

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. BERTHUET

Loi du logarithme itère pour certaines intégrales stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 9-18

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_9_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOI DU LOGARITHME ITERE POUR CERTAINES INTEGRALES STOCHASTIQUES

R. BERTHUET

Université de Clermont-Ferrand II

Nous remercions particulièrement M. YOR pour ses remarques, G. FOURT pour les nombreuses discussions fructueuses que nous avons eues et D. COURAGEOT pour le soin porté à la mise en page de cette note.

Etant donné un mouvement brownien $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0, on considère les processus définis par $U_t = \int_0^t X_s dY_s, V_t = \int_0^t X_s dX_s$.

On se propose d'établir un loi du logarithme itéré pour les processus $(\alpha U_t + \beta V_t)_{t \geq 0}$, α, β réels, à savoir :

$$(1) \quad l(\alpha, \beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \\ p.s.}} |\alpha U_t + \beta V_t| / t \log_2 t = |\alpha - \beta| / \text{Arc cos}(2\alpha\beta/\alpha^2 + \beta^2)$$

Ce résultat est déjà établi dans le cas :

i) $\alpha = \beta = 1$, la formule d'Itô donnant $U_t + V_t = X_t Y_t$

on a $l(1,1) = 1$ ((1) donnant le résultat par continuité).

ii) $\alpha = -\beta = 1$ on a $l(1,-1) = 2/\pi$, le processus $(U_t - V_t)_{t \geq 0}$ jouant un rôle important pour le groupe d'Heisenberg [3], [4].

La méthode suivie est celle utilisée classiquement [1] pour le Mouvement Brownien, ce qui suppose l'établissement de quatre lemmes préliminaires.

Dans toute la suite, nous poserons $Z_t = \alpha U_t + \beta V_t$.

I. Quelques remarques évidentes

1. Compte-tenu des propriétés du mouvement brownien :

$$Z_t / t \underset{\text{loi}}{=} Z_1 \quad \text{et } Z_t \text{ symétrique}$$

2. De par la définition de l'intégrale d'Itô [2], si on pose :

$$\begin{aligned} T_n &= \alpha \sum_{k=1}^{n-1} X_{k/n} (Y_{k+1/n} - Y_{k/n}) + \beta \sum_{k=1}^{n-1} Y_{k/n} (X_{k+1/n} - X_{k/n}) \\ &= \sum_{k=1}^n [\alpha X_{k-1/n} + \beta (X_1 - X_{k/n})] [Y_{k/n} - Y_{k-1/n}] \end{aligned}$$

la suite $(T_n, n \geq 1)$ converge en probabilité et donc en loi vers Z_1 .

3. Si pour tout processus $(X_t, t \geq 0)$, on pose $\theta(s, X_t) = X_{t+s} - X_s$

on a la décomposition $\theta(s, Z_t) = \theta(s, \tilde{Z}_t) + \alpha X_s \theta(s, Y_t) + \beta Y_s \theta(s, X_t)$

avec $\theta(s, \tilde{Z}_t) = \alpha \int_0^t \theta(s, X_u) d\theta(s, Y_u) + \beta \int_0^t \theta(s, Y_u) d\theta(s, X_u)$

$$\stackrel{\text{not}}{=} \alpha \theta(s, \tilde{U}_t) + \beta \theta(s, \tilde{V}_t)$$

$\theta(s, \tilde{Z}_t)$ étant indépendant de $(Z_u, u \leq s)$ et ayant même loi que Z_t .

II. Quelques remarques sur le processus $\xi_t = (X_t, Y_t, U_t, V_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^4$.

LEMME 1

$(\xi_t, t \geq 0)$ est un processus de diffusion de dérive nulle et de matrice de diffusion :

$$a(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & \text{(il possède donc la propriété de Feller} \\ & \text{et, en particulier, de Markov fort)} \end{aligned}$$

$(x = (x_1, x_2, x_3, x_4))$.

Les probabilités de transition sont telles que :

$$(2) \quad \int f(y) dP_{t+s, s}^x(y) = \int f \circ \Psi(x, y) dP_{t, 0}^0(y)$$

avec $\Psi(x, y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1 y_2, x_4 + y_4 + x_2 y_1)$.

Pour la première assertion, il suffit de remarquer que $(\xi_t, t \geq 0)$ est solu-

tion de l'équation différentiel stochastique
$$\begin{cases} d\xi_t = \sigma(\xi_t, t) dW_t \\ \xi_0 = (0). \end{cases}$$

$$\text{avec } \sigma(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \quad W_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

d'où le résultat [2] avec $a(x,t) = \sigma(x,t) \sigma^*(x,t)$.

Compte-tenu de la remarque 3, on a :

$$\theta(s, \xi_t) = \theta(s, X_t, Y_t, \tilde{U}_t, \tilde{V}_t) + (0, 0, X_s \theta(s, Y_t), Y_s \theta(s, X_t))$$

$$\text{d'où } \xi_{t+s} = \Psi(\xi_s, \theta(s, \xi_t))$$

ce qui implique, pour toute fonction f acceptable, la relation (2) ou

$$E(f(\xi_{t+s}) \mid \xi_s = x) \underset{p.s.}{=} E[f \circ \Psi(x, \theta(s, \xi_t))] = E[f \circ \Psi(x, \xi_t)].$$

LEMME 2 (lemme maximal)

$$\forall t \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \quad P(\max_{s \leq t} Z_s \geq z) = 2 P(Z_t \geq z).$$

Montrons d'abord la "propriété de l'Image".

Soit $\tau_b = \inf \{t/Z_t = b\}$, $(Z_t, t \geq 0)$ étant continu, τ_b est un t.a. relativement à celui-ci et, par conséquent, au processus $(\xi_t, t \geq 0)$.

Compte-tenu du lemme 1 : propriété de Markov fort et relation (2), on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(2b - Z_{t+\tau_b} \in B) &= \iint \mathbf{1}_{\{\alpha y_3 + \beta y_4 \in 2b-B\}} dP_{t+\tau_b, \tau_b}^x(y) dP_{\xi_{\tau_b}}(x) \\ &= \iint \mathbf{1}_{\{\alpha y_3 + \beta y_4 + \alpha x_1 y_2 + \beta x_2 y_1 \in b-B\}} dP_{t,0}^0(y) dP_{\xi_{\tau_b}}(x) \end{aligned}$$

($P_{Z_{\tau_b}}$ étant une mesure de Dirac en b).

Comme ξ_t et $\xi'_t = (-X_t, Y_t, -U_t, -V_t)$ ont même loi et que Z_t est symétrique, on a :

$$\begin{aligned} P(2b - Z_{t+\tau_b} \in B) &= \iint \mathbf{1}_{\{\alpha y_3 + \beta y_4 + \alpha x_1 y_2 + \beta x_2 y_1 \in b-B\}} dP_{t,0}^0(y) dP_{\xi_{\tau_b}}(x) \\ &= P(Z_{t+\tau_b} \in B) \quad (\text{en remontant}). \end{aligned}$$

Pour achever la preuve, il suffit de façon classique de considérer :

$$Z'_t = \begin{cases} Z_t & \text{si } t \leq \tau_b \\ 2b - Z_t & \text{si } t > \tau_b \end{cases} \quad \sigma_b = \inf \{t / Z'_t = b\} = \tau_b$$

$$\begin{aligned} P[\max_{s \leq t} Z_s \geq b] &= P[Z_t \geq b] + P[\max_{s \leq t} Z_s \geq b, Z_t < b] \\ &= P[Z_t \geq b] + P[\tau_b < t, Z_t < b] \\ &= P[Z_t \geq b] + P[\sigma_b < t, Z'_t < b] \\ &= P[Z_t \geq b] + P[\max_{s \leq t} Z_s \geq b, Z_t > b] = 2P[Z_t \geq b] \end{aligned}$$

III. Comportement asymptotique de la fonction de répartition de Z_1

LEMME 3

La fonction caractéristique φ de Z_1 est donnée par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} [\cosh^2(\frac{\alpha-\beta}{2} t) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} \sinh^2(\frac{\alpha-\beta}{2} t)]^{-1/2} & \text{si } \alpha \neq \beta \\ [1 + \alpha^2 t^2]^{-1/2} & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Compte-tenu de la remarque 2, nous allons étudier la suite $(\varphi_n, n \geq 1)$ des fonctions caractéristiques des v.a. T_n .

Les v.a. $(Y_{k/n} - Y_{k-1/n})_{1 \leq k \leq n}$ étant indépendantes et ayant même loi que $Y_{1/n}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp \left[it \sum_{k=1}^n [\alpha x_{k-1} + \beta(x_n - x_k)] y_k - \frac{n}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{2} t^2 X^N X \right] dX dY \end{aligned}$$

avec la convention $X_0 = 0$ et :

$$N = \begin{vmatrix} 2 & \bar{1} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{1} & 2 & \bar{1} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdot & 0 & \bar{1} & 2 & \bar{1} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \bar{1} & 1 \end{vmatrix}$$

correspondant à la loi de $X = (X_{k/n}, 1 \leq k \leq n)$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \psi_n(t) &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{n}{2} \left[t^T X N X + \frac{t^2}{n^2} \sum_{k=1}^n [\alpha x_{k-1} + \beta(x_n - x_k)]^2 \right] \right) dX \\ &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{n}{2} t^T M X \right) dX \end{aligned}$$

soit $1/\psi_n^2(t) = \Delta = \det(M)$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & c \\ b & a & b & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a & d \\ c & \dots & c & d & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= 2 + [(\alpha^2 + \beta^2) t^2/n^2] \\ b &= -1 - [\alpha\beta t^2/n^2] & d &= -1 - [\beta^2 t^2/n^2] \\ c &= \beta(\alpha - \beta) t^2/n^2 & e &= 1 + [(n-1)\beta^2 t^2/n^2] \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire donne en développant suivant la première ligne :

(l'indice k notant la dimension)

$$\Delta_k = a \Delta_{k-1} - b^2 \Delta_{k-2} + (-1)^{k-1} bc (E_{k-2} + F_{k-2}) - c^2 A_{k-2} \text{ avec } \Delta_0 = 1, \Delta_1 = e$$

$$E_{k-2} = b E_{k-3} + (-1)^{k-3} c A_{k-3} \quad \text{avec } E_0 = 1 \quad E_1 = d$$

$$F_{k-2} = b F_{k-3} + (-1)^{k-3} c A_{k-3} \quad \text{avec } F_0 = 1 \quad F_1 = d$$

$$A_{k-2} = a A_{k-3} - b^2 A_{k-4} \quad \text{avec } A_0 = 1 \quad A_1 = a$$

avec si A_{k-2} est la matrice obtenue en enlevant la première et dernière ligne et colonne de M_k

$$E_{k=1} = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 & c \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ c & \dots & c & d \end{pmatrix} \quad F_{k-1} = \begin{pmatrix} b & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ c & \dots & c & d \end{pmatrix}$$

En notant r_1 et r_2 les racines de $r^2 - ar + b^2$ ($r_1 > r_2$, $\alpha \neq \beta$) on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
 A_k &= (r_1^{k+1} - r_2^{k+1}) / (r_1 - r_2) \\
 E_k = F_k &= b^k \left(1 + \frac{c}{a+2b} \right) + \frac{c}{r_1 - r_2} \left[\frac{(-r_1)^{k+1}}{b+r_1} - \frac{(-r_2)^{k+1}}{b+r_2} \right] \\
 (r_1 - r_2) \Delta_k &= \lambda(r_1, r_2) r_1^k - \lambda(r_2, r_1) r_2^k + \mu(-b)^k
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \lambda(r_1, r_2) = e - r_2 - \frac{2bc}{b+r_1} \left(1 + \frac{c}{a+2b} \right) + (k-1) \frac{c^2}{r_1 - r_2} \frac{b-r_1}{b+r_1} - \frac{c^2 r_2}{(r_1 - r_2)^2} \\ \quad \times \left[\frac{b-r_1}{b+r_1} + \frac{b-r_2}{b+r_2} \right] \\ \mu = 2c \left(1 + \frac{c}{a+2b} \right) \left(\frac{r_2}{b+r_2} - \frac{r_1}{b+r_1} \right) \end{cases}$$

$$\left[\text{De } E_k = b E_{k-1} + (-1)^{k-1} c A_{k-1}, \text{ on d\'eduit} \right.$$

$$E_k = b^k - c \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j c b^{k-1-j} A_j \text{ et le r\'esultat concernant } E_k.$$

Il en est de m\^eme pour F_k .

$$\text{Pour l'\'}\text{tude de } \Delta_k, \text{ on a } \Delta_k = a \Delta_{k-1} - b^2 \Delta_{k-2} - H_{k-2}$$

$$\text{d'o\''u } \begin{pmatrix} \Delta_k \\ \Delta_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{k-1} \\ \Delta_{k-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit, avec de nouvelles notations, } V_k = A V_{k-1} - B_{k-1}$$

$$\text{d'o\''u } V_k = A^{k-1} V_1 - \sum_{j=1}^{k-1} A^{k-1-j} B_j$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} a & -b^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et le r\'esultat concernant } \Delta_k.]$$

Nous obtenons alors facilement les résultats :

$$\lambda(r_1, r_2) / (r_1 - r_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\mu / (r_1 - r_2) = -2\alpha\beta / (\alpha-\beta)^2$$

$$\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch}(\alpha-\beta)t - 2\alpha\beta] / (\alpha-\beta)^2$$

et le résultat annoncé.

Remarquons qu'en fait, nous obtenons la transformée de Fourier du couple (U_1, V_1) .

Les calculs pénibles peuvent être évités en faisant appel à la formule de PAUL-LEVY

$$E [\exp 2it(U_1 - V_1) \mid X_1 = x, Y_1 = y] = \frac{2t}{\operatorname{sh} 2t} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{2} (1 - 2t \coth 2t) \right]$$

comme nous l'a fait remarquer M. YOR [5].

LEMME 4

Si F est la fonction de répartition de Z_1 alors il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 et deux fonctions F_1 et F_2 équivalentes au voisinage de l'infini à

$$\exp(-bx / |\alpha - \beta|) \quad \text{avec } b = \operatorname{Arc} \cos (2\alpha\beta / \alpha^2 + \beta^2)$$

telles que $C_1 F_1(x) / x \leq 1 - F(x) \leq C_2 F_2(x) \quad (\alpha \neq \beta)$.

Remarquons que $\mathcal{V}$ se met sous la forme :

$$\mathcal{V}(t / \alpha - \beta) = \sqrt{1-B} / \sqrt{\operatorname{cht} - B}$$

avec $B = 2\alpha\beta / (\alpha^2 + \beta^2) \quad (|B| < 1 \quad \text{si } \alpha \neq \pm\beta)$

d'où $\Pi|\alpha-\beta|f((\alpha-\beta)x) / \sqrt{1-B} = \int_0^\infty \frac{\cos t x}{\sqrt{\operatorname{cht}-B}} dt$ où f est la densité de Z_1

En intégrant $e^{ixz} / \sqrt{\operatorname{ch} z - B}$ le long du contour :

$(z=t, 0 \leq t \leq R) \quad (z = R+iy, 0 \leq y \leq \Pi) \quad (z = t+i\Pi, 0 \leq t \leq R) \quad (z=iy, b+\epsilon \leq y \leq \Pi)$

$z = (i(b-\epsilon)e^{i\theta}), 0 \leq \theta \leq \Pi) \quad (z = iy, 0 \leq y \leq b-\epsilon)$

et, par passage aux limites $(R \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0)$, on obtient en particulier :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{\sqrt{cht-B}} dt + e^{-\Pi x} \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{\sqrt{cht+B}} dt = \int_0^b \frac{e^{-xt}}{\sqrt{cost-B}} dt$$

$$\text{d'où, on en déduit } \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{\sqrt{cht+B}} dt = \frac{1}{\text{ch} \Pi x} \int_0^{\Pi-b} \frac{\text{ch } x t}{\sqrt{cost+B}} dt .$$

$$\text{En remarquant que } \int_0^{\Pi-b} \frac{dt}{\sqrt{B+cost}} = K < +\infty$$

on en déduit :

$$\sqrt{1-B} \text{ sh } [(\Pi-b) x / |\alpha-\beta|] / \Pi \sqrt{1+B} x \text{ ch } [\Pi x / |\alpha-\beta|] \leq f(x)$$

$$f(x) \leq K \sqrt{1-B} \text{ ch } [(\Pi-b) x / |\alpha-\beta|] / \Pi |\alpha-\beta| \text{ ch } [\Pi x / |\alpha-\beta|]$$

d'où :

$$\sqrt{\frac{1-B}{1+B}} \frac{|\alpha-\beta|}{\Pi b} \frac{F_1(x)}{x} \leq 1 - F(x) \leq \frac{\sqrt{1-B}}{b \Pi} K F_2(x)$$

et le résultat annoncé.

IV. Loi du logarithme itéré pour $(Z_t, t \geq 0)$

THEOREME

Etant donné un mouvement brownien $(X_t, Y_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0, on a pour tout couple (α, β) de nombres réels

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|\alpha \int_0^t X_s dY_s + \beta \int_0^t Y_s dX_s|}{t \text{Log}_2 t} = |\alpha-\beta| / \text{Arc cos } (2\alpha\beta/\alpha^2+\beta^2)$$

On procède comme pour le Mouvement Brownien [1] .

Soient $\delta > 0, q > 1$

$$A_\delta = \{ \limsup_{t \rightarrow \infty} Z_t / t \text{Log}_2 t > 1 + \delta \} \subset \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \text{Max}_{t \leq q^{n+1}} Z_t > (1+\delta) q^n \text{Log}_2 q^n \}$$

d'où, compte-tenu du lemme 2,

$$P(A_\delta) \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P[Z_{q^{k+1}} > (1+\delta) q^k \text{Log}_2 q^k]$$

or, d'après le lemme 4, on a :

$$\begin{aligned} P[Z_{q^{k+1}} > (1+\delta) q^k \text{Log}_2 q^k] &= P[Z_1 > (1+\delta) \text{Log}_2 q^k / q] \leq C_2 F_2 [(1+\delta) \text{Log}_2 q^k / q] \\ &\sim C_2 / (k \text{Log} q) \frac{1}{q} (1 + \frac{\delta b}{|\alpha-\beta|}) \end{aligned}$$

avec $l = |\alpha - \beta| / b$, $b = \text{Arc cos } (2\alpha\beta/\alpha^2 + \beta^2)$

Soit, en choisissant $1 < q < 1 + \frac{b\delta}{|\alpha - \beta|}$, $\forall \delta > 0$ $P(A_\delta) = 0$

cad $P[\limsup_{t \rightarrow \infty} Z_t / t \log_2 t \leq 1] = 1$.

De même, d'après le lemme 4, on a :

$$\begin{aligned} P[Z_{q^n(q-1)} > (1-\delta)q^{n+1} \log_2 q^{n+1}] &= P[Z_1 > (1-\delta) \frac{q}{q-1} \log_2 q^{n+1}] \\ &\geq C_1(q-1) F_1[(1-\delta) \frac{q}{q-1} \log_2 q^{n+1}] / q(1-\delta) \log_2 q^{n+1} \\ &\sim C'_1 / \log_2 q^{n+1} \cdot (n+1)^{\frac{q}{q-1} (1 - \frac{\delta b}{|\alpha - \beta|})} \end{aligned}$$

soit, en choisissant $q > \frac{|\alpha - \beta|}{\delta b}$, le terme général d'une série divergente.

Compte-tenu de :

- i) $Z_{q^{n+1}} = Z_{q^n} + \theta(q^n, \tilde{Z}_{q^n(q-1)}) + \alpha X_{q^n} \theta(q^n, Y_{q^n(q-1)}) + \beta Y_{q^n} \theta(q^n, X_{q^n(q-1)})$
- ii) la loi du logarithme itéré du mouvement brownien
- iii) Z_t symétrique
- iv) $(\theta(q^n, \tilde{Z}_{q^n(q-1)}), n \geq 1)$ sont indépendantes et ont même loi que $Z_{q^n(q-1)}$
- v) lemme de Borel-Cantelli

on peut écrire :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_{q^{n+1}} / q^{n+1} \log_2 q^{n+1} \geq -\frac{1}{q} (1+\delta) + 1-\delta + (\alpha+\beta) \frac{\sqrt{q-1}}{q} \geq 1-2\delta \quad \text{p.s.}$$

pour q assez grand

soit, en considérant :

$$B_\delta = \{ \limsup_{t \rightarrow \infty} Z_t / t \log_2 t > 1-\delta \} \supset \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ Z_{q^n} > (1-\delta)q^n \log_2 q^n \}$$

$$\forall \delta > 0 \quad P(B_\delta) = 1$$

cad $\limsup_{t \rightarrow \infty} Z_t / t \log_2 t \geq 1 \quad \text{p.s.}$

et le résultat annoncé, $(Z_t, t \geq 0)$ étant symétrique.

V. Bibliographie

- [1] L. BREIMAN Probability (Addison-Wesley).
- [2] A. FRIEDMAN Stochastic Differential Equations and Applications
 (Academic Press).
- [3] B. GAVEAU Principe de Moindre Action. Propagation de la Chaleur
 et estimées sous-elliptiques sur certains groupes
 nilpotents.
 Acta Mathematica 139 1.2 - 1977.
- [4] B. ROYNETTE Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1977
 Lectures Notes in Mathematics - 678 - Springer-Verlag.
- [5] M. YOR Remarques sur une formule de Paul LEVY
 Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1979.
 Ann. Scientifiques de l'Université de Clermont.