

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

G. LETAC

**La préservation des trajectoires du mouvement brownien
et la préservation des lois de Cauchy**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 81-85

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_81_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA PRESERVATION DES TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN ET LA PRESERVATION DES LOIS DE CAUCHY

G. LETAC

Université Paul Sabatier, TOULOUSE

1°) Lois de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne, on note $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Si $\omega = (a, p) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ la loi de Cauchy μ_ω dans $\mathbb{R}^n$ est la probabilité ayant pour densité le noyau de Poisson

$$P_\omega(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi^{-\frac{n}{2}} p \left[\|x - a\|^2 + p^2 \right]^{-\frac{n+1}{2}}$$

Si les statisticiens considèrent avec répugnance cette loi sans moments, elle intéresse les probabilistes car elle est la loi de sortie du mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ lorsque celui-ci part de $\omega = (a, p)$.

On dira qu'une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ préserve les lois de Cauchy si pour tout ω de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ la loi $F_* \mu_\omega$ dans $\mathbb{R}^p$ transportée par F de μ_ω est une loi de Cauchy à nouveau ; en d'autres termes, si il existe une fonction $f_F : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^{p+1}$ telle que :

$$(1) \quad F_* \mu_\omega = \mu_{f_F(\omega)}$$

En particulier si $p = 1$, il sera commode d'identifier $\mathbb{R}_+^2$ au plan complexe supérieur en posant $\omega = (a, p) = a + ip$. Rappelons qu'avec cette notation, la transformée de Fourier de μ_ω est :

$$(2) \quad \hat{\mu}_\omega(t) = \exp(i \omega t) \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad \omega \in \mathbb{R}_+^2$$

2°) Fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ préservant les lois de Cauchy

Notons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de ces fonctions, et $\mathcal{J}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ telles qu'il existe $F \in \mathcal{F}_n$ avec $f = f_F$. En utilisant (1) et (2) si $F \in \mathcal{F}_n$ on a pour tout $t > 0$:

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp(it F(x)) P_\omega(x) dx = \exp(it f_F(\omega))$$

Cette égalité implique trois choses pour f dans $\mathcal{J}_n$:

(1) la fonction f est harmonique dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$

(2) le carré du gradient complexe de f est nul, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 = 0$$

(3) $\lim_{p \rightarrow 0} f(a, p)$ existe, est réelle pour presque tout a de $\mathbb{R}^n$.

Il n'est pas difficile de voir qu'inversement si f satisfait (1), (2) et (3) alors $F = \lim_{p \rightarrow 0} f(a, p)$ appartient à $\mathcal{F}_n$. Pour caractériser $\mathcal{F}_n$, il suffit de trouver les fonctions satisfaisant (1), (2) et (3), propriétés qui caractérisent $\mathcal{J}_n$.

3°) Relation avec le mouvement brownien

Il est connu (voir [1]) que si f satisfait (1) et (2) et si $(b(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $b(0) = \omega \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, alors le processus $X(t) = f(b(t))$, pour $0 \leq t < T = \inf \{t; b(t) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\}$ a les mêmes trajectoires qu'un mouvement brownien dans $f(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathbb{R}^2$. Si de plus f satisfait (3), alors $\lim_{t \uparrow T} X(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$: il n'est pas surprenant qu'alors $F_* \mu_\omega$ soit une loi de Cauchy dans $\mathbb{R}$; à ma connaissance, c'est Harry Kesten qui a fait le premier cette remarque (voir [2]). Les fonctions de $\mathcal{J}_n$ sont donc les fonctions changeant les trajectoires du mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$ en celles sur $\mathbb{R}_+^2$, en "respectant la frontière" : par analogie avec les fonctions analytiques, on les appelle "intérieures" (voir [1]).

4°) Résultats connus

D'après l'article de F. Knight et P.A. Meyer, $\mathcal{F}_n$ n'est pas vide.

Il comprend au moins les fonctions de la forme :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0}{a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \dots + a'_n x_n + a'_0}$$

Par exemple le calcul montre que :

$$(4) \quad F(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \text{ implique } f_F(a_1, a_2, p) = \frac{a_1 a_2 + ip \sqrt{p^2 + a_1^2 + a_2^2}}{p^2 + a_2^2}$$

D'autre part on connaît une description complète de $\mathcal{J}_1$ (et donc de $\mathcal{F}_1$) (voir [3]) ; l'ensemble $\mathcal{J}_1$ est en bijection avec $\{1, -1\} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) \times \mathcal{M}_s$ où $\mathcal{M}_s$ est l'ensemble des mesures bornées, positives et purement-singulières sur $\mathbb{R}$. Cette identification se fait ainsi ; si f est associé à $(\varepsilon, \alpha, k, \mu)$ alors, pour $\varepsilon = 1$:

$$f(\omega) = k\omega + \alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega \gamma + 1}{\omega - \gamma} \mu(d\gamma)$$

pour $\varepsilon = -1$

$$f(\omega) = -k \bar{\omega} - \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\omega} \gamma + 1}{\bar{\omega} - \gamma} \mu(d\gamma)$$

Ainsi $F(x) = \frac{1}{x}$ donne f_F qui est associé à $(-1, 0, 0, \delta_0)$ avec $\delta_0 =$ masse de Dirac en 0.

Remarquons maintenant que $f \circ g \in \mathcal{J}_n$ si $f \in \mathcal{J}_1$ et $g \in \mathcal{J}_n$, de par la définition (et de même $F \circ G \in \mathcal{F}_n$). On peut alors se demander si on peut trouver une classe assez petite $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ pour que $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$. Plus $\mathcal{G}_n$ sera petit, plus le théorème sera beau. J'ai longtemps cru qu'on pouvait prendre les homographies de Knight et Meyer en guise de $\mathcal{G}_n$. C'est déjà faux pour $n = 2$, comme on va le voir, mais il y a quelque chose de très proche des homographies qui sert de classe $\mathcal{G}_2$.

4°) Caractérisation de $\mathcal{F}_2$ et de $\mathcal{J}_2$

Le résultat suivant est extrait de [4].

Théorème

Soit $F \in \mathcal{F}_2$. On a l'alternative :

- (I) ou bien il existe $c \in \mathbb{R}^2$ telle que F soit constante sur les demi droites issues de c . Si $\mathbb{R}^2$ est représenté en coordonnées polaires (ρ, θ) avec c pour origine, il existe F_1 dans $\mathcal{F}_1$ tel que

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F_1\left(\cotg \frac{\theta}{2}\right)$$

- (II) ou bien il existe une direction c dans $\mathbb{R}^2$ telle que F soit constante sur toutes les droites de direction c . Si $(\cos \theta, \sin \theta)$ est une direction orthogonale à c , il existe F_1 dans $\mathcal{F}_1$ tel que

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta).$$

Le cas (II) correspond bien à des homographies dégénérées en fonctions linéaires, composées avec une fonction de $\mathcal{F}_1$. Le cas (I) est plus subtil : $\cotg \theta$ au lieu de $\cotg \frac{\theta}{2}$ aurait donné une homographie mais le théorème indique que ces homographies n'ont pas la minimalité cherchée. En fait

$\cotg \theta = F_1\left(\cotg \frac{\theta}{2}\right)$ avec $F_1(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ qui est une fonction de $\mathcal{F}_1$ associée à $(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \delta_0)$. Cela correspond à (4), avec $c = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bernard, E.A. Campbell et A.M. Davie
"Brownian motion and generalised analytic and Inner functions"
Ann. Institut Fourier Grenoble, 29, n° 1, 1979, pp. 207-228.

- [2] J.H.B. Kempermann
"The ergodic behavior of a class of real transformations"
Stochastic Processes and related topics, I. (Proc. Summer Research
Inst. on Statistical Inference for Stochastic Processes, Indiana,
Bloomington 1974), Academic Press, New York 1975, pp. 249-258.

- [3] G. Letac
"Which functions preserve Cauchy laws ?"
Proc. A.M.S. 67, n° 2, 1977, pp. 277-286.

- [4] G. Letac et F. Olié
"Les fonctions intérieures de $\mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ et la préservation des lois
de Cauchy"
C.R. Acad. Sc. t. 289, 16 Juillet 1979, A, 215-218.