u sont dans $\mathcal{G}^P$ et $d \in \mathcal{M}_d$ avec des α tels que $\alpha + d(u)$ soit point de P - continuité pour $\omega(u)$ (de tels points sont denses dans $\mathbb{R}_+$) forme une sous-base que l'on peut prendre dénombrable de la topologie faible de $\mathcal{M}_e$.

Si u est un ouvert de $\mathcal{M}_e$ on a donc $P(u) = \lim_n \uparrow P(\bigcup_{i=1}^n u_i)$

et $P(\bigcup_{i=1}^n u_i) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{j_1 \dots j_n \subset [1,..i]} P[u_{j_1} \cap \dots \cap u_{j_i}]$

où les u_i appartiennent à la sous-base définie ci-dessus ce qui implique, par hypothèse, que $P_\alpha [u_{j_1} \cap \dots \cap u_{j_i}] \to P[u_{j_1} \cap \dots \cap u_{j_i}]$

d'où $P(u) \leqslant \underline{\lim}_\alpha P_\alpha(u)$ ce qui achève la preuve

Cette proposition étant les résultats connus dans le cadre de mesures finies à distance finie (cf. [3] et [6]). Nous aurons néanmoins besoin d'une propriété supplémentaire de la suite P_n pour pouvoir caractériser simplement sa convergence. On sait qu'il existe une mesure bornée $\mathcal{P}_n$ localement dominante pour la suite P_n donc qu'il existe une suite de compact $K_i \uparrow F$ pour tout fermé F $\mathcal{G}$-borné telle que $P_n \{(F-\lim \uparrow K_i)\} = 0$ pour tout n. On introduit donc la propriété suivante : la convergence est uniforme c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon \ \exists K_\varepsilon : P_n \{ \omega(F-K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ pour tout F $\mathcal{G}$- borné et $\forall n$.

III Lemme 1 : Soit P_n une suite satisfaisant à la condition ci-dessus et convergente vers P : on a les inégalités suivantes

$$a - \overline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(u_i)} dP_n \leqslant \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(u_i)} dP$$

$$\forall \ s_i \in R_+ \quad \text{et} \quad u_i \quad \text{ouverts} \quad i=1 \dots k$$

$$b - \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(F_i)} dP \leq \lim_n \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(F_i)} dP_n$$

$$\forall\, s_i \in R_+ \quad \text{et} \quad F_i \quad \text{fermés}, \ \mathcal{G}\text{-bornés}$$

<u>preuve</u> : a - Un ouvert est limite croissante d'éléments de $\mathcal{G}^P$ et l'inégalité provient directement de la proposition précédente.

b - Supposons d'abord que les F_i soient compacts : alors $F_i = \lim_j \downarrow u_{i,j}$ ou $u_{i,j} \in \mathcal{G}^P$ et les éléments de $\mathcal{M}_\ell$ étant localement finis il découle des définitions que $\omega(u_{i,j}) \downarrow \omega(F_i)$; il suffit alors de réappliquer la proposition précédente.

Soit maintenant F_i fermés $\mathcal{G}$-bornés : l'hypothèse faite sur la suite P_n implique que

$$I_n(F - K_\varepsilon) = \int (1 - e^{-\omega(F-K_\varepsilon)})\, dP_n \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

La fonction d'ensemble I_n est monotone sous-additive, donc

$I_n(F) - I_n(K_\varepsilon) \leq I_n(F-K_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \forall\, n$ et donc pour tout fermé F : $I_n(F) - I_n(F \cap K_\varepsilon) \leq \varepsilon \forall n$. Choisissons $K_i \subset F_i$ tel que $\forall n$ $I_n(F_i) - I_n(K_i) < \frac{\varepsilon}{k}$ donc

$$\int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(F_i)} dP \leq \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(K_i)} dP \leq \lim_n \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(K_i)} dP_n$$

et $$\int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(K_i)} dP_n \leq \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(F_i)} dP_n + \varepsilon$$

d'où le lemme en faisant tendre ε vers zéro.

Nous pouvons alors énoncer le résultat principal, en notant $\mathcal{C}_1(\mathcal{G})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur X à valeurs dans $[0,1]$ et à support $\mathcal{G}$-bornés.

III <u>Proposition 2</u> Soit P_n une suite de probabilités sur $(\mathcal{M}_\ell, \mathcal{B})$ telle que $\forall \varepsilon\ \exists\, K_\varepsilon$: $P_n\{\omega(F-K_\varepsilon) \leq \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ pour tout n et tout fermé F $\mathcal{G}$-borné. Une condition nécessaire et suffisante pour que P_n converge vers P

et que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_1(\mathcal{G})$

$$\phi_n(f) = \int e^{-\int f d\omega} dP_n(\omega) \to \int e^{-\int f d\omega} dP = \phi(f)$$

Preuve :

Si $P_n \Rightarrow P$: Pour f appartenant à $\mathcal{C}_1(\mathcal{G})$ il existe $f_k \leq f \leq g_k$ où f_k et g_k sont deux suites de fonctions étagées telles que $f_k \uparrow f$ $g_k \downarrow f$. Soit F fermé, support de f* et K compact tel que $P_n\{\omega(F-K)<\varepsilon\} > 1-\varepsilon$ $\forall n$

Soit $g_k = \sum_{i=1}^{N_k} C_i^k \mathbb{1}_{\{C_{i-1}^k \leq f < C_i^k\}}$ les points C_i^k de la subdivision de $[0,1]$ étant pris comme points de continuités pour la mesure bornée $\mathcal{L}_P f^{-1}$ ce qui implique par définition que P.ps

$$\omega\{x : f(x) = C_i^k\} = 0 \quad \forall (i,k)$$

d'où $\int e^{-\int f d\omega} dP \leq \varepsilon + \int_{\{\omega(F-K)\leq\varepsilon\}} e^{-\int f d\omega} dP \leq \varepsilon + \lim_k \int_{\{\omega(F-K)\leq\varepsilon\}} e^{-\int g_k d\omega} dP$ car si $\omega \in \{\omega(F-K)\leq\varepsilon\}$: $\int g_k d\omega \downarrow \int f d\omega$

donc $\int e^{-\int f d\omega} dP \leq \int e^{-\sum_{i=1}^{N_k} C_i^k \omega\{C_{i-1}^k \leq f \leq C_i^k\}} dP + 2\varepsilon$ pour $k \geq K$

et $\{C_{i-1}^k \leq f \leq C_i^k\}$ fermés $\mathcal{G}$-bornés implique d'après le lemme précédent :

$$\int e^{-\int f d\omega} \leq \lim_n \int e^{-\int g_k d\omega} dP_n + \varepsilon \leq \lim_n \int e^{-\int f d\omega} dP_n + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

De même on approche f par en dessous à l'aide de la suite f_k en remarquant que d'après le choix des C_i^k on a

$\int f_k \, d\omega = \sum_{i=1}^{N_k} C_{i-1}^k \, \omega\{C_{i-1}^k < f < C_i^k\}$ (P. ps) et on applique l'inéga-

* ainsi que de f_k et g_k

lité a) du lemme ce qui donne $\int e^{-\int f d\omega} dP \geq \overline{\lim_n} \int e^{-\int f d\omega} dP_n$

et donc l'égalité cherchée.

inversement : Soit $u_1 \ldots u_k$ ouverts de $\mathcal{G}^P$: Pour chaque u_i soit K_i compact et G_i élément de $\mathcal{G}^P$ tels que $K_i \subset u_i \subset \overline{u}_i \subset G_i$ et $\int e^{-\omega(K_i)} dP - \int e^{-\omega(G_i)} dP < \frac{\varepsilon}{2^k}$ (l'approximation se faisant à l'aide de la mesure ρ_P). Soit f_i et g_i fonctions d' Urysohn séparant K_i de u'_i et $\overline{u}_i$ de G'_i ($f_i = 1$ sur K_i $g_i = 1$ sur $\overline{u}_i$) et $f = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i$; $g = \sum_{i=1}^{k} s_i g_i$ alors f et g appartiennent à $\mathcal{C}_1(\mathcal{G})$ et on a :

$$\int e^{-\sum_i^k s_i \omega(G_i)} dP \leq \int e^{-\int g d\omega} dP = \lim_n \int e^{-\int g d\omega} dP_n \leq \underline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(u_i)} dP_n$$

$$\leq \overline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(u_i)} dP_n \leq \lim_n \int e^{-\int f d\omega} dP_n = \int e^{-\int f d\omega} dP_n \leq \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(K_i)} dP$$

d'après le choix des K_i et G_i on a bien en passant à limite

$$\lim_n \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(u_i)} dP_n = \int e^{-\sum_{i=1}^k s_i \omega(u_i)} dP$$

ce qui équivaut d'après la proposition III 1 à la convergence de P_n vers P

Il reste à montrer la propriété d'approximation utilisée qui est spécifique aux suites et possède un intérêt intrinsèque.

III <u>Proposition 3</u> Soit P_n une suite convergeante vers P sur $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$. Pour tout fermé F $\mathcal{G}$-borné dans X et $\forall \varepsilon \exists$ K_ε compact tel que $K_\varepsilon \subset F$ et $P_n \{\omega : \omega(F-K_\varepsilon) \leq \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ pour tout n.

<u>Preuve</u> . Soit $Q = \sum_n \frac{P_n}{2^n}$ la probabilité telle que $P_n << Q \ \forall n$ et ρ_Q la mesure bornée sur $(X, \mathbb{B})$ localement dominante associée. Si $x \in X$: $\{r \in R_+ : \omega(\partial B(x,r)) = 0 \ Q.\ ps\} = \mathbb{R}_+ - L_x$ où L_x est dénombrable. De même $D(x,Q) = \mathbb{R}_+ - D_x$ où D_x est dénombrable. D'après le théorème de Baire on peut encore exhiber une suite dense dans $R_+ - (L_x \cup D_x)$. Si $T(x)$ est cette suite pour tout $r \in T(x)$ on choisit $K_i(r)$ compacts tels que $\rho_Q(\lim_i \uparrow K_i(r) = \rho_Q(B(x,r)$. En définitive on met en évidence l'existence de $N \in \mathbb{B}$ tel que $Q(N) = 0$ et $\forall \omega \notin N$ on ait $\forall x_i \in S$ dense dans X $\forall r_j \in T(x_i)$: $\omega(\partial B(x_i,r_j)=0)$

$$r_j \neq R(x_i,\omega) \quad \omega(K^{\ell}_{i,j}) \underset{\ell}{\uparrow} \omega(B(x_i,r_j))$$

On note $\mathcal{G}_o$ la sous-famille de $\mathcal{G}^P$ ainsi construite et $\mathcal{K}_o$ la famille des compacts associés.

Toutes les lois P_n et P sont tendues [1] donc d'après le théorème de Le Cam ([10] p. 282) la suite P_n est équitendue donc il existe $\mathbb{K}$ compact de $\mathcal{M}_\ell - N$ tel que $P_n(\mathbb{K}) > 1 - \varepsilon \ \forall n$

Soit alors $u \in \mathcal{G}_o$ $K_i \in \mathcal{K}_o$ tels que $\omega(K_i) \uparrow \omega(u)$ sur $\mathcal{M}_\ell - N$ il existe alors u_i ouverts $\mathbb{K}$-bornés tels que $K_i \subset u_i \subset u$ et on peut trouver $V_i \in \mathcal{G}_o$ tels que $K_i \subset v_i \subset \bar{v}_i \subset u_i \subset u$; $\bar{v}_i$ est alors un fermé $\mathbb{K}$-borné et d'après la proposition II-1 , il existe L_i compact tel que $L_i \subset \bar{V}_i$ et $\omega(\bar{V}_i - L_i) < \varepsilon$ pour tout ω de $\mathbb{K}$.

Pour $\omega \in \mathbb{K}$ et $G \in \mathcal{G}_o$ l'application $\omega \rightsquigarrow \omega(G)$ est continue car si $\omega_\alpha \Rightarrow \omega$, $\omega(G) = \infty$ implique $\lim_\alpha \omega_\alpha(G) = \infty$ et $\omega(G) < \infty$ implique par construction $G \in \mathcal{G}_\omega$ et donc $\omega_\alpha(G) \to \omega(G)$; sur le compact de $\mathcal{M}_\ell - N$, $\mathbb{K}$, on a : $e^{-\omega(u-\bar{v}_i)} \uparrow 1$ et $\omega(u - \bar{v}_i) = \omega(u) - \omega(\bar{v}_i)$ puisque $\bar{v}_i$ $\mathbb{K}$ bornés; on peut appliquer le théorème de Dini et donc

$$\int e^{-\omega(u-\bar{v}_i)} dP_n > 1 - \varepsilon \quad \forall n \quad \text{et aussi} \quad \int e^{-\omega(u-L_i)} dP_n > 1 - \varepsilon$$

ce qui implique $P\left[\omega(u-L_i) \leq \varepsilon\right] > 1 - \varepsilon$ d'où la proposition, puisque tout fermé, borné est contenu dans un élément u de $\mathcal{G}_o$

BIBLIOGRAPHIE

1 -A. ACQUAVIVA C R Acad. Sc. Paris - t 288 (12 mars 79)

2 -DUGUNDJI Topology Albyn and Bacon inc. Boston 1968

3 -M.J. GEFFROY et M. ZEBOULON : Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels CR. A.S. p. 280 série A 1975

4 -T.E. HARRIS Counting measures- monotone random set functions Wahrscheinlichtkeitstheorie verw. Geb. 10 102-119(1968)

5 -P. JACOD Convergence uniforme à distance finie de mesures signées Ann. Inst. Poincaré vol. XV n° 4 1979

6 -J.NEVEU Processus Ponctuels Seminaire St-Flour 1976

7 -K.R.PARTHASARATY Probability in Metric spaces - Academic press New York 1967

8 -F. TOPSOE Topology and measures Lectures notes n° 133 Springer Verlag

9 -F. TOPSOE Compactness in spaces of measures Studia Mathematica T.XXXVI 1970

10 -A. TORTRAT Calcul des Probabilités et introduction aux processus aléatoires Masson 1971