

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LÉONARD GALLARDO

Une transformation de Cramer sur le dual de $SU(2)$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 102-106

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_102_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE TRANSFORMATION DE CRAMER SUR LE DUAL DE SU(2)

Léonard GALLARDO

Université de NANCY I (*)

We introduce a Cramer transform for the random walks on the dual of SU(2) and we obtain a theorem of large deviations.

Nous introduisons une transformation de Cramer pour les marches aléatoires sur le dual de SU(2). Ceci nous permet d'obtenir un résultat de grandes déviations.

1. Introduction

Soit SU(2) le groupe de Lie compact des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On sait (cf. [2] ou [8]) que le dual de SU(2) (i. e. : l'ensemble des caractères normalisés) est discret et constitué par les fonctions

$$(1.1) \quad g \longmapsto \chi_x(g) = \frac{\sin [(x+1) \theta]}{(x+1) \sin \theta} \quad (x \in \mathbb{N}),$$

où $e^{\pm i\theta}$ sont les valeurs propres de la matrice $g \in \text{SU}(2)$. Les caractères χ_x vérifient en outre la formule de multiplication de Clebsch-Gordon (cf. [4]) :

$$(1.2) \quad \chi_x \chi_y = \sum_{s=0}^{x \wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)} \chi_{|x-y|+2s}, \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2.$$

Comme on a

$$(1.3) \quad \sum_{s=0}^{x \wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)} = 1,$$

la relation (1.2) permet de munir $\mathbb{N}$ (i. e. : le dual de SU(2)) d'une structure d'hypergroupe et de définir une convolution $\times$ sur l'ensemble $M^1(\mathbb{N})$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$ par :

$$(1.4) \quad \delta_x \times \delta_y = \sum_{s=0}^{x \wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)} \delta_{|x-y|+2s}$$

(*) et E.R.A. n° 839 du C.N.R.S.

et plus généralement pour deux éléments $\mu = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \delta_x$ et $\nu = \sum_{y \in \mathbb{N}} b_y \delta_y$ de $M^1(\mathbb{N})$:

$$(1.5) \quad \mu * \nu = \sum_{x, y \geq 0} a_x b_y \delta_x * \delta_y .$$

Dans [4], P. Eymard et B. Roynette considèrent cette convolution et la transformation de Fourier qui lui est naturellement associée

$\left(\hat{\mu}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \frac{\sin [(x+1) \theta]}{(x+1) \sin \theta} \text{ si } \mu = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \delta_x \in M^1(\mathbb{N}) \right)$, pour étudier la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition

$$(1.6) \quad P(x, \cdot) = (\delta_x * \mu) (\cdot) ,$$

qu'ils nomment marche aléatoire de loi μ sur le dual de $SU(2)$.

Des généralisations de la situation précédente au cas où les fonctions $\frac{\sin [(x+1) \theta]}{(x+1) \sin \theta}$ sont remplacées par certains polynômes orthogonaux ou par les fonctions sphériques définies positives d'une paire riemannienne symétrique, ont été largement développées dans [3], [4], [6] et [7] et très récemment par H. Heyer et W. R. Bloom (cf. [1]) qui reprennent ces idées dans le contexte plus abstrait des hypergroupes.

Notre seule intention dans cette note est d'apporter une illustration supplémentaire à la théorie précitée, en montrant qu'on peut définir très simplement une transformation de Cramer pour les marches aléatoires sur le dual de $SU(2)$ et obtenir ainsi une loi des grandes déviations en tout point analogue à celle des marches aléatoires classiques et que nous rappelons maintenant :

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ , centrée sur $\mathbb{R}$, telles que leur transformée de Laplace $\tilde{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu(x)$ soit finie pour t assez voisin de zéro. Pour la marche aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$, on a alors la loi des grandes déviations :

$$(1.5) \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\lambda(a)} \text{ si } a > 0$$

et

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n\lambda(a)} \text{ si } a < 0 ,$$

où $\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \log \tilde{\mu}(t)]$ est la transformée de Cramer de μ .

2. La transformation de Cramer

La fonction $\theta \mapsto \chi_x(\theta) = \frac{\sin [(x+1) \theta]}{(x+1) \sin \theta}$ est analytique pour $|\theta| < \pi$ et peut être prolongée analytiquement dans la bande du plan complexe $|\operatorname{Re} z| < \pi$. Ainsi en posant

$$(2.1) \quad \xi_x(t) = \frac{\sin [(x+1) it]}{(x+1) \sin (it)} = \frac{\operatorname{sh} [(x+1) t]}{(x+1) \operatorname{sh} t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et en prolongeant analytiquement la formule (1.2), on obtient la formule de multiplication :

$$(2.2) \quad \xi_x(t) \xi_y(t) = \sum_{s=0}^{x \wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)} \xi_{|x-y|+2s}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(2.3) DEFINITION. Soit $\mu = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \delta_x \in M^1(\mathbb{N})$. La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\tilde{\mu}(t) = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \frac{\operatorname{sh} [(x+1) t]}{(x+1) \operatorname{sh} t}$ est appelée transformée de Laplace de la probabilité μ .

On notera que $\tilde{\mu}(0) = 1$, mais $\tilde{\mu}(t)$ peut être $+\infty$ pour tout $t > 0$. Donnons maintenant quelques propriétés immédiates de la transformée de Laplace :

(2.4) PROPOSITION. a) Si $\tilde{\mu}(t_0) < +\infty$, alors $\tilde{\mu}(t) < +\infty$ pour tout $t \leq t_0$.

b) $\widetilde{\mu \times \nu}(t) = \tilde{\mu}(t) \cdot \tilde{\nu}(t)$ pour μ et ν dans $M^1(\mathbb{N})$.

DEMONSTRATION. a) Cette assertion résulte du fait que quel que soit $x \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\operatorname{sh} [(x+1) t]}{(x+1) \operatorname{sh} t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui se vérifie sans peine sur la dérivée.

b) Ce point résulte de (1.4), de la formule (2.2) et du fait que $\tilde{\delta}_x(t) = \xi_x(t)$.

(2.5) DEFINITION. La fonction λ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\lambda(x) = \sup_{t \geq 0} [tx - \log \tilde{\mu}(t)]$$

est appelée transformée de Cramer de la probabilité $\mu \in M^1(\mathbb{N})$.

On résume dans la proposition suivante quelques propriétés triviales de λ :

(2.6) PROPOSITION. a) $\lambda(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et si $\tilde{\mu}(t) = +\infty$ pour tout $t > 0$, alors $\lambda(x) \equiv 0$.

b) λ est une fonction convexe.

c) λ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}_+$.

3. Les grandes déviations

Notons S_n l'état à l'instant n de la marche aléatoire de loi μ sur $\mathbb{N}$ (i. e. de noyau de transition $P(x, \cdot) = (\delta_x \times \mu)(\cdot)$). Dans [5], nous avons montré que sous l'hypothèse où μ a un moment d'ordre 1, on a la loi des grands nombres :

$$(3.1) \quad \frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ presque sûrement quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Il est donc naturel de se poser le problème des grandes déviations, c'est-à-dire d'estimer pour $a > 0$ la probabilité $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right)$. La réponse à cette question passe par la transformation de Cramer :

(3.2) THEOREME. Soient $a > 0$, $\mu \in M^1(\mathbb{N})$ ayant une transformée de Laplace (au sens de (2.3)) finie pour t assez voisin de zéro et S_n l'état à l'instant n de la marche aléatoire (au sens de (1.6)) de loi μ partant de zéro. On a alors :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (na+1) e^{-n\lambda(a)}$$

où λ est la transformée de Cramer de μ .

DEMONSTRATION. Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\text{sh} [(x+1) t]}{(x+1) \text{sh } t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc on a

$$\begin{aligned} P(S_n \geq na) &= P\left(\frac{\text{sh} [(S_n+1) t]}{(S_n+1) \text{sh } t} \geq \frac{\text{sh} [(na+1) t]}{(na+1) \text{sh } t}\right) \\ &\leq E\left[\frac{\text{sh} [(S_n+1) t]}{(S_n+1) \text{sh } t}\right] \cdot (na+1) \frac{\text{sh } t}{\text{sh} [(na+1) t]}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. Or d'après (2.4) b), on a

$$E\left[\frac{\text{sh} [(S_n+1) t]}{(S_n+1) \text{sh } t}\right] = [\tilde{\mu}(t)]^n,$$

donc comme $\frac{\text{sh } t}{\text{sh} [(na+1) t]} \leq e^{-nat}$ pour tout $t > 0$, il en résulte que l'on a

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (na+1) e^{-n(at - \log \tilde{\mu}(t))}$$

pour tout $t > 0$ tel que $\tilde{\mu}(t) < +\infty$. Le résultat en découle puisque

$$\lambda(x) = \sup_{t: \tilde{\mu}(t) < +\infty} [tx - \log \tilde{\mu}(t)].$$

(3.3) EXEMPLE. La marche aléatoire de loi $\mu = \delta_1$ a ses probabilités de transitions données par : $P(x, x-1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)$, $P(x, x+1) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)$ et $P(x, y) = 0$ si $y \notin \{x-1, x+1\}$. Par un calcul élémentaire, on obtient dans ce cas l'évaluation explicite $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (na+1) e^{-n \operatorname{Argth} a}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLOOM W. R. et HEYER H., Probability Measures on hypergroups I. Preprint.
- [2] CLERC J. L., Les représentations des groupes compacts. CIMPA. Ecole d'été d'Analyse Harmonique. Nancy (1980).
- [3] CLERC J. L. et ROYNETTE B., Un théorème central limite. Analyse Harmonique sur les groupes de Lie II. Lecture Notes n° 739. Springer Verlag (1979), p. 122-131.
- [4] EYMARD P. et ROYNETTE B., Marches aléatoires sur le dual de $SU(2)$. Analyse Harmonique sur les groupes de Lie. Lectures Notes n° 497. Springer Verlag (1975), p. 108-152.
- [5] GALLARDO L. et RIES V., La loi des grands nombres pour les marches aléatoires sur le dual de $SU(2)$. Studia Mathematica t. 66 (1979), p. 93-105.
- [6] GEORGE C., Les chaînes de Markov associées à des polynômes orthogonaux. Thèse de Doctorat d'Etat. Nancy (1975).
- [7] GUIVARC'H Y., KEANE M. et ROYNETTE B., Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Lecture Notes n° 624. Springer Verlag (1977).
- [8] VILENKINE N. J., Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Dunod. Paris (1969).